MATEMÁTICA INTERMEDIÁRIA

A VIA DAS APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS



JOSÉ NAZARENO CARDEAL FONTELES

José Nazareno Cardeal Fonteles

MATEMÁTICA INTERMEDIÁRIA

A VIA DAS APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS

Teresina - Piauí
2025

Vortex Editora
Coordenação de Produção Editorial: Lara Karina Araújo Mendes Borges
Diagramação: Jairon Rodrigues de Sousa
Revisão: Liziane Carvalho Sousa de Paiva
Capa: Gustavo Mascarenhas Alves do Bonfim

FICHA CATALOGRÁFICA

F682m Fonteles, José Nazareno Cardeal
Matemática intermediária: a via das aproximações multifárias. / José Nazareno Cardeal Fonteles. – 1.ed. – Teresina: Vortex Editora, 2025.
740 p.:il.

ISBN 978-65-5259-127-2

1. Aproximações. 2. Matemática. 3. Multifárias I. Título.

CDD: 510.7

Elaborada por Adriana Luiza de Sousa Varão – CRB-3/1493

Dedico esta obra a Rafael Fonteles, que propiciou meu retorno à Educação Básica, em 2013.

"A primeira coisa a compreender – embora isso seja difícil numa era comercial – é que o melhor da atividade mental criadora não pode ser obtido por nenhum sistema de recompensa monetária".

Bertrand Russell

"Os valores autênticos e puros do verdadeiro, do belo e do bem na atividade de um ser humano produzem-se por um único e mesmo ato, uma certa aplicação ao objeto da plenitude da atenção. O ensino deveria ter apenas por finalidade preparar a possibilidade de um tal ato pelo exercício da atenção".

Simone Weil

"Nunca me preocupei em saber quando vou ter êxito ou se vou ter êxito. Já fico satisfeito em perseverar nos meus esforços para fazer o que sei ser o meu dever".

Gandhi

"O objeto matemático tem realidade postulada. Não é um conceito objetivo de realidade, mas realidade em conceito... Os objetos matemáticos são "objetos reais", são objetos na realidade, nesta mesma realidade das pedras ou dos astros; a diferença está em que os objetos matemáticos são postuladamente construídos em seu conteúdo".

Xavier Zubiri

"Hoje, a teoria da complexidade está fazendo com que cada vez mais pessoas percebam que a matemática significa muito mais do que fórmulas secas, e que a compreensão dos padrões tem importância crucial para a compreensão do mundo vivo ao nosso redor, e que todas as questões de padrão, ordem e complexidade são essencialmente matemáticas."

Fritjof Capra

"Hoje nossa relação com o mundo e nossas relações recíprocas são mediatizadas, no sentido muito forte de união de conteúdo e forma, por máquinas. As máquinas se tornaram cocriadoras do nosso mundo e das nossas formas de conhecimento. Isso afeta evidentemente o próprio conceito de organizações aprendentes que, aliás, só pôde surgir, com a força que vem tomando, por causa dos ***novos espaços do conhecimento*** *propiciados pelas tecnologias da informação e da comunicação."*

Hugo Assmann

"Sem beleza não haveria nada a fazer no mundo! Todo o segredo, toda a história está nisto! A própria ciência não subsistiria por um minuto sem a beleza." (...) ***A beleza salvará o mundo!****"*

Dostoiévski

APRESENTAÇÃO

Desde os tempos de Arquimedes e Euclides, a matemática tem sido a linguagem que decifra os segredos do universo. Do cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz à teoria dos conjuntos de Cantor, cada nova descoberta expandiu nosso entendimento do mundo e impulsionou avanços tecnológicos que moldaram a civilização. Hoje, em uma era de inteligência artificial e computação quântica, a matemática continua sendo a chave para desvendar os mistérios do futuro.

Matemática Intermediária: A Via das Aproximações Multifárias surge como um farol que ilumina essa jornada, oferecendo uma abordagem inovadora para a compreensão da matemática. Ao contrário de livros tradicionais que frequentemente apresentam a matemática como uma série de fatos isolados, esta obra adota a metodologia das aproximações multifárias. Imagine um alpinista escalando uma montanha íngreme: em vez de tentar um salto impossível até o topo, ele avança passo a passo, conquistando cada trecho com segurança e determinação. Da mesma forma, este livro guia os leitores por uma jornada cuidadosamente elaborada, na qual conceitos complexos são desconstruídos em aproximações sucessivas, cada uma construindo sobre a anterior. Essa transição suave e integrada entre tópicos elementares e avançados não apenas facilita a compreensão, mas também cultiva uma visão sistêmica e contextualizada da matemática, tornando-a mais acessível, relevante e, ouso dizer, até mesmo inspiradora.

A obra constrói conceitos matemáticos em bases sólidas, proporcionando uma compreensão profunda sem sobrecarregar o leitor com formalismos excessivos. Ela respeita o desenvolvimento natural do pensamento matemático, alinhando-se às motivações históricas que impulsionaram o surgimento de novas ideias e teorias. Um exemplo claro dessa integração é o tópico das raízes enésimas da unidade. Este tema não apenas conecta Álgebra, Geometria, Trigonometria e Teoria dos Números, mas, através da Fórmula de Euler, também une o Cálculo e a Análise, oferecendo uma visão holística do poder e da beleza matemática. Essa abordagem multidisciplinar reflete o compromisso em apresentar a matemática como uma ciência viva, interconectada, que evolui e se enriquece ao longo do tempo.

A relevância dessa abordagem é evidente em campos como a Ciência da Computação e a Inteligência Artificial, onde a aplicação de conceitos matemáticos complexos é fundamental. Seja na otimização de algoritmos de aprendizado de máquina ou na navegação precisa de robôs autônomos, a matemática fornece as ferramentas essenciais para transformar ideias em realidade.

Esta obra não se limita a apresentar a teoria, mas também demonstra sua aplicação prática, com exemplos que abrangem desde a matemática pura até desafios da computação moderna.

A integração de conteúdos do ensino médio e superior é outro ponto forte deste livro, quebrando as barreiras artificiais entre diferentes níveis de aprendizado. Através de algoritmos explicativos e exemplos práticos, são ilustradas as etapas necessárias para se chegar aos resultados, mostrando como a aprendizagem pode ser facilitada pela tecnologia. As Dicas/Resoluções/Notas (DRN) que acompanham as questões são um recurso valioso, auxiliando o leitor na resolução de problemas e incentivando o pensamento crítico.

O professor que atua no Ensino Básico e/ou na graduação de Licenciatura em Matemática, pode fazer uso da obra para elaborar diversos projetos de iniciação científica, de modo a desenvolver habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, trabalho em equipe, comunicação científica, entre outras, que são essenciais não apenas na academia, mas também no mercado de trabalho.

Esta obra é um convite à exploração, à descoberta e à criação. Seja você um estudante em busca de uma base sólida em matemática, um pesquisador em busca de novas ferramentas ou um professor em busca de inspiração, este livro oferece um guia completo e envolvente. Ao combinar a história da matemática com aplicações modernas, a teoria com a prática e a clareza com o rigor, Matemática Intermediária: A Via das Aproximações Multifárias torna-se um recurso inestimável para todos aqueles que desejam desvendar a beleza e o poder da matemática.

Parabéns por esta obra notável, que certamente inspirará e capacitará gerações de estudantes, pesquisadores e entusiastas da matemática a explorar as infinitas possibilidades dessa ciência fascinante. Que Matemática Intermediária: A Via das Aproximações Multifárias seja um farol que ilumina o caminho para um futuro de descobertas e inovações.

João Xavier, Mestre em Matemática pelo IMPA, Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ, professor Emérito da UFPI e presidente da Fapepi (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Piauí).

André Macedo, Doutor em Engenharia da Computação pela UFRN, Professor Associado da UFPI e Secretário de Inteligência Artificial, Economia Digital, Ciência, Tecnologia e Inovação do Estado do Piauí.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13

CAPÍTULO I – FATORAÇÃO, DESIGUALDADES E SEQUÊNCIAS 25

- PRODUTOS NOTÁVEIS 26
- SOMATÓRIOS E SOMA TELESCOPANTE 28
- DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE MA ≥ MG 36
- MÉDIA PONDERADA E DESIGUALDADE DE TCHEBYSCHEV 41
- DESIGUALDADE DO REARRANJO 52
- SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E RAZÃO ÁUREA 65
- A RELAÇÃO DE ORDEM NOS REAIS 77
- SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS 81
- NÚMEROS DE FIBONACCI E SEQUÊNCIAS DE CAUCHY 93
- PROBABILIDADE GEOMÉTRICA E MEDIDA DE CONJUNTO 118
- O CONJUNTO $\mathbb{Q}$ COMO UMA APROXIMAÇÃO DO CONJUNTO $\mathbb{R}$ 123
- QUIZZES PARA RECORDAR O CAPÍTULO I 126

CAPÍTULO II – EXPOENTES, LOGARÍTMOS E APROXIMAÇÕES 129

- POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL E LOGARITMO 130
- CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO REAL 132
- CONJUNTO DE CANTOR 135
- A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL 155
- TEOREMA DO VALOR MÉDIO DE LAGRANGE 160
- FUNÇÕES HIPERBÓLICAS 183
- REDES NEURAIS E FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO 185
- CONVERGÊNCIA DE UMA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES REAIS 196
- A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO ESCADA 198
- A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO LIMITADA 202
- O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO 205
- EXTENSÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL(INTEGRAIS IMPRÓPRIAS) 212
- COMPARANDO MODELOS NA COVID-19: EXPONENCIAL X LOGÍSTICA 215
- A CAPACIDADE DE UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO 219

CAPÍTULO III – BASES DA TRIGONOMETRIA E ESPAÇOS VETORIAIS 223

- BREVE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA 224
- TEOREMA DO LADO COMUM 225
- FÓRMULAS DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO 232
- LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS 234
- RELAÇÃO FUNDAMENTAL 236
- TRANSFORMAÇÕES SOMA/PRODUTO 238
- ALGUMAS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS 252
- POLÍGONOS INSCRITOS DE ÁREA MÁXIMA 256
- DESIGUALDADE DE ERDÖS-MORDELL 258
- A LEI DOS COSSENOS E A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ 260
- PRODUTO VETORIAL OU PRODUTO EXTERNO 263
- ESPAÇOS VETORIAIS E FUNÇÕES 269
- SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS VETORIAIS 272
- CONTINUIDADE EM ESPAÇOS MÉTRICOS 275
- DERIVADA PARCIAL 276
- COMPRIMENTO DE ARCO E CURVAS PARAMÉTRICAS 279
- TEOREMA DE PTOLOMEU 281
- DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA POLÍGONOS 287
- CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO 310
- O PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT 313
- APROXIMAÇÃO PELOS MÍNIMOS QUADRADOS 315
- DESIGUALDADE DE HADAMARD 316
- COORDENADAS BARICÊNTRICAS 317
- GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS INVERSAS 332
- EXTENSÕES QUADRÁTICAS E PROBLEMAS DA ANTIGUIDADE 357
- GEOMETRIA DAS REDES CONEXAS NO PLANO 360
- GEOMETRIA DO MUNDO PEQUENO 361
- NOÇÕES SOBRE O GRUPO DE GALOIS DE CORPOS FINITOS 363

CAPÍTULO IV – COMPLEXOS E APROXIMAÇÕES 365

- NÚMEROS COMPLEXOS E A FÓRMULA DE EULER 366
- A REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS COMPLEXOS 373
- FATORAÇÃO DE MATRIZES 2 X 2 E AUTOVALORES 380
- A DESIGUALDADE DE PTOLOMEU 388
- A INVERSÃO DE STEINER E OS NÚMEROS COMPLEXOS 391
- A INVERSÃO DE STEINER E O DISCO DE POINCARÉ 403
- AS RAÍZES DE $Z^n = 1$ 407

- TEOREMA DE LAGRANGE 414
- INTEIROS GAUSSIANOS 451
- A EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ DIAGONALIZÁVEL 463

CAPÍTULO V – POLINÔMIOS E APROXIMAÇÕES 465

- APROXIMAÇÃO POLINOMIAL 466
- CONVERGÊNCIA DE UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS 467
- APROXIMAÇÃO POLIGONAL 473
- TEOREMA DE APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS 478
- CARACTERÍSTICAS GERAIS DE UM POLINÔMIO 480
- ANEL OU DOMÍNIO DE INTEGRIDADE 482
- TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA 484
- PROPRIEDADES RELEVANTES DOS POLINÔMIOS 489
- POLINÔMIOS SIMÉTRICOS 498
- FÓRMULAS DE NEWTON 510
- DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DE C EM C 526
- INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA 532
- CONVEXIDADE E DESIGUALDADE 544
- POLINÔMIOS CONTÍNUOS E NÚMEROS DE FIBONACCI 554
- O MÉTODO DE NEWTON DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES 573
- A CURVA DE GAUSS E SUAS APROXIMAÇÕES 575
- INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS 582
- TEOREMA DE CAUCHY DAS FUNÇÕES COMPLEXAS 588
- TEOREMA DE GREEN(PARA REGIÕES CONVEXAS) 585
- DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA 589
- VOLUME DE UMA BOLA(ESFERA) NO R^N 592

CAPÍTULO VI – OUTRAS APROXIMAÇÕES INTEGRADORAS....597

I - MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS 598
II - APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE FOURIER EM ESPAÇO DE HILBERT 613
III - FUNÇÕES POLIGONAIS PERIÓDICAS....632

APÊNDICE I....667

APÊNDICE II - GUIA DE ESTUDO COM IA 673

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 699

SOBRE O AUTOR 709

NOTA SOBRE A CAPA 711

ÍNDICE REMISSIVO 713

INTRODUÇÃO

A elaboração deste livro seguiu o que denominamos de Via das Aproximações Multifárias. Começamos com um rascunho de cerca de 30 páginas para uso em sala de aula, focando mais em questões. E por aproximações multifárias, ele foi se transformando ao longo do tempo até chegar à configuração atual.

A teoria das aproximações multifárias é apresentada no livro “Aproximações Multifárias: uma introdução” de nossa autoria, publicado pela editora Vórtex em 2024.

Os seguintes fatores foram relevantes na elaboração da presente obra:

1) Análise/reflexão crítica de experiências e vivências anteriores, em diversas áreas, sob a perspectiva pedagógica/epistemológica das Aproximações Multifárias, conforme dados biográficos sobre o autor no final deste livro;

2) Leitura(ou releitura) e análise de obras de vários campos do conhecimento sob o novo olhar das Aproximações Multifárias;

3) A experiência dos últimos 10 anos na direção geral do processo inovador de Ensinar/Aprender do colégio CEV de Teresina e também como professor de Matemática dessa instituição, atuando na preparação de estudantes para o vestibular do IME/ITA e das Olimpíadas de Matemática;

4) Palestras sobre Aproximações em seminários e encontros para estudantes universitários e professores do Ensino Básico e Superior.

Esperamos que colegas de magistério, que atuam no Ensino Básico e na graduação de Licenciatura em Matemática, possam se interessar por este texto e, com seus diálogos/debates e consensos/dissensos, contribuírem para um processo de ensinar/aprender mais ativo e eficaz da Matemática. Pois uma motivação importante na elaboração desta obra foi buscar que sua configuração, como um texto de Matemática Intermediária, construído pela via das aproximações multifárias, proporcionasse aos professores do Ensino Básico momentos ativos de aprimoramento e renovação, tendo em uma única obra, uma visão geral dela, em uma “linguagem intermediária”, em um formato diferenciado, contendo centenas de questões interessantes que, em sua maioria, foram selecionadas de vestibulares do IME/ITA e de algumas Olimpíadas de Matemática. Mas também incluímos exemplos e questões interessantes que não fazem parte de competições ou vestibulares.

Algumas incluem outros conteúdos para além desses exames e outras apontam para o futuro do ensino/aprendizagem da Matemática, com adequada mediação tecno-simbólica digital. Os “textos mais longos” e algumas notas devem ser encarados como questões de aprofundamento (ou de revisão) de conteúdos “intermediários” da Matemática, que revelam a amplitude da via das aproximações multifárias.

Acredito que os amantes da Matemática em geral, bem como aqueles que estudaram partes dela em sua formação superior, poderão se deleitar com a leitura “não linear” desta obra, com alguns intervalos para as questões e os textos mais longos que lhes provocarem curiosidade/ desafio à primeira impressão.

Um esforço razoável foi feito, no sentido de afirmar a tese de que **devemos incentivar o estudo e a pesquisa em e com Matemática Intermediária, visando novos resultados, novas compreensões, novas conformações de conteúdos e novos métodos** para enfrentar os novos problemas e desafios da própria Matemática e de suas áreas afins tais como Computação, Ciência de Dados, Física, Estatística, Engenharias, Economia, etc. Destaco em favor dessa afirmação o processo histórico de evolução da Matemática, em que a construção de um novo tópico ou área sofreu mudanças de apresentação até ter uma configuração pedagógica mais eficaz no processo de ensinar/aprender. Basta observar a evolução de certas conquistas mais recentes, realizadas a partir do século XIX. Entre elas citamos: Teoria de Grupos, Geometria Diferencial, Topologia, Teoria da Medida, Análise, Álgebra Abstrata, Álgebra de Boole, Estatística e Probabilidades, Geometria Fractal, Sistemas Dinâmicos, Teoria dos Números, Otimização e Ciência de Dados.

Além disso, como a configuração pedagógica, em qualquer tempo, é uma aproximação dinamicamente condicionada pelas prioridades socioculturais da época, então ela deve sempre ser aprimorada. Acrescento ainda que a relação pedagógica, sobretudo nestes tempos de hiperinformação via web, como percebera Gramsci, “não pode ser limitada às relações especificamente “escolares”, (...) Esta relação existe no conjunto de toda a sociedade no seu conjunto e em todo indivíduo em relação aos outros, entre intelectuais e não intelectuais, entre governantes e governados, entre elite e seguidores, entre dirigentes e dirigidos, entre vanguardas e corpos de exército. Toda relação de hegemonia é necessariamente pedagógica, que se verifica não apenas no interior de uma nação, entre as diversas forças que a compõem, mas em todo o campo internacional e mundial, entre conjuntos de civilizações nacionais e continentais” [Gramsci, 2015, Vol. 1]. Veja que a via das aproximações multifárias enfraquece a visão dogmática das "ciências exatas", o que facilita a problematização, o pensamento crítico e a ação dialogada com sensibilidade solidária.

De acordo com essa via a Matemática e as outras ciências devem ser estudadas, ensinadas e aprendidas, de modo ativo por e como aproximações multifárias da Realidade Estudada. Noutras palavras, não há "ciências exatas" da realidade. Devemos cada vez mais evitar usar a expressão "ciência exata" para a Matemática e tratá-la como uma bela"ciência da aproximação" que integra com todas as outras uma totalidade dos conhecimentos acumulados, que é também uma aproximação global da Realidade Estudada. O singular da Matemática é que suas Aproximações Multifárias são modelos/padrões/representações de diversos aspectos da Realidade Estudada pelas outras ciências. Mas a sua construção é feita também por aproximações multifárias. Aliás, essa é a razão principal que motivou a elaboração desta obra sobre Matemática Intermediária.

De um modo geral, nesta obra, acompanhando as questões, temos as DRN(Dicas/Resoluções/Notas), **com dicas, notas, comentários ou resoluções**. Elas são as aproximações/transições preferenciais do presente texto. A partir delas os textos mais longos foram desenvolvidos como novas aproximações. Essas DRN têm vários papéis, entre eles:

1º) De ajudar, de modo ativo, o aprendente a resolver a questão específica;

2º) De treiná-lo no uso consciente e sistemático de estratégias, fórmulas, padrões, propriedades, teoremas e conceitos;

3º) De reduzir a frustração na busca de resolver/compreender questões mais difíceis; e

4º) De melhorar a **percepção da beleza** dos desafios e das construções matemáticas para enfrentá-los.

Quanto mais frequente esses papéis forem estimulados e assimilados pelo aprendente, mais integrado e profundo será o seu aprendizado, pois estará de acordo com a nova visão sistêmica integrada da realidade, com a concepção de **inteligência senciente**, que integra e unifica, numa única faculdade, o "sentir" e o "pensar" e, evidentemente, com o método ativo das Aproximações Multifárias.

O momento histórico de muitos avanços na produção de textos e resultados de pesquisas em Matemática, favorece o **desenvolvimento sistemático da Matemática Intermediária**, que é compreendida, na presente obra, como uma Transição por Aproximações Multifárias da Matemática Elementar para a Matemática Avançada ou Superior, bem como de integração progressiva das diferentes áreas da Matemática em geral. Um aspecto prático relacionado com isso, que muitas vezes tentamos implementar, foi de mostrar a possibilidade de resolução, por mais de um caminho, de uma dada questão e relacionar o seu conteúdo com outras questões e/ou outros tópicos mais próximos. Muitas vezes apresentamos apenas uma resolução diferente daquelas mostradas em outras fontes. Pedagogicamente, isso permite uma problematização mais rica no aprendizado ativo da matemática e contribui na superação do estigma dogmático/autoritário do ensino tradicional e motiva o protagonismo criativo do aprendente.

Sabemos da importância da educação problematizadora, desde Platão/Sócrates com sua Maiêutica até Paulo Freire e Carl Rogers. Esse último escreveu: "Se verifica mais facilmente uma aprendizagem significativa quando as situações são captadas como problemáticas".[Fonteles, 2019]. E sabemos da relevância atual que tal caminho tem nas diversas metodologias ativas de aprendizagem largamente difundidas e pesquisadas.

Recordamos que já na década de 1990, o renomado psicólogo Jerôme Bruner escreveu: *"Com base no que aprendemos nos últimos anos sobre a aprendizagem humana – que ela é melhor se for participativa, proativa, comunitária, cooperativa e se tiver por objetivo construir significados, ao*

invés de recebê-los, nos saímos melhor no ensino das ciências, da matemática e das línguas nestas escolas do que em escolas tradicionais."[Bruner, 1997].

Os dois quadros, apresentados a seguir, ilustram ideias, conceitos e tópicos que ajudam a compreender as Aproximações Multifárias na Matemática e suas áreas próximas, bem como reforçar a concepção de que a Matemática é também uma Ciência de Aproximação. Por trás da concepção de "ciência exata", principalmente da Matemática, há uma concepção de mundo reducionista presa ao paradigma cartesiano/mecanicista. Pois, como disse David Bohm: "em grande parte, é nessas visões de mundo que nossas noções gerais sobre a natureza da realidade e sobre a relação entre o pensamento e a realidade são implícita ou explicitamente formadas."[Bohm, 1980]. É necessário avançarmos com o novo paradigma da visão sistêmica integrada, dentro da qual, está o Princípio Holístico de Pascal, que é a denominação que damos para uma proposição de Pascal colocada no fragmento 66(72) de sua obra "Pensamentos" [Fonteles, 2019]". O enunciado desse princípio é: **"Dado que todas as coisas são causadas e causantes, ajudadas e coadjuvantes, mediatas e imediatas, e todas se mantêm mutuamente por um laço natural e imperceptível que liga entre si as mais afastadas e diferentes, parece-me impossível conhecer as partes sem conhecer o todo, do mesmo modo que é impossível conhecer o todo sem conhecer particularmente as partes."** Aliás, os Algoritmos, a Ciência de Dados e a IA contribuem mais ainda para confirmar essa nova concepção que apresentamos aqui como consequência da Via das Aproximações Multifárias.

A VISÃO DE APROXIMAÇÃO EM MATEMÁTICA

- Aproximações por medidas, frações, decimais e arredondamentos;
- Aproximações numéricas: N, Z, Q, Q(), R, C = R(I), Z_p, Z(I), etc.
- Aproximações poligonais de figuras curvas e funções;
- Aproximações por Sequências e Séries(Limites, derivadas e integrais);
- Aproximações por grupos, anéis, corpos e espaços;
- Aproximações por Álgebra Linear/Análise no R^n e Álgebra Linear/Análise Funcional;
- Aproximações por Médias, desigualdades, convexidade e Otimização;
- Aproximações por Estatística/Probabilidade, Computação e Ciência de Dados;
- Aproximações por Geometrias não euclidianas;
- Tecnologias de Aproximações: Algoritmos, IA, TDIC, WolfranAlpha, Geogebra, etc.

GRANDES PROBLEMAS - RELEVANTES TRANSIÇÕES HISTÓRICAS

1. **As tentativas de demonstração do Postulado das Paralelas:**

   Criação das geometrias não euclidianas(Séc. XIX): Teoria da Relatividade, Forma e Evolução do Universo, Computação e TDIC.

2. **As tentativas de resolução de Equações de grau maior do que 4:**

   Criação da Teoria dos Grupos por Galois (Séc. XIX): avanço da Mecânica Quântica, da Química, da Biologia e da própria Matemática.

3. **Tentativas de Construção, com régua e compasso**, da trissecção de um ângulo, da duplicação do cubo e da quadratura do círculo.

4. **Outros:** Números Complexos, Último Teorema de Fermat(demonstração:1994), Teorema da incompletude de **Gödel** (1931), Conjectura de Poincaré(Demonstração: 2003), o problema das 4 cores e o problema dos Três Corpos (Teoria do Caos).

Um vídeo interessante que mostra um mapa sistêmico integrado da Matemática pode ser acessado no endereço indicado a seguir. Ele vem com legendas em várias línguas, inclusive português. Se o leitor olhar para o mapa com a "visão das Aproximações Multifárias", ele poderá perceber, com maior compreensão, a integração dos diversos tópicos e áreas da Matemática, bem como as possibilidades de novas redes de aproximações multifárias a serem construídas entre eles e dentro deles, na medida que fizer um "zoom" nas partes/subconjuntos do conjunto Universo da Matemática. **Acesse o Código QR**.

Ao longo do texto, procuramos fazer transições e aproximações de tópicos e ideias da Matemática Elementar para a Superior, com o mínimo de conceitos e propriedades. Além de um certo destaque dado às médias e aproximações poligonais/polinomiais, três conceitos "integradores" dos principais tópicos abordados mereceram ênfase: fatoração, desigualdade e sequência. Embora uma sequência seja também uma função, a sequência é cultural e historicamente um conceito mais simples, atual e comum na humanidade do que o de função. Tanto no espaço, como no tempo, as sequências se apresentam no nosso cotidiano: relógio, calendário, narrativas de acontecimentos, distribuição das casas e prédios ao longo das ruas das cidades, páginas de um livro, estantes de uma biblioteca, andares de um edifício, escalas, medidores, tabelas, contagem, etc. Sobre essa última é importante salientar que, culturalmente, primeiro lidamos com o conjunto dos naturais, através de uma contagem que já expressa a ideia de sequência. A palavra função tem vários sentidos na cultura geral e é muito frequente o uso dela com um significado muito diferente do que usamos em Matemática. Aliás, em português, não precisamos usar a palavra função para conceituar sequência, é suficiente usarmos a palavra correspondência(ou associação), a qual serve também para definir função. Além disso, podemos considerar a função como uma generalização de uma sequência. E um aspecto complementar importante é que com o

desenvolvimento da matemática computacional e das TDICs, as "recorrências se tornaram uma forma destacada de se criar novas sequências e com elas estudarmos características novas, emergentes, das funções, que antes não eram percebidas. Uma ilustração exemplar disso é a que mostramos sobre os fractais de Mandelbrot e de Julia no texto associado ao código QR indicado no final desta introdução. E não podemos deixar de destacar a importância atual das novas linguagens de programação, em especial os grandes modelos LLMs em que o próprio chatGPT está fundamentado. Os LLMs tiram proveito do fato de que os dados da linguagem fluem em ordem sequencial. Cada unidade de informação está, de algum modo, relacionada a dados anteriores em uma sequência. Hoje, os LLMs são treinados com trilhões de palavras. [Suleyman, 2023].

Por outro lado, os processos de fatoração são “aproximações” relevantes em matemática. Entre eles, citamos: fatoração dos inteiros em produto de números primos; os produtos notáveis; a fatoração de polinômios em produto de polinômios irredutíveis; as transformações soma/produto da trigonometria; a transformação soma/produto da desigualdade MA ≥ MG e as fatorações de matrizes. Além disso, sabemos da importância da forma fatorada das reduzidas de muitas séries de funções na determinação da convergência dessas.

As desigualdades receberam um certo destaque no primeiro capítulo e ao longo de todo o texto, de modo especial as relacionadas com as médias, pois essas revelam bem a ideia de aproximação na vida real, quer nos hábitos mentais cotidianos, quer através da Estatística, da Computação e da Física, que são “Aproximações contextualizadas” da nossa querida Matemática. Aliás, as desigualdades mais destacadas, incluem igualdades como caso especial.

Por isso as escolhas conceituais adotadas ao longo deste nosso texto terão, muitas vezes, diferenças das escolhas de outros autores. Precisamos de uma “linguagem intermediária” para expressar e narrar de forma mais compreensiva e mais próxima da realidade cultural do povo o conhecimento acumulado da Matemática em linguagens mais técnico-formais, as quais, com frequência, abusam de símbolos e conceitos supérfluos.

Seguindo esse rumo, a partir dos conceitos de sequência e limite de sequência chegamos em limites, derivadas e integrais de uma função real. Também usamos o conceito de sequência para conceituar conjuntos enumeráveis, conjuntos compactos e conjuntos fechados.

Adotamos outras definições para limite de função e função contínua usando apenas limite de sequência, o que facilitou a narrativa da demonstração de alguns teoremas, como o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstras dos valores extremos. De modo análogo, o fizemos para uma função de variável complexa, dando o suporte necessário para uma compreensão mais completa da demonstração apresentada para o Teorema Fundamental da Álgebra. Achamos também que a noção de limite de sequência se generaliza para os espaços métricos de dimensões maiores, de forma “mais natural”, preservando seu padrão conceitual inicial. Nesta mesma direção, usamos, precocemente, as sequências de Cauchy para provar a convergência da surpreendente sequência $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$, em que F_n é o número de Fibonacci de ordem n e, também, para explicar a construção do

conjunto dos números reais a partir dos racionais. Com isso, pudemos definir função exponencial em R e sua inversa, a função logarítmica.

Introduzimos a noção de **probabilidade geométrica** através de uma questão prática, e com isso preparamos as bases compreensivas, na linguagem dos conjuntos, da Teoria da Medida. A partir disso, desenvolvemos a Integral de uma função por um caminho "híbrido", combinando Riemann e Lebesgue, mas com padrão mais próximo de Riemann, combinando o conceito de função quase-escada com o de conjunto mensurável à Lebesgue. No capítulo sobre números complexos, aproveitamos as propriedades das raízes da unidade para introduzir a Teoria dos Números e a Inversão de Steiner. Junto com esta última, introduzimos as **funções homográficas** ou Transformações de Möbius, preparando a transição para as **transformações conformes**. Sempre buscando a simplicidade e a beleza nas construções matemáticas, através do uso das Aproximações e Transições Multifárias. E, de vez em quando, como se verifica nesta própria introdução, incluímos links para vídeos ou textos que apresentam novas aproximações multifárias, enriquecendo mais ainda o referido método.

Ao longo dos capítulos apresentamos diversos tópicos complementares que são aproximações multifárias de ideias desenvolvidas ao longo deles. Por exemplo, o uso das **extensões quadráticas** do corpo Q dos racionais para construir um **corpo ordenado euclidiano**, no qual resolvemos dois problemas clássicos da Antiguidade: usando apenas régua e compasso fazer a trissecção de um ângulo(60º) no plano e a duplicação(volume) de um cubo. Há um pequeno texto sobre "**Geometria do mundo pequeno**" associada à teoria das redes/grafos, e um outro sobre Grupo de **Galois de corpos finitos**. Outro tópico "**A Inversão de Steiner e o Disco de Poincaré**" em que apresentamos uma visão breve da geometria hiperbólica. No capítulo de polinômios incluímos as séries de potências e aproximações poligonais, funções holomórficas, a curva de Gauss, Integrais iteradas, Teorema de Green, desigualdade isoperimétrica e volume de uma bola esférica no R^n.

No Capítulo 6, o das Aproximações Integradoras, apresentamos três tópicos. O primeiro trata de Máximos e Mínimos condicionados, incluindo Mudança de Variáveis e o Método dos Multiplicadores de Lagrange. O segundo é sobre Aproximações por Séries de Fourier em Espaço de Hilbert, com o qual mostramos uma aproximação da Álgebra Linear com a Análise Funcional, por meio dos Espaços $C[0,2\pi]$ e $L_2\ [0,2\pi]$, do Teorema de Aproximação de Weierstrass e de noções da Integral de Lebesgue. E o terceiro aborda Funções Poligonais Periódicas. Esse tópico foi desenvolvido por aproximações sem uma referência Bibliográfica específica. Nele damos ênfase às funções que se expressam em "fórmulas fechadas" por funções trigonométricas especiais. É um esboço apenas. Penso que, a partir dele, seria razoável incluir nos textos de Matemática Básica para o Ensino Médio um tópico sobre as Funções Poligonais Periódicas "Trigonométricas", com as devidas mediações pedagógicas apoiadas nas TDIC.

Como motivação aos estudos e pesquisas em Matemática Intermediária, saliento que muitas das dissertações de mestrado do PROFMAT caminham na direção dela. Mas as transições mais suaves para o nível básico, muitas vezes, são atropeladas pelas “barreiras culturais” do modelo muito formal de escrever e apresentar/narrar a Matemática. Além disso, como cada uma delas têm que focar um certo tópico, o aspecto fragmentário do que denominamos de Matemática Intermediária, fica sem uma configuração sistemática e pedagógica. É preciso elaborarmos textos desse nível intermediário de modo sistemático, de tal modo que possamos, num futuro breve, falarmos de Matemática Intermediária, assim como falamos de Matemática Elementar e Matemática Superior, com suaves transições pedagógicas entre elas. É preciso um esforço criativo e coletivo na construção de uma “linguagem intermediária” para apresentar/narrar a Matemática Intermediária. E nessa direção, o caminho mais adequado é o da Via das Aproximações Multifárias.

Nosso “sonho” é motivar os professores do Ensino Básico a partiparem mais ativamente desse esforço criativo e coletivo, em seu cotidiano. E com as facilidades da produção atual de textos e hipertextos digitais - quer individualmente quer em grupo - acreditamos que esse tipo de engajamento propiciará uma motivação renovadora na rotina profissional deles, bem como seu empoderamento, com boa repercussão cultural no imaginário escolar e extra-escolar. **Precisamos fazer uma combinação, pedagogicamente otimizada, dos conceitos e símbolos matemáticos com a nossa língua portuguesa e com padrões gráficos/pictóricos, mediados, sempre que oportuno, com as novas TDICs.** A propósito, isso deveria ser feito com toda a Matemática, inclusive na pesquisa de ponta.É oportuno lembrar uma frase de Feynman: "A linguagem precisa não é o problema. Linguagem clara é o problema".

A democracia do conhecimento, que passa por uma linguagem mais clara e acessível, deve ser uma busca permanente de todos que constroem e reconstroem as diversas formas de ciência. Sem isso, o próprio Estado Democrático de Direito fica ameaçado. Sem o direito à educação bem implantado nas massas, não brota uma verdadeira democracia. As multidões fraternalmente bem educadas é que configuram um verdadeiro Povo. Edgar Morin percebeu bem isso quando escreveu:

“A continuação do processo técnico-científico atual – processo cego, aliás, que escapa à consciência e à vontade dos próprios cientistas – leva a uma grande regressão da democracia. Assim, enquanto o expert perde a aptidão de conceber o global e o fundamental, o cidadão perde o direito ao conhecimento. A partir daí, a perda do saber, muito mal compensada pela vulgarização da mídia, levanta o problema histórico, agora capital, da necessidade de uma democracia cognitiva.” [Morin, 2002].

Para ilustrar de forma mais específica *o potencial de estudo e pesquisa em Matemática Elementar/Intermediária*, vamos recordar quatro fatos recentes, três do século XX e um do século XXI.

1º) Em 1935, o matemático Paul Erdös formulou uma desigualdade geométrica que, cerca de um ano depois, veio a ser demonstrada por Mordell: a conhecida Desigualdade de Erdös-Mordell, que apresentamos no presente texto. Dezenas de artigos ao longo do século XX e também no presente século XXI, têm sido publicados, em diferentes periódicos, sobre essa bela desigualdade geométrica. No terceiro capítulo desta obra apresentamos uma demonstração dessa desigualdade.

2º) O segundo fato está relacionado a uma equação que ficou famosa no século XX: a equação diofantina $x^3 – 117y^3 = 5$. Desejava-se encontrar as possíveis soluções inteiras dessa equação. Em 1969, D.J.Lewis afirmou em um artigo que essa equação tinha, no máximo, 18 soluções inteiras. Dois anos depois, R. Finkelstein e H. London provaram que a equação não tem, de fato, nenhuma solução inteira. A demonstração envolvia métodos mais avançados. Porém, em 1973, F. Halter-Koch e V. St. Udresco observaram, independemente, que existe uma maneira muito fácil de se provar que $x^3 – 117y^3 = 5$ não tem soluções inteiras. Basta usar congruência módulo 9! Vejamos pois isso.

Suponhamos que a equação tenha uma solução inteira. Então existem inteiros x = b e y = d tais que $b^3 – 117d^3 = 5$. Observando que 117 é múltiplo de 9 e usando congruência módulo 9 teremos:

$$b^3 –117d^3 \equiv b^3 \pmod 9 \text{ e, por conseguinte, que } b^3 \equiv 5 \pmod 9.$$

Mas será que $b^3 \equiv 5 \pmod 9$ tem solução? Sabemos que as classes módulo 9 são: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}$. No entanto, os cubos(mod 9) delas são, respectivamente, os seguintes: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{8}$. Logo, o cubo de qualquer inteiro é congruente módulo 9, a 0, 1 ou 8. Em particular $b^3 \equiv 5 \pmod 9$ não tem solução.

Concluímos assim que a equação $x^3 – 117y^3 = 5$ não tem soluções inteiras.

3º) O conhecido Teorema do Número Primo afirma, de forma breve o seguinte: a quantidade q(x) de números primos menores do que x se aproxima de x/ln(x) quando x tende ao infinito. Esse teorema teve até 1949 provas baseadas na análise complexa. Em 1949, o matemático norueguês Atle Selberg apresentou uma prova elementar, totalmente aritmética. Esse matemático ganhou a Medalha Fields em 1950.

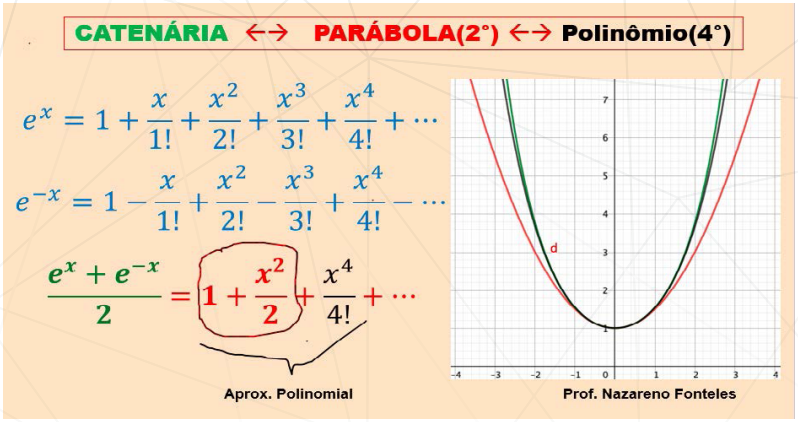
4º) O quarto fato relevante, a ser recordado aqui, é o seguinte: três jovens pesquisadores do Instituto Indiano de Tecnologia, Manindra Agrawal(1966-), Neeraj Kayal(1980-) e Nitin Saxena(1981-), em 2002 apresentaram um novo algoritmo, determinístico e de tempo polinomial, para decidir se um número é primo ou não. E a grande surpresa foi que utilizaram apenas métodos elementares da Teoria dos Números para obter o resultado. E isso tem implicações na Criptografia, a qual tem importância social, econômica e política extraordinárias na atualidade, sobretudo na segurança das comunicações via internet e suas metamorfoses(redes sociais).

Nessa mesma linha, com a disponibilidade de softwares como o Geogebra, o WolframAlpha e as novas formas de IA, como o GPT-4 e seus similares, novas visões e possibilidades de estudo e pesquisa em Matemática Elementar, Intermediária ou Superior surgiram. Hoje, podemos falar das geometrias dinâmicas, quer euclidianas ou não euclidianas e ensinar/aprender, de modo prazeroso, a inversão de Steiner, por exemplo. Também visualizar a beleza da Geometria Euclidiana, com coordenadas ou sem, da Geometria Hiperbólica do Disco de Poincaré e da Geometria Fractal de Mandelbrot. Antes tínhamos, apenas, uma pálida visão do Disco de Poincaré ao final de um curso de Geometria Diferencial. Hoje podemos brincar com suas propriedades usando uma construção com o Geogebra ou com o programa NonEuclid, sem precisar se aprofundar em Geometria Riemanniana. Isto mostra como novas aproximações multifárias de outros tópicos são possíveis, através de linguagens e construções intermediárias! Recordamos aqui, que na década de 1990 tivemos a oportunidade de trabalhar com esse programa NonEuclid no Ensino Fundamental.

Contemplando e meditando sobre tudo isso podemos perceber algo fundamental que permeia o método das Aproximações Multifárias: Só se aprende/ensina bem matemática, fazendo/refazendo matemática; só se compreende bem matemática, construindo/reconstruindo matemática, quer na forma aplicada(contextualizando), quer na forma mais abstrata(resolvendo/criando questões ou formulando novos conceitos/modelos/teorias). E isso se aplica a todas as outras formas de conhecimento. Afinal, quem pesquisa, estuda e elabora, aprimora seu modo de compreender e de aprender/ensinar. Mas o **caminho mais "natural" desse "fazer/construir" matemática/ciência é o das aproximações multifárias dinâmicas e sucessivas, fazendo aproximações de aproximações com o PHPA.** Dentro dessa visão, **as "Aplicações" nada mais são do que Aproximações Multifárias interdisciplinares ou transdisciplinares**. Por outro lado, as Aproximações intradisciplinares, que integram tópicos distintos da Matemática, passam a ser consideradas "Aplicações" também.

Com as novas TDICs, em especial a IA, as aproximações multifárias se tornaram possíveis em todos os níveis de Ensino/Aprendizagem e para todos os lugares e nações. A sala de aula rompeu as fronteiras espaciais e temporais das escolas e universidades.

Um exemplo interessante de aproximações pode ser ilustrado entre uma catenária e uma parábola, como na figura a seguir.



É preciso mostrar que a Matemática está viva e em expansão/transformação permanente, à semelhança do Universo, cujo estudo está intimamente ligado a essa rainha das ciências. Basta ver as previsões matemáticas de Einstein com a Teoria geral da Relatividade, estreitamente ligada à Geometria de Riemann, e mais recentemente, na década de 1960, as de Penrose, que lhe valeram o Prêmio Nobel de Física 2020. Vale a pena ler um pouco sobre isso. Por exemplo, **Acesse o Código QR(I)**. Um vídeo curto, em linguagem informal, relacionado a isso pode ser acessado no **Código QR(II)**.

Não esqueçamos que a Matemática é Arte, é Ciência, é Linguagem e é Jogo! Nessa perspectiva, as relações de padrões e formas da natureza com a sequência de Fibonacci, a razão áurea e os fractais provocam admiração e encantamento! E isso contribui para motivar o estudo e a pesquisa, assim como para uma melhor compreensão das Matemáticas e suas aproximações multifárias, da Vida e do Universo! Precisamos encantar mais e melhor as novas gerações, de todas as áreas, com essas quatro dimensões da Matemática, e sobretudo com sua Beleza, usando bem as Aproximações e Transições Multifárias com apoio da mediação tecno-simbólica digital, a qual também é um "construto matemático".

Sabemos da importância que a beleza tem, quando percebida e contemplada, sobre nossos significativos momentos de vida e de suas memórias. Precisamos incorporá-la, com suas múltiplas faces, no processo de Ensinar/Aprender da Matemática, em todos os níveis e em todas as áreas!

Já dissera o filósofo e matemático Bertrand Russel: “A matemática, adequadamente encarada, possui não apenas verdade como também suprema beleza... O verdadeiro espírito do deleite, da exaltação, a sensação de ser mais que homem, que é a pedra de toque da mais alta excelência, encontra-se tão certamente na matemática como na poesia.” (...) “Contudo, tão pouco têm os matemáticos visado a beleza que quase nada em sua obra possui esse propósito.”[Russel, 1977]. E o físico teórico Paul Dirac disse: “O pesquisador, em seus esforços para expressar as leis fundamentais da natureza em forma matemática, deve se empenhar, principalmente, pela beleza matemática. Ele ainda deveria levar a simplicidade em consideração de uma maneira subordinada à beleza... Onde elas chocam, a última deve ter precedência.”

O conhecido matemático contemporâneo Ian Stewart, autor de inúmeros livros sobre a Matemática, escreveu: “Quando pensamos numa demonstração como sendo uma história, há histórias boas e histórias más, contos excitantes e contos chatos, tal como música emocionante ou música insípida. Existe uma estética para as demonstrações, de tal forma que uma história realmente boa pode ser algo muito belo.”

QR (I) QR (II)

Devemos, também, evitar a inibição de apresentar tópicos “interessantes” relacionados com outros já dissertados, apenas se for com todas as demonstrações. É preciso um certo equilíbrio. Vale a pena apresentar, de forma mais elegante possível, as provas de proposições e teoremas relevantes para o que estamos “narrando” para o leitor. Um mapa conceitual das diversas áreas, com os conceitos/definições mais relevantes é outro desafio pedagógico a ser progressivamente vencido. Mas com ajuda da IA isso se torna simples.

É preciso mostrar o quanto a escolha de conceitos influencia na forma de se desenvolver um tópico e até mesmo uma área e nunca se esquecer de que os conceitos são "aproximações multifárias" da realidade. A própria história das idéias das matemáticas e das outras ciências nos ensina muito sobre isso. Vivenciei essa experiência na elaboração de vários tópicos e questões da presente obra.

No Apêndice II o leitor dispõe de um Guia de Estudo com IA desta obra. O objetivo dele é facilitar a abordagem (com a ajuda da IA generativa) do conteúdo da obra, de modo mais sintonizado com a perspectiva do leitor, no sentido do lugar pedagógico em que se situa – aluno do ensino médio, graduando de licenciatura em Matemática ou de áreas afins, professor de Ensino Básico, Professor de graduação de Matemática, etc. E mesmo para quem queira fazer uma leitura mais geral da obra, acreditamos, que vale a pena dar uma espiada no Guia de Estudo.

Por fim, informo que o leitor poderá acessar uma versão resumida da Via das Aproximações Multifárias no hipertexto intitulado A Via das Aproximações Multifárias com IA, que compartilhamos para professores de IA das escolas públicas do Piauí, em um evento sobre Ensino de Inteligência Artificial, realizado em Teresina neste ano de 2025.



Acesse pelo Código QR.

A VIA DAS APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS COM IA

Prof. Nazareno Fonteles

APRENDER POR APROXIMAÇÕES: UMA DÁDIVA DA NATUREZA

“ A natureza como um todo nos ofertou essa faculdade/perspectiva otimizável de aprender por aproximações multifárias!

Refletindo sobre isso percebemos que essa foi uma solução otimizada da natureza em nossa formação ao longo da evolução das espécies e do Universo. Pois, como permitir que nós, tão limitados(as), tenhamos conhecimento de uma Realidade tão ampla e complexa? Evidentemente só poderia ser por aproximações multifárias.”

Prof. Nazareno Fonteles

CAPÍTULO I

FATORAÇÃO, DESIGUALDADES, SEQUÊNCIAS E APROXIMAÇÕES

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos os principais produtos notáveis e suas formas fatoradas. Depois, ao longo da lista de questões, usando “aproximações multifárias”, apresentamos somas telescopantes, desigualdades entre as médias e outras desigualdades, progressões, ordem nos reais, sequências e séries, conjuntos enumeráveis, noção de probabilidade geométrica e medida de conjunto. Por fim, de modo breve, apresentamos a construção dos números reais a partir dos racionais.

PRODUTOS NOTÁVEIS

Os **produtos notáveis** são identidades algébricas de uso frequente em simplificações e fatorações de expressões algébricas, bem como no uso de resolução de equações e na obtenção e aplicação de algumas desigualdades algébricas. Apresentamos, a seguir, um rol dos mais relevantes **produtos notáveis**, bem como suas formas fatoradas correspondentes.

- Sejam a, b e c números reais. Então, valem as seguintes identidades:

  A) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

  B) $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$.

  C) $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$.

  D) $(a – b)(a – c) = a^2 – (b + c)a + bc$.

  E) $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

  F) $(a – b)^3 = a^3 – 3\,a^2b + 3ab^2 – b^3 = a^3 – b^3 – 3ab(a – b)$.

  G) $(a – b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 – b^3$.

  H) $(a + b)(a^2 – ab + b^2) = a^3 + b^3$.

  I) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

  J) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

  K) $(a + c)(b + c) = a(b + c) + c(b + c) = ab + ac + bc + c^2$.

- **Formas fatoradas** dos produtos notáveis:

  A’) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

  B’) $a^2 – 2ab + b^2 = (a – b)^2$.

  C’) $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$.

  D’) $a^2 – (b + c)a + bc = (a – b)(a – c)$.

  E’) $a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(\,a + b) = (a + b)^3$.

  F’) $a^3 – 3\,a^2b + 3ab^2 – b^3 = a^3 – b^3 – 3ab(a – b) = (a – b)^3$.

  G’) $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$.

  H’) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2)$.

  I’) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = (a + b + c)^2$.

  J’) $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c) = (a + b + c)^3$.

  K’) $ab + ac + bc + c^2 = a(b + c) + c(b + c) = (a + c)(b + c)$.

Um primeiro grupo de exercícios que lhe propomos é o da verificação dos 11 produtos notáveis listados anteriormente, bem como de suas formas fatoradas. Pois, muitas vezes, não se recordando com segurança de algum deles, o caminho direto para verificar ou corrigir tais fórmulas lembradas é saber fazer os desenvolvimentos e as fatorações, do primeiro membro para o segundo ou vice-versa. Além disso, os últimos produtos notáveis dependem dos primeiros da lista. Vamos verificar este:

J) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c)$

$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3c(a + b + c)(a + b)$

$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)[ab + c(a + b + c)]$

$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2)$.

Mas $ab + ac + bc + c^2 = a(b + c) + c(b + c) = (a + c)(b + c)$.

Portanto, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

Também vale a pena verificar estes dois resultados:

1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

2) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + b^{n-1})$.

Observe que se b = 1 teremos o caso especial:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$

Por exemplo, $x^{12} - 1 = (x - 1)(x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1)$.

Decorre disso o seguinte:

$a^{np} - 1 = (a^p - 1)(a^{(n-1)p} + a^{(n-2)p} + \cdots + a^p + 1)$, com n e p naturais.

Por exemplo, $x^{120} - 1 = (x^{12} - 1)(x^{108} + x^{96} + \cdots + x^{12} + 1)$.

SOMATÓRIO E SOMA TELESCOPANTE

Define-se, de um modo geral, o **somatório** de a_i, com i variando de 1 a n, n natural, indicado por $\sum_{i=1}^{n} a_i$, assim:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

As principais propriedades dos somatórios são as seguintes:

A) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

B) $\sum_{i=1}^{n} ka_i$ = k $\sum_{i=1}^{n} a_i$, k constante;

C) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + k)$ = $(\sum_{i=1}^{n} a_i)$ + nk, k constante;

D) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij})$ = $\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$;

E) $(\sum_{=1}^{n} a_i)\,(\sum_{j=1}^{n} b_j)$ = $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_j$

Obs.: Usa-se também, para o somatório duplo, esta representação:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ .$$

Seja (a_k) uma sequência numérica. Se $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$, então

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1.$$

Perceba que

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_n + a_n - a_{n-1} + \cdots + a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_1.$$

Alguns denominam essa afirmação sobre soma telescopante de **teorema fundamental da somação**. Por exemplo, podemos calcular a soma $\sum_{k=1}^{n} k.k!$ assim:

$$a_k = k! \Rightarrow \Delta a_k = (k+1)! - k! = k.k! \text{ Logo}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = \sum_{k=1}^{n} \Delta k! = (n+1)! - 1.$$

Um outro exemplo: calcular a soma $\sum_{k=1}^{n} a^k$, $a > 0$. Procedendo como antes, teremos:

$$a^{k+1} - a^k = a^k(a-1) \Rightarrow a^k = \frac{a^{k+1} - a^k}{a-1} = \frac{1}{a-1}\Delta a^k.$$

Logo $\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n} \Delta a^k = \frac{a^{n+1} - a}{a-1}$.

Observe que nesse segundo exemplo se trata da soma dos termos de uma PG de razão a e primeiro termo a.

Um corolário desse teorema é a **fórmula de somação por partes:**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k.$$

Ela pode ser usada também na forma:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k.$$

Para provar essa fórmula, basta usar o seguinte:

$$\Delta(a_k b_k) = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k \Delta a_k.$$

Um exemplo para ilustrar esse corolário: calcular a soma $\sum_{k=1}^{n} k.2^k$. Observe que $2^k = \Delta 2^k$. Logo

$$\sum_{k=1}^{n} k.2^k = \sum_{k=1}^{n} k.\Delta 2^k = n.2^{n+1} - 0 - \sum_{k=1}^{n} 2^k.1 = n.2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

QF-1. Vamos provar que $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)} = 9.$

Para isso, multiplicamos pelos conjugados para racionalizar os denominadores:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)}{(n+1-n)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}.$$

Agora, podemos fazer a soma telescopante para concluir:

$$\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)} = \sum_{n=1}^{9999} \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)$$

$$= \sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{1}$$

$$= 9.$$

QF-2. Prove que $x^{120} - 1 = (x^{12} - 1)(x^{108} + x^{96} + \cdots + x^{12} + 1)$.

QF-3. Fatore as expressões da desigualdade

tg x + $\sqrt{3}$ *< (1 +* $\sqrt{3}$ *cotg x) cotg x,* sendo cotg x = 1/tgx, colocando-a no formato P.Q < 0.

Temos, inicialmente que *tg x +*$\sqrt{3}$ *< (1 +* $\sqrt{3}$ *cotg x) cotg x* $\Leftrightarrow$ *tg x +*$\sqrt{3}$ < $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\text{tg x}}\right)\cdot\frac{1}{\text{tg x}}\Leftrightarrow$

Prosseguindo:

tg x +$\sqrt{3}$ < $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\text{tg x}}\right)\cdot\frac{1}{\text{tg x}}\Leftrightarrow$

tg x +$\sqrt{3}$ < $\left(\frac{1}{\text{tg x}}+\frac{\sqrt{3}}{\text{tg}^2\text{x}}\right)\Leftrightarrow$

tg x +$\sqrt{3}$ < $\left(\frac{\text{tg x}+\sqrt{3}}{\text{tg}^2\text{x}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ *(tg x +* $\sqrt{3}$ *)tg²x < tg x +* $\sqrt{3}$ *,* $\longmapsto$ *(tg²x > 0).*

$\Leftrightarrow$ *(tg x +* $\sqrt{3}$ *)tg²x – (tg x +* $\sqrt{3}$ *) < 0*

$\Leftrightarrow$ *(tg x +* $\sqrt{3}$ *)(tg²x – 1) < 0.*

QF-4. Vamos provar que a soma *S*, indicada a seguir, é um número inteiro

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

A ideia inicial é a racionalização dos denominadores. Façamos, pois.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}=-\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right).$$

Repetindo esse processo com as outras parcelas, teremos a soma telescopante:

$$-S=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}=\sqrt{1}-\sqrt{100}\ \Leftrightarrow S=9,$$ que é um número inteiro.

QF-5. Simplificar o produto *P* dado pela expressão:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^4}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right).$$

Basta multiplicar *P* por $\left(1-\frac{1}{a}\right)$ para obter a simplificação sucessiva:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)P=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^4}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\left(1+\frac{1}{a^4}\right)\left(1+\frac{1}{a^8}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{a^{2^{100}}}\right)\left(1+\frac{1}{a^{2^{100}}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{a^{2^{101}}}\right)$$
$$P=\frac{1-\frac{1}{a^{2^{101}}}}{1-\frac{1}{a}}.$$

QF-6. (Estônia). Prove a desigualdade:

$$2010<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{2010^2+1}{2010^2-1}<2010\frac{1}{2}.$$ Obs.: $2010\frac{1}{2}$ = 2010 + $\frac{1}{2}$.

QF-7. Determine o valor da soma:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+k\sqrt{k+1}}}.$$

Transforme essa soma numa soma telescopante de termos da forma $\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ e obtenha o valor $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

QF- 8. Usando $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, mostre que a soma $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ pode ser obtida em função de $\sum_{k=1}^{n} k$ pela expressão:

$$(n + 1)^3 – 1 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2] + 3[1 + 2 + 3 + ... + n] + n.$$

QF- 9. Usando o método da questão anterior calcule:

A) $\sum_{k=1}^{n} k^3$. **B)** $\sum_{k=1}^{n} k^4$. **C)** $\sum_{k=1}^{n} k^5$.

Após simplificações, deduza:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

QF-10. Calcule a soma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

QF-11. Verifique os dois produtos notáveis dados a seguir, sendo *a* e *b* reais quaisquer.

I. ab – a – b + 1 = (a – 1)(b – 1).

II. ab + a + b +1 = (a + 1)(b + 1).

QF-12. Sejam *a*, *b* e *c* números reais. Mostre que

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = (c - b)(a - b)(a - c).$$

QF-13. Sejam *a*, *b* e *c* números reais tais que *a* + *b* + *c* = 0. Mostre que

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Em seguida, prove que se *a, b e c* são números reais distintos, então é impossível ocorrer a seguinte igualdade:

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0.$$

QF-14. Fatore a expressão $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

QF-15. (Desigualdade MA ≥ MG) Sabemos que o quadrado de um número real é sempre não negativo, isto é, $x^2 \geq 0$, para todo x real. Logo $(x - y)^2 \geq 0$, para quaisquer x, y reais. Use isso e o produto notável associado para provar a seguinte desigualdade:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, se *a, b* são números reais positivos.

Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade **MA ≥ MG**, entre *a* **média aritmética** e a **média geométrica** de dois números reais positivos. E a igualdade só acontece quando *a = b.*

NOTA:

Uma desigualdade básica que devemos dar importância é: $x^2 \geq 0$, para todo x real. Decorre dela, por exemplo, que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, pois $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, quaisquer que sejam os reais a e b.

QF-16. Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, para quaisquer *x, y* e *z* reais.

QF-17. (**Desigualdade MQ ≥ MA)** Sendo a e b números reais positivos, prove que $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ e que a igualdade só ocorre quando *a = b.* Observe que essa desigualdade é a conhecida **MQ ≥ MA**, entre a **média quadrática** e a **média aritmética**. Essa desigualdade é também válida para *n* números positivos e, comumente, se escreve assim:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

em que a igualdade ocorre, se, e só se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Demonstre essa desigualdade, se inspirando na propriedade da questão anterior. Primeiro faça a prova para 3 termos e 4 termos. Depois generalize para n termos. Para isso, verifique que a desigualdade dada é equivalente a

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2. \qquad (1)$$

Mostre que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(a_i a_j)$ = Soma de n^2 termos $a_i a_j$, em que i,j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$. Observe que

$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sum_{i<j}(a_i a_j)$, com i = 1, 2,...,n – 1 e j = 2,3 ..., n.

Perceba que $\sum_{i<j}(a_i a_j)$ tem n(n – 1)/2 = $\binom{n}{2}$ termos da forma $a_i a_j$ e que n($a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$) tem n(n – 1)/2 termos da forma $a_i^2 + a_j^2$, para $i \neq j$.

Logo $n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$ = Soma de $\binom{n}{2}$ termos da forma

$a_i^2 + a_j^2 - 2\,a_i a_j = \sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j) = \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 \geq 0.$

Conclua que (1) é verdadeira e que a igualdade só ocorre quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Perceba também que (1) é válida quando a_1, a_2,...,a_n são reais quaisquer. Isso se deve à propriedade vista em QF-16.

QF-18. Mostre que se *a, b, c,* são números reais positivos, então

I. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$.

II. $\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}\right)^4 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

III. $\left(\frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n}\right)^4 \leq \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{n}$.

Obs.: $\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}\right)^2 \leq \frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$.

QF-19. A) Prove o Teorema de Bramagupta (Matemático hindu do século VII): *Se a* e *b* são números naturais e cada um deles é a soma de dois quadrados perfeitos, então *ab* também é uma soma de dois quadrados perfeitos.

B) Escreva o produto $(5^2 + 6^2)(7^2 + 10^2)$ como uma soma de dois quadrados perfeitos.

▶ **Resp.:** $25^2 + 92^2$.

QF-20. Fatore a expressão $x^4 + 4y^4$ como um produto de dois trinômios de coeficientes inteiros.

QF-21. (**ITA-2005, adaptado**) Qual é o menor inteiro positivo *n* tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01$?

▶ **Resp.:** n = 2501.

QF-22. Sejam *x, y* e *z* números reais, com pelo menos um diferente de 0. Se *x + y + z = 0*, calcule o valor da seguinte expressão $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz}$. Por que o denominador dessa expressão é diferente de 0?

QF-23. Volte ao problema QF-14 dessa lista. Reveja o que foi feito para fatorar a expressão dada. Reveja também a QF-15. A partir disso, você pode provar a desigualdade MA ≥ MG para três números reais positivos. Isto é, prove que se *a, b, c* são números reais positivos, então vale a desigualdade

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

QF-24. Prove que 6 divide a + b + c se, e somente se 6 divide $a^3 + b^3 + c^3$, onde a, b e c são inteiros.

QF-25. (IME-2001/2002) Considere um paralelepípedo de lados *a, b, c,* área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S_0. Qual a relação entre *a, b* e *c* para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

QF-26. (IME-2020) Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade Dn descartada no *n*-ésimo dia é dada pela relação:

$$Dn = \frac{1}{3} Dn\text{-}1, \text{ para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) em que se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

QF-27. Comprove a veracidade da seguinte proposição: "Se *a, b, c* são números reais positivos, então *(a + b)(b + c)(c + a) ≥ 8abc."*

QF-28. Use a desigualdade, MA ≥ MG de dois números reais para provar a análoga de quatro números reais. Ou seja, prove a seguinte proposição: "*Se a, b, c, d* são números reais positivos, então é verdadeira a seguinte desigualdade: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

É possível deduzir a desigualdade MA ≥ MG para três números positivos a partir dessa de quatro números. Tente. Dica: Tome d como a MG de abc.

A DESIGUALDADE MA ≥ MG GENERALIZADA

Se $a_1, a_2, ..., a_n, \ com\ n > 1,$ são números reais positivos, então vale a desigualdade

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = MG. \quad (*)$$

E a **igualdade ocorre se**, *e só se* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ **forem todos iguais**.

Apresentamos, a seguir, uma prova dessa desigualdade.

Sejam a_m e a_M , respectivamente, o mínimo e o máximo do conjunto de números positivos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Coloquemos MG = G e MA = A e troquemos a_m por $a_m \, . \, a_M /G$ e a_M por G.

Decorre disso que a **nova Média Geométrica G' é igual a G**, pois $a_m \, . \, a_M = (a_m \, . a_M /G \,).G$; e a **nova Média Aritmética A' não aumenta, isto é A' ≤ A**, pois

$$n(A - A') = a_m + a_M - (a_m . a_M /G + G) = a_M - G + a_m .(1 - a_M/G) =$$

$$a_M - G - a_m .(a_M - G)/G = (a_M - G)(1 - a_m /G) \geq 0.$$

Na última desigualdade estamos usando o fato $a_M \geq G \geq a_m$. Fazendo isso, sucessivamente, no máximo *n* vezes, substituimos $a_1, a_2, ..., a_n$ por *n* números iguais a G. Logo, a média aritmética desses novos números é G. E como A' ≤ A, então G ≤ A.

Agora vamos provar a condição de igualdade MA = MG, isto é, vamos provar a equivalência:

$$A = G \Leftrightarrow a_M = a_m \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n \, .$$

Se A = G, então A = A'. Logo $(a_M - G)(1 - a_m /G) = 0$, o que implica $a_M = G$ ou $a_m = G$.

Sabemos que $a_m \leq a_k \leq a_M$, para k = 1, 2, ..., n. Isso equivale a

$$a_m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \leq a_M \Leftrightarrow a_m \leq A \leq a_M.$$

Segue disso que se $A = a_M$, então,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n a_M \Leftrightarrow a_M - a_1 + a_M - a_2 + \cdots + a_M - a_n = 0.$$

Como $a_M \geq a_k$, para k = 1, 2, .., n, então concluímos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_M$.

De modo análogo, se $a_m = G = A$, deduzimos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_m$.

A desigualdade $a_M \geq G \geq a_m$ pode ser provada assim:

Sabemos que $a_m \leq a_k \leq a_M$, para k = 1, 2, ..., n. Isso equivale a $(a_m)^n \leq a_1 a_2 ... a_n \leq (a_M)^n$, que, por conseguinte, equivale a $a_m \leq G \leq a_M$.

NOTA:

Observe a relação estreita da desigualdade MA ≥ MG com máximos e mínimos. Ou seja, muitos problemas de máximos e mínimos podem ser resolvidos com a ajuda dessa importante desigualdade. Veremos vários deles nas páginas deste texto.

QF-29. Prove a seguinte desigualdade: $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\right)\geq 4^2$, em que *a, b, c, d são* **números reais positivos**. Generalize essa desigualdade para *n* números positivos $a_1, a_2, ..., a_n$.

QF-30. Prove que se $a_1, a_2, ..., a_n$, são números reais positivos e se $b_1, b_2, b_3, ..., b_1$ é uma reordenação de $a_1, a_2, ..., a_n$, então:

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\geq n$$

QF-31. A área de um triângulo com lados de comprimentos *a, b, c* é dada pela fórmula

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que p = (*a* + *b* + *c*)/2 é o semi-perímetro.

Usando essa fórmula e a desigualdade MA ≥ MG, mostre que o valor máximo da área de um triângulo com semi-perímetro *p* é $\frac{\sqrt{3}p^2}{9}$.

QF-32. Provar que para todo inteiro n ≥ 2, vale a desigualdade:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{n^2}<1.$$

QF-33. (Britisch Mathematical Olympiad, 1976). Prove que se *x*, *y*, e *z* são números reais positivos, então

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

QF-34. Dado um triângulo ABC, em que a, b e c são as medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente, mostre que vale a desigualdade:

$$\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\leq\frac{a}{b+c}.$$

QF-35. Mostre que para quaisquer a, b, c reais, tem-se:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

QF-36. [JNCF] As massas de quatro pedras preciosas, medidas em gramas(g), são dadas por *x, y, z e w.* Sabendo-se que *1/x + 1/y + 1/z + 1/w = 1/3*, qual o menor valor da soma das massas das pedras?

A) 8 g. **B)** 16 g. **C)** 32 g. **D)** 48 g. **E)** 64 g.

▶ **Resp.:** (D).

QF-37. [JNCF] Duas grandezas, *x* e *y,* envolvidas numa experiência de laboratório, só assumem medidas positivas. Os pesquisadores descobriram a seguinte relação entre elas: $x + y = 1$. Com base nessas informações, pode-se inferir que o maior valor possível da grandeza z, definida por $z = xy^2$, é

A) 1/8. **B)** 9/64. **C)** 4/27. **D)** 8/27. **E)** 49/256

QF-38. Sejam *a, b, c* números positivos. Mostre que:

A) $\sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

B) $\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{2bc}{b+c}+\dfrac{2ca}{c+a} \leq a+b+c.$

NOTA (Desigualdades entre as Médias: MQ ≥ MA ≥ MG ≥ MH):

Veja que o item (a) é a desigualdade MG ≥ MH, entre a média geométrica e a **média harmônica** de três termos. Essa desigualdade se generaliza também para n termos. E assim temos a tripla desigualdade entre as médias: MQ ≥ MA ≥ MG ≥ MH.

QF-39. [JNCF] Um estudante do 1º ano do Ensino Médio recortou uma folha de cartolina para obter uma figura em forma de trapézio. Em seguida, dobrou essa figura, de modo a obter dois trapézios de áreas iguais e com uma base comum paralela às bases do trapézio inicial.

A medida da base comum dos dois trapézios formados é

A) a média aritmética das medidas das bases do trapézio original.

B) a média geométrica das medidas das bases do trapézio original.

C) a média harmônica das medidas das bases do trapézio original.

D) a média quadrática das medidas das bases do trapézio original.

E) menor do que a média harmônica das bases do trapézio original.

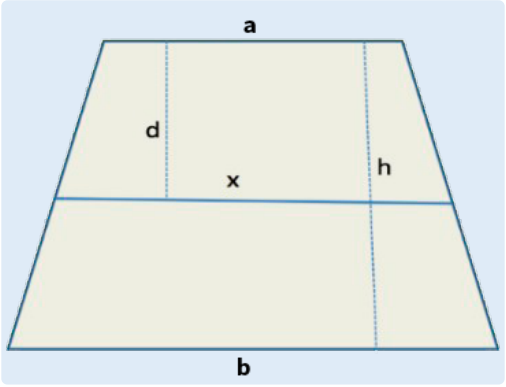
▶ **Resp.: (D).**

Obs.: MQ ≥ MA ≥ MG ≥ MH.

QF-40. Justifique a resposta da questão anterior.

Comentário (passos da resolução):

I) Figura representativa:



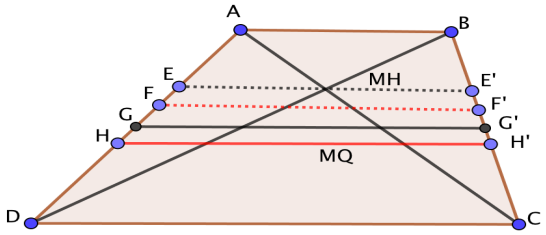
II) Condições impostas: $(a+x)d=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$ e $(b+x)(h-d)=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$

III) De (II) vem: $\frac{h}{d}=\frac{2(a+x)}{a+b}=\frac{2b+2x}{2x+b-a}$.

IV) De (III) se deduz que $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

NOTA:

Considere a figura a seguir, em que ABCD é um trapézio, G é ponto médio de AD, G' é ponto médio de BC, ABF'F é semelhante a FF'CD, EE' passa pelo ponto de interseção das diagonais de ABCD, os segmentos EE', FF', GG' e HH' são paralelos entre si e HH' divide ABCD em dois trapézios de mesma área. Indiquemos por MQ, MA, MG e MH as médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, das bases AB e CD do trapézio ABCD. Assim obtemos uma bela apresentação geométrica das médias MQ, MA, MG e MH e das desigualdades MQ $\geq$ MA $\geq$ MG $\geq$ MH, sendo MQ = HH', MA = GG', MG = FF' e MH = EE'. Justifique cada uma dessas igualdades. Em que situação geométrica essas médias são iguais?



QF-41. [JNCF] Sobre uma mesa estão espalhadas *n* peças numeradas de 1 a *n.* Os números dessas peças são todos diferentes entre si. Um garoto retira uma das peças da mesa e foge com ela. Verifica-se, após este ocorrido, que a média aritmética dos números das peças restantes é 25,8. Qual o número da peça que o garoto levou?

A) 51. **B)** 50. **C)** 36 **D)** 26. **E)** 15.

QF-42. [JNCF] Sejam a, b, c e d números reais positivos tais que ab ≥ 1 e cd ≥ 1. Prove que

A) $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1\right)^2$.

B) $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 + 1\right)^4$.

QF-43. [JNCF] Deseja-se construir uma caixa de água em forma de um prisma reto de base retangular, sem tampa, tendo 45 m² de área total de superfície.

Qual o volume máximo possível, em m³, que essa caixa pode ter?

Qual a forma específica da caixa quando isso ocorre?

QF-44. [JNCF] Um poste está situado no interior da praça Teresa de Lisieux de uma certa cidade do interior da França. A praça tem a forma de um triângulo e será reformada. O engenheiro responsável pela reforma calcula as três distâncias da base do poste aos lados da praça. E depois calcula, também, as distâncias dos vértices da praça aos lados opostos respectivos. Se os lados da praça têm medidas distintas entre si, então a soma das três distâncias da base do poste aos lados da praça é

A) igual à soma das três distâncias dos vértices aos lados opostos respectivos.

B) maior do que qualquer uma das distâncias dos vértices aos lados opostos respectivos.

C) menor do que qualquer uma das distâncias dos vértices aos lados opostos respectivos.

D) menor do que uma das distâncias dos vértices aos lados opostos respectivos.

E) igual à soma de um par de distâncias dos vértices aos lados opostos respectivos.

QF-45. **[JNCF]** O IBGE publicou o IPCA-15 de maio de 2016 com a tabela a seguir. Nessa tabela, consta a variação acumulada dos preços dos últimos 12 meses e o peso regional das capitais pesquisadas.

Região	Peso Regional (%)	Variação Mensal (%)		Variação Acumulada (%)	
		Abril	Maio	Ano	12 meses
Fortaleza	3,49	0,74	1,19	5,21	10,95
Salvador	7,35	0,08	1,13	4,75	9,97
Porto Alegre	8,40	0,76	0,98	4,97	10,44
Rio de Janeiro	12,46	0,30	0,90	4,13	9,25
Belém	4,65	0,78	0,88	4,62	10,24
São Paulo	31,68	0,59	0,88	4,16	9,73
Curitiba	7,79	0,47	0,81	3,55	9,71
Recife	5,05	0,30	0,72	4,21	9,63
Belo Horizonte	11,23	0,66	0,70	4,05	8,37
Goiânia	4,44	0,39	0,58	3,64	9,66
Brasilia	3,46	0,30	0,55	2,76	8,73
Brasil	**100,00**	**0,51**	**0,86**	**4,21**	**9,62**

Disponível em: saladeimprensa.ibge.gov.br.

Se fossem pesquisadas apenas São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte, qual seria a variação acumulada dos preços dos últimos 12 meses?

A) 9,12%. **B)** 9,35%. **C)** 9,52%. **D)** 9,62%. **E)** 9,21%.

▶ **Resp.: (B)**

MÉDIA PONDERADA E DESIGUALDADE DE TCHEBYSCHEV

A questão **QF-45** trata do que chamamos comumente de **média ponderada**. Na verdade, deveríamos chamá-la de **média aritmética ponderada**. Esclareçamos mais esse conceito. Essa média é uma generalização da média aritmética no seguinte sentido: na média aritmética de n números (a_1, a_2, ..., a_n), cada número a_i tem "peso" igual a 1/n; enquanto na média ponderada deles, os "pesos" podem ser diferentes entre si, mas têm que ter soma também igual a 1. De modo mais formal, definimos a média ponderada, indicada por MP, dos números reais (a_1, a_2, ..., a_n) por

$$MP = t_1a_1 + t_2a_2 + ... + t_na_n, \text{ em que } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } t_1 + t_2 + ... + t_n = 1.$$

A média ponderada tem uma grande aplicação no estudo de probabilidades. O conceito de *Valor Esperado* de uma certa variável aleatória é um exemplo de média ponderada. Nesse caso, cada a_i representa um valor da variável aleatória X e cada t_i indica a probabilidade associada ao a_i. Vejamos um exemplo. Joga-se um dado viciado sobre uma mesa plana. Seja X o número que aparece na face superior desse dado. Sabe-se que a probabilidade de ocorrer X = 5 ou de ocorrer X = 6 é o dobro da probalidade de ocorrer cada um dos outros quatro números. Qual é o valor esperado de X? Seja E(X) esse valor esperado. Então temos que E(X) = 1.(1/8) + 2.(1/8) + 3.(1/8) + 4.(1/8) + 5.(1/4) + 6.(1/4) = 4. Observe que se o dado fosse normal, então E(X) = 3,5, o que seria igual à média aritmética dos valores das faces. A seguir, apresentamos um exercício para você fazer.

Um dado viciado é lançado sobre uma mesa. Seja X o número que aparece na face superior desse dado. Sabe-se que a probabilidade de ocorrer um número ímpar na face superior desse dado é o dobro daquela de um par. Qual o valor esperado de X?

▶ **Resp.: E(X) = $\frac{10}{3}$.**

A desigualdade apresentada a seguir compara médias ponderadas. Após sua compreensão melhor, tente expressá-la em termos de médias ponderadas.

DESIGUALDADE DE TCHEBYSCHEV

Suponha que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ e $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$, em que x_i e y_i são números reais. Se t_1, $t_{2, \ldots,}$ t_n são números reais positivos e $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, então vale a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i x_i y_i \,. \qquad (1)$$

Prova:

Desde que os x_i e os y_i são ordenados na mesma ordem, então temos que $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$, para todos i, j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mas isso implica

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0 \,,$$

o que equivale a

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j x_i y_i + \sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j x_j y_j \geq 2 \sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j x_i y_i \,. \qquad (*)$$

Mas como $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ e $\sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j x_i y_i = (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i)(\sum_{i=1}^{n} t_i y_i)$, então (*) equivale a

$$2\sum_{i=1}^{n} t_i x_i y_i \geq 2\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i y_i\right)$$ que equivale à desigualdade (1).

Um caso especial dessa desigualdade é quando $t_i = 1/n$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Este caso especial pode ser deduzido, também, da desigualdade do rearranjo.

OBS-1: Pode-se deduzir a desigualdade MQ ≥ MA a partir desse caso especial da desigualdade de Tchebyschev. Basta fazer $x_i = y_i$.

OBS-2: Também temos para o caso da média geométrica uma **Média Geométrica Ponderada.** Ela se expressa assim: MG = $a_1^{t_1}.a_2^{t_2} \ldots a_n^{t_n}$, em que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$.

QF-46. [JNCF] Para se determinar o valor de uma grandeza X, foram feitas 31 medições. Os resultados obtidos foram $x_1, x_2, \ldots x_{31}$. Elas se ordenam assim: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{31}$.

A) Qual é a estimativa de X, para a qual, a média aritmética dos valores absolutos dos erros é mínima?

B) E qual é a estimativa de X, para a qual, a média aritmética dos valores $(x - x_i)^2$ é mínima?

DRN-F46:

A) Como 31 é ímpar, então o termo central é x_{16}. Temos $x_i - x_{16} < 0$, se $i < 16$ e $x_i - x_{16} > 0$ se $i > 16$. Logo a função $f(x) = /x - x_1/ + /x - x_2/ + \ldots + /x - x_{31}/$ é decrescente para $x < x_{16}$ e é crescente para $x > x_{16}$. Portanto, o valor mínimo ocorre em x_{16}, que é a MEDIANA das medidas x_i.

B) Queremos o mínimo da função $g(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$, com n = 31. Observe que $g(x) = nx^2 - 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2)$, que é uma função quadrática de x. O valor mínimo de g ocorre em $x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{31})/31$, que é a média aritmética das medidas x_i.

MEDIANA, MÉDIA E DESVIO PADRÃO

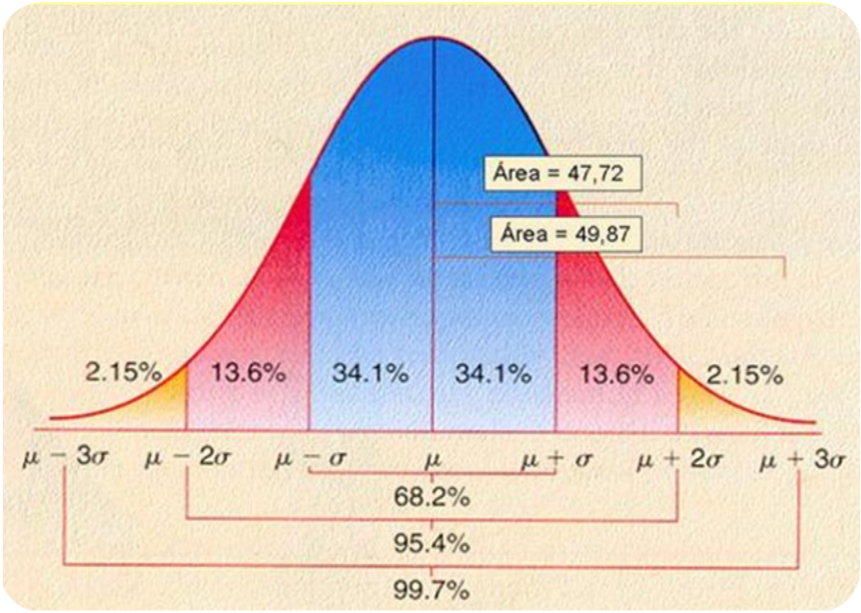
No item (a) da questão QF-46, vemos a característica central do conceito de *mediana*. Recordemos a definição dela. Dada uma lista de n números $x_1, x_2, \ldots x_n$, ordenados assim $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, chamamos de **mediana** deles ao número *M* que separa em partes iguais essa lista na ordem dada, ou seja, metade desses números são iguais ou menores do que *M* e metade deles são iguais ou maiores do que *M*. Se n for ímpar, M será o número que ocupa a posição central da lista ordenada; e se n for par, M será a média aritmética dos dois termos centrais da lista.

Exemplos:

1) A mediana dos números {4, 7, 9,13, 23, 35, 43} é 13.

2) A mediana da lista (4, 6, 7, 11, 34, 67, 78, 90) é 22,5.

No item (b), vemos uma propriedade característica da média aritmética que tem muita importância na Estatística. Ela está relacionada ao conhecido **Desvio Médio padrão**, comumente indicado por σ. Ele defini-se pela fórmula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}$, onde μ é a média aritmética da lista de números $x_1, x_2, \ldots x_n$. Observe que o desvio padrão é a média quadrática dos desvios $x_i - \mu$ das medidas x_i em relação à sua média aritmética μ. No capítulo sobre Polinômios tratamos da Curva de Gauss, que se relaciona com esses dois conceitos e que tem papel central nas Probabilidades e Estatística. A figura, dada a seguir, ilustra essa curva e suas relações com σ e μ.



QF-47. Seja ABC um triângulo qualquer. Denotemos suas alturas relativas aos lados BC, AC e AB por h_a, h_b e h_c, respectivamente. Se P é um ponto do interior de ABC e d_a, d_b e d_c são as distâncias de P aos lados BC, AC e AB, respectivamente, então prove que $\frac{h_a}{d_a}+\frac{h_b}{d_b}+\frac{h_c}{d_c} \geq 9$.

QF-48. Prove que para qualquer inteiro positivo n, a parte fracionária de $\sqrt{4n^2+n}$ é menor do que ¼.

QF-49. Se $H_n = 1 + ½ + 1/3 + \ldots + 1/n$, prove que $n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n + H_n$, para $n > 2$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-F(1)

As DRN(Dicas/Resoluções/Notas) são **dicas, notas, comentários ou resoluções** relacionadas às questões propostas. Elas são as aproximações/transições preferenciais do presente texto. A partir delas os textos mais longos foram desenvolvidos como novas aproximações. Essas DRN têm vários papéis, entre eles:

1º) De ajudar, de modo ativo, o aprendente a resolver a questão específica;

2º) De treiná-lo no uso consciente e sistemático de estratégias, fórmulas, padrões, propriedades, teoremas e conceitos;

3º) De reduzir a frustração na busca de resolver/compreender questões mais difíceis; e

4º) De melhorar a **percepção da beleza** dos desafios e das construções matemáticas para enfrentá-los.

Quanto mais frequente esses papéis forem estimulados e assimilados pelo aprendente, mais integrado e profundo será o seu aprendizado, pois estará de acordo com a nova visão sistêmica integrada da realidade, com a concepção de **inteligência senciente**, que integra e unifica, numa única faculdade, o "sentir" e o "pensar" e, evidentemente, com o método ativo das Aproximações Multifárias.

DRN-F6:

$$\frac{n^2+1}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{(n+1)}.$$

DRN-F10:

Use a fórmula da somação por partes.

DRN-F12:

Usar $(a - b)(a - c) = a^2 - ab - ac + bc$.

DRN-F14:

Use as relações de Girard para formar um polinômio de grau 3. Ou seja, faça

$P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$. Disso chegue na forma fatorada.

Um segundo caminho: usar o produto notável (E) mais de uma vez e colocar em evidência o fator(a + b + c). E um terceiro caminho é adicionar as duas últimas colunas do determinante D à primeira coluna e fatorar. $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ Veja que $D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

DRN-F16:

Completar quadrados da diferença.

DRN-F19:

A) Faça $a = p^2 + q^2$, $b = r^2 + s^2$ e verifique que $(pr - qs)^2 + (pr + qs)^2 = ab$.

DRN-F20:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Obs.: Esta fatoração é conhecida como **Identidade de Sophie Germain.**

DRN-F24:

Sabemos que $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

Agora, sendo $(a + b) + (a + c) + (b + c) = 2(a + b + c)$, portanto, um número par, temos que, ao menos um, dentre $a + b$, $a + c$ e $b + c$, é par.

Logo $3(a + b)(a + c)(b + c)$ é múltiplo de 6. Em consequência, temos que

$(a + b + c)^3 - 3(a + b)(a + c)(b + c)$ é múltiplo de 6.

DRN-F25:

Usando MA ≥ MG obtém-se: $V_{max} = (S_0/6)^{3/2}$ para a = b = c, que são as dimensões de um cubo.

Ou seja, $S_0 = 6a^2$ e $V_{max} = a^3$

DRN-F26:

Verifique que o volume(V = x.y.z) do invólucro é a soma(PG infinita) =

$$\frac{1}{3}Q_0 + \frac{1}{3^2}Q_0 + \frac{1}{3^3}Q_0 + \ldots = \frac{1}{2}Q_0.$$

A área da superfície do invólucro é S = 2(xy + xz + yz). Usando MA ≥ MG deduza que

$S_{min} = 6.(\frac{1}{2}Q_0)^{2/3}$, que ocorre para $x = y = z = (\frac{1}{2}Q_0)^{1/3}$.

DRN-F32:

Inicialmente, verificamos que $½^2 < ½$; $½^2 + \frac{1}{3^2} < 2/3$ e $½^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} < ¾$. Logo se S é o 1º membro da desigualdade, então podemos supor que $S < \frac{n-1}{n} < 1$ e provar por redução ao absurdo ou **por indução** (mostrar que $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 1 - \frac{1}{n+1}$). Complete a demonstração.

Outro caminho se inspira nesse final da indução, ao comparar, termo a termo, a soma S com a soma

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + \left(½ - \frac{1}{3} \right) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - 1/n.$$

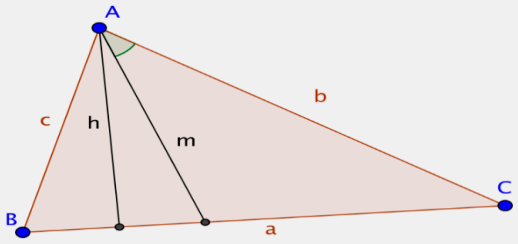
→ Pode-se melhorar a aproximação para **S < 2/3**. Tente provar . Para isso, mostre que a soma dos termos dessa série, desprezando os quatro primeiros termos dela, é igual a $\frac{1}{5} - \frac{1}{n}$. Depois, some os quatro primeiros termos da série dada e faça a comparação com essa para concluir.

DRN-F33:

Use a propriedade referida na questão QF-29 para deduzir essa famosa desigualdade. Outro caminho é usar a propriedade da questão QF-30.

DRN-F34:

Use área e compare bissetriz com altura. A figura a seguir ajuda.



DRN-F35:

Use a desigualdade: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

DRN-F37:

Observe que $2z = 2x(1 - x)^2$. Agora use MA ≥ MG para obter $z \leq 4/27$.

E como MA= MG ⇔ x = 1/3, então conclua que o máximo de z é 4/27 e que ocorre em x = 1/3.

DRN-F41:

Se excluirmos um número dentre os naturais de 1 a n, evidentemente sua MA fica alterada. Mas, independente de qual número tenha sido excluído, a menor MA será dada pela exclusão de n, e a maior MA será dada pela exclusão de 1.

Portanto,

$$\frac{1+2+...+(n-1)}{n-1} \leq 25{,}8 \leq \frac{2+3+...+n}{n-1} \Leftrightarrow \frac{\cancel{n}(n-1)}{2\cancel{(n-1)}} \leq 25{,}8 \leq \frac{\cancel{(n-1)}(n+2)}{2\cancel{(n-1)}} \Leftrightarrow \boldsymbol{n \leq 51{,}6 \leq n+2.}$$

$n \in N \rightarrow$ soluções possíveis: *n = 50 ou n = 51.*

N = 50 não serve, pois 25,8 = $\frac{1+2+3+\cdots+50-k}{49}$ => k $\notin N$ (Absurdo!)

n = 51 $\longrightarrow$ 25, 8 = $\frac{1+2+3+\cdots+51-k}{49}$ => 1290 = 1326 – k => k = 36.

DRN-F42:

Mostre que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 1 \geq ab - 1 \geq 0$ e $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (ab - 1)^2 + (a + b)^2$.

Para concluir o item (B) será útil MA ≥ MG.

DRN-F43:

Seja S_T = 45 m² e V o volume da caixa de dimensões a, b e c. Então

$S_T = ab + 2ac + 2bc$.

Usando MA ≥ MG obtemos:

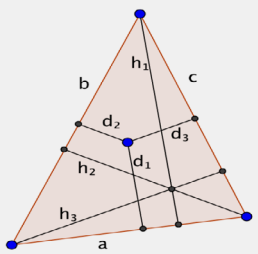
$$ab + 2ac + 2bc \geq 3\sqrt[3]{4a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Segue disso que $45 \geq 3\sqrt[3]{4V^2}$. Logo $V^2 \leq \frac{15^3}{4} \Rightarrow V \leq \frac{15\sqrt{15}}{2}$.

Com isso temos que o volume máximo possível é $\frac{15\sqrt{15}}{2}$.

Sendo MA = MG $\Leftrightarrow ab = 2ac = 2bc$, concluímos que $a = b = 2c$, quando V = $\frac{15\sqrt{15}}{2}$.

Ou seja, *o* volume máximo é $\frac{15\sqrt{15}}{2}\, m^3$ e ocorre quando a caixa tem base quadrada $(a = b)$ e a altura(c) é a metade da aresta da base.



DRN-F44:

Podemos supor que a < b < c. Seja S = área do Δ.

Como $2S = ah_1 = bh_2 = ch_3$, então $h_1 > h_2 > h_3$.

Mas $2S = ad_1 + bd_2 + cd_3$, logo,

$$\mathbf{a}d_1 + \mathbf{a}d_2 + \mathbf{a}d_3 < 2S = \mathbf{a}h_1.$$

Agora dividindo os membros por **a** obtemos:

$$d_1 + d_2 + d_3 < h_1.$$

DRN-F47

Use um caso particular de MA ≥ MG.

DRN-F48:

Temos que $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$. Disso deduzimos que

$$2n < \sqrt{4n^2 + n} < 2n + 1.$$

Logo sua parte inteira é 2n. Precisamos provar agora que

$$\sqrt{4n^2 + n} < 2n + ¼.$$

Para isso basta elevarmos ao quadrado ambos os membros dessa desigualdade.

DRN-F49:

Arrumar para usar MA ≥ MG. Outra coisa básica que pode ajudar: n = 1 + 1 + ... + 1.

QF-50. [JNCF] Um jogador pegou um baralho especial com cartas numeradas de 1 a 52 e as ordenou numa sequência decrescente de valores. Depois, um segundo jogador embaralhou as cartas, as dispôs na mesa e anotou num papel a nova sequência das cartas. Um terceiro jogador verificou que as duas sequências eram distintas. O menor valor possível que pode ter a soma dos 52 quocientes entre os valores das cartas, se todos os numeradores forem exatamente os valores da primeira sequência de cartas e os denominadores forem exatamente os valores da segunda sequência, é

A) 52/1 + 51/2 + 50/3 + ... + 3/50 + 2/51 + 1/52.

B) menor do que 52.

C) maior do que 52 e menor do que 52,01.

D) 52,01.

E) maior do que 52,01 e menor do que 52,02.

▶ **Resp.: C)** **Obs.:** (52/51 + 51/52) – (51/51+ 52/52) = 1/51.52 < 0,001.

QF-51. (ITA-1995). Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x-1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se:

A) $x^{n-1} < [n(1+x)]^{-1}$.

B) $x^{n-1} < [(n+1)(1+x)]^{-1}$.

C) $x^{n-1} < [n^2(1-x)]^{-1}$.

D) $x^{n-1} < [(n+1)(1-x)]^{-1}$.

E) $x^{n-1} < [n(1-x)]^{-1}$.

QF-52. Considere a sequência de números positivos $(x_1,x_2,...,x_n)$, tais que

$$\frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n}=1.$$ Prove que $x_1x_2...x_n \geq (n-1)^n$.

QF-53. Achar o valor máximo da função de variável real $f(x) = x(1-x)^3$, com $0 \leq x \leq 1$.

Resp.: $f(x)_m = \frac{27}{4^4}$.

QF-54. Considere as sequências de números positivos

$(a_1,a_2,..., a_n)$ e $(b_1,b_2, ...,b_n)$. Prove que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \geq 4n^2$.

QF-55. (**Olimpíada Matemática de Moscou, 1996**). Os inteiros positivos a, b, c são tais que

$a^2 + b^2 - ab = c^2$. Prove que $(a-b)(b-c) \leq 0$.

QF-56. **(Baltic Way).** Sejam a, b, c, d reais positivos dados. Prove que:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

QF-57. Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo. Prove que

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq \max(a,\ b,\ c).$$

QF-58. **(ITA-2001).** Se $f :]0, 1[\to R$ é tal que, $\forall x \in]0, 1[$, $|f(x)| < ½$ e $f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$, então a desigualdade válida para qualquer n = 1, 2, 3, ... e $0 < x < 1$ é:

A) $|f(x)| + ½^n < \frac{1}{2}$.

B) $½^n \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

C) $½^{n+1} < |f(x)| < \frac{1}{2}$.

D) $|f(x)| > ½^n$.

E) $|f(x)| < ½^n$.

QF-59. Quantos pares de números inteiros positivos *x* e *y* satisfazem a equação $x^2 - y^2 = 2011$?

QF-60. **[JNCF]** Perguntado sobre quantos alunos havia em sua classe, uma professora de matemática respondeu: "110 alunos, dos quais 42 são mulheres e 35 são homens". Inicialmente, a resposta pareceu estranha, mas logo se percebeu que a professora não estava usando o sistema decimal de numeração. Qual foi a base do sistema de numeração que ela usou em sua resposta?

A) 5. **B)** 6. **C)** 7. **D)** 8. **E)** 9.

▶ **Resp.:** C.

NOTA (SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL)

A representação de um número racional y em um sistema de numeração (posicional) de base natural $b \geq 2$ é , usualmente, feita assim:

$y = (a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0, d_1 d_2 ... d_k ...)_b$, em que $a_i, d_i \in \{0, 1, ..., b - 1\}$ e significa o seguinte:

$$y = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 + d_1.b^{-1} + d_2.b^{-2} + \ldots + d_k.b^{-k} \ldots$$

Exemplos:

A) $b = 10 \rightarrow y = 2546{,}83 = 2.10^3 + 5.10^2 + 4.10^1 + 6 + 8.10^{-1} + 3.10^{-2}$.

B) $b = 6 \rightarrow y = (32451{,}23)_6 = 3.6^4 + 2.6^3 + 4.6^2 + 5.6^1 + 1 + 2.6^{-1} + 3.6^{-2}$.

Para mudar a parte inteira de um número racional y, escrito na base 10, para outra base, usa-se o algoritmo das divisões sucessivas pela nova base e se escreve, na ordem contrária, os restos. Por outro lado, para mudar a parte fracionária de um número decimal procede-se assim: realizam-se multiplicações sucessivas dela pela nova base, sempre excluindo a parte inteira, até obter-se 0 ou repetir-se periodicamente. Em seguida se escreve os dígitos das partes inteiras dos produtos, na ordem direta. Por exemplo, passando 234,45 para a base 4 obtém-se: 3222,13030... Verifique que 0,45 X 4 = 1,8; 0,8 X 4 = 3,2 e 0,2 X 4 = 0,8.

Verifique as seguintes equivalências de representações numéricas, de um mesmo número, em bases diferentes:

A) $219 = (22010)_3 = (11011011)_2 = (3123)_2 = (333)_8$

B) $3241{,}24 = (100431{,}11)_5 = (302221{,}033113002203311...)_4$

C) $873{,}5 = (31221{,}2)_4 = (1551{,}4)_8 = (2355{,}33333...)_7 = (369{,}8)_{16}$.

A representação de um número inteiro positivo em qualquer base b > 1 é uma consequência do algoritmo da divisão euclidiana. Como todo racional positivo é dado por uma fração irredutível p/q de números inteiros positivos, então também existe uma representação de todo racional em uma base b > 1 e, por conseguinte de todo número real. As demonstrações disso você encontra na referência [Lang, 1972].

QF-61. Na introdução deste livro você viu a construção, em 4 estágios, de uma curva de Kohr a partir de um triângulo equilátero. Suponha que o triângulo tenha lado medindo 1. Para maior clareza, cada estágio é obtido do estágio anterior dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central. Se P_n e S_n são, respectivamente, o perímetro e a área do n-ésimo estágio da curva de Kohr, então determine:

A) P_N . **B)** S_n . **C)** lim S_n .

A DESIGUALDADE DO REARRANJO (REORDENAMENTO)

Uma desigualdade muito interessante e de fácil aplicação, quando adequada, é a conhecida Desigualdade do Rearranjo:

Dadas duas sequências de n números reais na ordem crescente, $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, para qualquer permutação $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ de $(a_1, a_2, ..., a_n)$, valem as desigualdades:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n \geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n.$$

E a igualdade acontece em cada uma das desigualdades, se, e só se suas parcelas correspondentes forem iguais.

A prova se fundamenta na diferença das somas S e S', quando se permuta apenas dois termos: a_s *e* a_r , com $r < s$. Assim obtemos:

$$S - S' = a_rb_r + a_sb_s - a_sb_r - a_rb_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r) \geq 0.$$

E, repetindo esse processo, resulta que S é máxima quando $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

Uma consequência da desigualdade do rearranjo é a seguinte desigualdade:

$$a_1/a_1' + a_2/a_2' + ... + a_n/a_n' \geq \mathbf{n}(1)$$

em que a_1', a_2', ..., a_n' é uma permutação de $a_1, a_2, ..., a_n$. Basta ver que $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ => $1/a_1 \geq 1/a_2 \geq ... \geq 1/a_n$, o que, combinado com a desigualdade do rearranjo, nos leva a (1).

Vejamos, a seguir, algumas questões para aplicarmos essa bela desigualdade.

Reveja a questão (QF-25). Nessa, o principal era usar a desigualdade $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ para deduzir MA ≥ MG, com três números positivos.

Veja a simplicidade da prova dessa desigualdade com o uso repetido da Desigualdade do Rearranjo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Isso implica $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ e $ab \leq ac \leq bc$.

Então,

$a^3 + b^3 + c^3 = a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2b + b^2c + c^2a = a(ab) + b(bc) + c(ca) \geq c(ab) + b(ac) + a(bc) = 3abc.$

Logo, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$

Outro bom exemplo que temos, é a seguinte questão da IMO, de 1964:

Suponha que a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo. Prove que $a^2(b + c – a) + b^2(a + c – b) + c^2(a + b – c) \leq 3abc.$

Resolução:

Sem perda de generalidade podemos supor que $c \leq b \leq a$. Disso segue que

$b + c – a \leq a + c – b \leq a + b – c$. Logo pela desigualdade do rearranjo obtemos:

$$a^2(b + c – a) + b^2(a + c – b) + c^2(a + b – c) \leq ba(b + c – a) + cb(a + c – b) + ca(a + b – c),$$

$$a^2(b+ c – a) + b^2(a + c – b) + c^2(a + b – c) \leq ca(b + c – a) + ab(a + c – b) + bc(a +b – c).$$

Adicionando, membro a membro, essas desigualdades, obtemos: $2[a^2(b + c – a) + b^2(a + c – b) + c^2(a + b – c)] \leq 6abc$, o que implica $a^2(b + c – a) + b^2(a + c – b) + c^2(a + b – c) \leq 3abc$.

NOTA (PROVAS DE MA ≥ MG E MH ≤ MG POR REARRANJO)

A partir da desigualdade do rearranjo deduzimos a desigualdade $a_1/a_1' + a_2/a_2' + ... + a_n/a_n' \geq n$, em que $a_1', a_2', ..., a_n'$ é uma permutação de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos. Façamos G a média geométrica desses números e $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1/G, x_1x_2/G^2, \ldots, x_1x_2\ldots x_n/G^n)$. Usando a desigualdade referida antes deduzimos que

$n \leq a_1/a_n + a_2/a_1 + \ldots + a_n/a_{n-1} = x_1/G + x_2/G + \ldots + x_n/G$, o que nos leva a

$MG = G \leq MA = (x_1, x_2,...,x_n)/n$. Observe que $a_n = x_1x_2...x_n/G^n = 1$.

Para provar a desigualdade MH ≤ MG usando método análogob, basta verificar que

$n \leq a_1/a_2 + a_2/a_3 + ... + a_n/a_1 = G/x_2 + G/x_3 + \ldots + G/x_n + G/x_1 \Rightarrow MH \leq G = MG.$

QF-62. Prove que $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, se x e y são positivos.

QF-63. Se $a, b, c \geq 0$, então prove que $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$

QF-64. Use a desigualdade do rearranjo para fazer uma nova demonstração da desigualdade:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},$$ em que x, y e z são reais positivos.

QF-65. Se *a, b* e *c* são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

QF-66. Mostre que para quaisquer três números positivos a, b e c, vale a desigualdade:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{a+b+c}{abc}.$$

QF-67. A sequência de números positivos ($a_1, a_2, ..., a_n$) satisfaz a condição:

$a_1 a_2 ... a_n = 1$. Prove que $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}\geq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$.

QF-68. Ache o mínimo da função $f(x)=\frac{\text{sen}^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\text{sen } x}$, $0 < x < \pi/2$.

QF-69. Se x, y, z são números reais tais que $x < y < z$, prove que $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 > 0$.

QF-70. (**Romênia, 2007**). Para números reais não negativos x, y, z, prove que

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

QF-71. **(Princípio Mínimo de Engel).** Uma desigualdade muito útil para ajudar na resolução de muitas questões é a seguinte:

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, em que $a, b, x, y \in IR$ e x, y > 0.

A) Prove-a de forma direta e veja que a igualdade só ocorre quando a/x = b/y. Observe que $(ay - bx)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 - 2xyab$.

B) Aplicando-a duas vezes prove que $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

C) Usando indução prove a generalização dessa desigualdade:

$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$, para todos os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ e $x_1, x_2, ..., x_n$ positivos, com a igualdade ocorrendo se, e somente se $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$, n ≥ 2 e natural.

Obs.: Essa desigualdade é também conhecida por **Princípio Mínimo de Engel.**

D) Use o item-c para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

E) Use o item-c para provar a desigualdade MQ ≥ MA, entre a média quadrática e a média aritmética.

F) Use o item-c para provar a desigualdade de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

G) Use item-c para provar que $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$, em que a, b e c são números reais positivos.

NOTA:

Observe um caso especial muito útil da desigualdade anterior(PRINCÍPIO MÍNIMO DE ENGEL) que está relacionado com a desigualdade MQ ≥ MA e que comentamos na QF-15:

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}$. Vale a pena rever isso.

QF-72. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reais positivos. Prove que:

A) $\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}$;

B) $\frac{a_1}{x_1^2}+\frac{a_2}{x_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n^2}\geq\frac{1}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}\cdot\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)^2$.

OBS: Como no princípio mínimo de Engel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são reais quaisquer, então é válida a desigualdade MQ ≥ | MA, nessas condições.

QF-73. (**IMO – 1995**). Sejam a, b e c números reais positivos tais que abc = 1. Prove que $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

QF-74. (**Romênia, 2002**). Se a, b e c são números reais do intervalo (0, 1), prove que

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

QF-75. Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$.

QF-76. (**Prova de Seleção para a Cone Sul 2003**). Sendo *a e b* inteiros positivos, prove que

$$|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{2a+b}.$$

QF-77. (**IMO-2010**, Lista curta). Sejam a, b, c, d números reais satisfazendo as relações a + b + c + d = 6 e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Prove que $36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48$. (*)

Resolução:

$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = -(a-1)^4 + (b-1)^4 + (c-1)^4 + (d-1)^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 4(a + b + c + d) + 4 = -(a-1)^4 + (b-1)^4 + (c-1)^4 + (d-1)^4 + 52$.

Agora, fazendo x = a – 1, y = b – 1, z = c – 1, t = d – 1, colocamos (*) na forma equivalente $16 \geq x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geq 4$, (1) com a restrição $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(a + b + c + d) + 4 = 4$.

Usando o princípio mínimo de Engel na forma $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}$, provamos uma das desigualdades de (1): $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2/4$.

Por outro lado, $(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 = (x^4 + y^4 + z^4 + t^4) + r$, onde $r \geq 0$. Logo

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 = 16.$$

QF-78. Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}.$$

QF-79. [JNCF] Um Físico, fazendo pesquisa na área de Termologia, realizou várias medidas da temperatura durante um certo tempo. Depois de estudar detidamente os dados em gráficos cartesianos, achou o modelo funcional mais aproximado para descrevê-los. E para obter o instante em que os valores numéricos da temperatura e do tempo eram iguais, resolveu a seguinte equação: $\sqrt{1+\sqrt{x}} = x - 1$, em que *x* é a variável tempo. Qual a solução real encontrada?

QF-80. (**AIME-1983**). Qual é o produto das raízes reais da equação

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}\,?$$

QF-81. (AIME-1986). Simplifique: $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$

▶ **Resp.: 104.**

QF-82. Achar a fórmula da soma $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + ... + nr^{n-1}$.

QF-83. (**Russia, 2002**). Prove que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$, sendo x, y, z números reais positivos tais que x + y + z = 3.

QF-84. Prove que para todo inteiro positivo n, o número $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

QF-85. Prove que para qualquer inteiro n, o número $P(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120.

QF-86. Os números a, b e $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ são racionais. Prove que os números $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais também.

QF-87. [JNCF] Um estudante de Engenharia, em um trabalho de iniciação científica, se deparou com a seguinte equação $2\sqrt{4+2\sqrt{4+x}} = x$, em que x > 0.

Para obter a única raiz real dessa equação, sem usar um programa de computação algébrica, como o WolframAlpha, ele aplicou uma propriedade muito simples: “Se f(k) = k, então f(f(k)) = f(k) = k”.

Qual o valor da raiz real da equação citada?

A) $2\sqrt{5}+1$.

B) $2\left(\sqrt{5}+1\right)$.

C) $\sqrt{5}+2$.

D) $\frac{\sqrt{5}+4}{2}$.

E) $2+2\sqrt{10}$.

▶ **Resp.: (B).**

QF-88. (**ITA-2016/2017**) Assinale a alternativa verdadeira.

A) $\sqrt{2016}-\sqrt{2015} < \sqrt{2017}-\sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

B) $\sqrt{2017}-\sqrt{2016} < \sqrt{2016}-\sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

C) $\sqrt{2017}-\sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016}-\sqrt{2015}$

D) $\sqrt{2016}-\sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017}-\sqrt{2016}$

E) $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017}-\sqrt{2016} < \sqrt{2016}-\sqrt{2015}$

▶ **Resp.:** C.

QF-89. Prove que a soma S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{80} pode ser fatorada na forma

$$S = (a^{54} + a^{27} + 1)(a^{18} + a^9 + 1)(a^6 + a^3 + 1)(a^2 + a + 1).$$

QF-90. (**Progressão Aritmética de segunda ordem**). Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças sucessivas $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, formam uma progressão aritmética de razão $r \neq 0$. Por exemplo, (1, 2^2, 3^2,4^2, ...), (1.2, 2.3, 3.4, 4.5, ...), (1.4, 3.7, 5.10, 7.13, ...). Sabendo que a soma S_n, de *n* termos de uma sequência desse tipo, é um polinômio de grau 3 em *n*, determine o valor dela para cada uma das três sequências citadas.

QF-91. Prove que a sequência dos quadrados dos termos de uma Progressão Aritmética de razão r é uma progressão aritmética de segunda ordem. Calcule a soma dos n primeiros termos de uma sequência desse tipo.

QF-92. Sejam a, b, c números reais quaisquer. Prove que o sistema a seguir não tem soluções reais.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6,$$

$$ax + by + cz = 4.$$

QF-93. (**United Kingdom, 2005**). Sejam *a, b* e *c* números reais positivos. Prove que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

QF-94. (**Ucrânia, 2004**). Sejam a, b, c números reais positivos tais que abc ≥ 1. Prove que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca.$$

QF-95. (**Romênia, 2004**). Achar todos os números reais positivos a, b, c que satisfazem às desigualdades:

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3).$$

QF-96. (**Romênia, 2004**). Os números reais a, b, c satisfazem $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove que

$$|a| + |b| + |c| - abc \leq 4.$$

QF-97. Sabendo que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, prove que $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ e em seguida fatore a expressão $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

QF-98. Achar o valor mínimo da função real de variável real definida por

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{(x^2+1)^2} + 5.$$

QF-99. Provar a desigualdade $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{a^2+c^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3$, em que a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo.

QF-100. Demonstre que se 3x + y = 1, então

A) $3x^2 + y^2 \geq ¼$;

B) $3x^3 + y^3 \geq 1/16$;

C) $3x^4 + y^4 \geq 1/64$.

QF-101. Demonstre que para todo número inteiro n ≥ 1 vale a desigualdade: $(2n - 1)! \leq n^{2n-1}$.

QF-102. Resolver a equação $(16x^{200} + 1).(y^{200} + 1) = 16(xy)^{100}$.

QF-103. Resolva, em R, a equação $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-F(2)

DICA-F51:

Seja x > 1 e 0 < y = 1/x < 1. Dessa forma você obterá $y^{n-1} < [n(1 - y)]^{-1}$.

▶ **Resp.: (E)**

DICA-F52:

Colocando $y_i = \frac{1}{1+x_i}$ tem-se que $x_i = \frac{1-y_i}{y_i}$. Verifique que usando MA ≥ MG, obtém-se:

$1 - y_i = \sum_{j\neq i} y_j \geq (n-1)(\prod_{j\neq i} y_j)^{\frac{1}{n-1}}$. Observe a condição em que ocorre a igualdade.

DICA-F53:

Use MA ≥ MG.

DICA-F54:

Primeiro reescreva o somatório duplo assim: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$, onde $a_{ij} = \frac{a_i + b_i}{a_j b_j}$.

E o visualize como a soma dos termos de uma matriz $(a_{ij})_{n\,x\,n}$. Depois use $(a + b)^2 \geq 4ab$ e observe que

$$\frac{4a_1b_1}{a_2b_2} + \frac{4a_2b_2}{a_1b_1} \geq 4.(2).$$

DICA-F55:

Use o seguinte $a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2abcos60º = c^2$. Deduza disso que a ≥ c ≥ b ou a ≤ c ≤ b.

Também é útil lembrar: em um triângulo, o maior lado se opõe ao maior ângulo e vice-versa.

DRN-F56:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}=(a+c)\left[\frac{\overbrace{a+b+c+d}^{s}}{(a+b)(c+d)}\right]\overset{*}{\geq}(a+c).\frac{s}{(\frac{s}{2})^2}=(a+c).\frac{4}{s}\ (1)$$

Em * estamos usando MA ≥ MG assim:

$$s = a+b+c+d \geq 2\sqrt{(a+b)(c+d)} \Leftrightarrow (\tfrac{s}{2})^2 \geq (a+b)(c+d).$$

De modo análogo, obtemos:

$$\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}=(b+d)\left[\frac{\overbrace{a+b+c+d}^{s}}{(b+c)(d+a)}\right]\overset{*}{\geq}(b+d).\frac{s}{(\frac{s}{2})^2}=(b+d).\frac{4}{s}\ (2)$$

Por (1) e (2) temos:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq\frac{(a+b+c+d)4}{s}=4$$
$$=4.$$

DRN-F57:

Suponha, sem perda de generalidade, que a ≥ b ≥ c. Então mostre, por fatoração, que M = $(-a)^3$ + b^3 + c^3 – 3(-a)bc ≥ 0. Disso segue que M + 2 a^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc ≥ 2 a^3 .

DRN-F58:

Use, repetidamente, a desigualdade triangular na definição da função para concluir que $|f(x)| < ½^n$. Perceba que $|f(x)| = \left|\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{4}(\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} => |f(x)| < \frac{1}{4}$.

DRN-F59:

Como 2011 é primo, então seus únicos divisores positivos e inteiros são 1 e 2011. Isto é 2011 = (2011).(1)

Mas $x^2 – y^2$ = (x + y) (x – y) = 2011. Então:

(x + y)(x – y) = 2011.1 => x + y = 2011 e x – y = 1 => 2x = 2012 => x = 1006.

Substituindo esse valor em x – y = 1 se obtém y = **1005.**

Portanto, o único par de números inteiros e positivos que satisfaz $x^2 – y^2$ = 2011 é (x = 1006, y = 1005).

DRN-F61:

A) Os perímetros formam uma PG de razão 4/3. Logo $P_n = 3.\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

B) $S_{n+1} = S_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$, por soma telescopante. Logo

$$S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

C) $\lim S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

DRN-F67:

Faça aplicações sucessivas da desigualdade do rearranjo supondo $a_1 < a_2 < ... < a_n$ *e* observando que $1/a_1 = a_2a_3...a_n$.

DRN-F68:

De acordo com a desigualdade do rearranjo, o menor valor ocorre quando as duas sequências de números estão ordenadas de formas opostas: uma crescente e a outra decrescente. **Esse é o caso de (sen^3x, cos³x) e (1/*senx*, 1/cosx).**

▶ **Resp.:** O valor mínimo de *f* é *1* e acontece em $x = \pi/4$.

OBS.: Esta questão pode ser resolvida pelo Princípio mínimo de Engel assim:

$$\frac{sen^4x}{senxcosx} + \frac{cos^4x}{cosxsenx} \geq \frac{(sen^2x + cos^2x)^2}{2senxcosx} = \frac{1}{sen2x} \geq 1, \text{ para } 0 < x < \pi/2.$$

E $x = \pi/4 \Rightarrow f(x) = 1$.

DRN-F69:

Reveja as questões QF-11 e QF-12 desta lista.

DRN-F70:

Use $a + b \geq |a - b|$ para obter $2(x + y + z) \geq 3\sqrt[3]{|(x-y)(y-z)(z-x)|}$. E lembre-se da fatoração da QF-14.

DRN-F71:

Para (f) e (g): Multiplique as parcelas, de modo adequado, por a/a, b/b e c/c.

DRN-F73:

$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}$. E use o Princípio de mínimo de Engel.

DRN-F74:

Use substituição trigonométrica adequada para chegar em cos A cos B cos C + sen A sen B sen C < cos A cos B + sin A sin B = cos(A – B) ≤ 1.

DRN-F75:

(a + b)(a + c) = a² + ab + ac + bc = a(a + b + c) + bc. Use MA ≥ MG e conclua.

DRN-F76:

Temos que $\sqrt{2} \notin Q \Longrightarrow a\sqrt{2} \neq b \Longrightarrow 2a^2 \neq b^2 \Longrightarrow |2a^2 - b^2| \geq 1$, pois a e b são inteiros positivos. Por outro lado, $|2a^2 - b^2| = \left|(a\sqrt{2} - b)(a\sqrt{2} + b)\right|$. Logo $\left|(a\sqrt{2} - b)\right| \geq \frac{1}{a\sqrt{2}+b} > \frac{1}{2a+b}$, o que conclui a prova.

DRN-F78:

Lembrar que $(x + y)^2 \geq 4xy$.

DRN-F79:

Use o fato: se f(x) = x, então f(f(x)) = x.

▶ **Resp.:** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

DRN-F80:

Faça $y = x^2 + 18x + 30$.

▶ **Resp.: 20.**

DRN-F82:

A) Para r = 1, temos: $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2.$

B) Para r ≠ 1, temos: $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + ... + nr^{n-1}$ e $rS_n = r + 2r^2 + 3r^3 + ... + (n - 1)r^{n-1} + nr^n$.

Disso vem que

$$S_n - rS_n = (1 - r)S_n = 1 + (r + r^2 + ... + r^{n-1}) - nr^n = 1 - nr^n + \frac{r - r^n}{1 - r}.$$

Logo $S_n = \frac{1 - nr^n}{1 - r} + \frac{r - r^n}{(1 - r)^2}$.

NOTA:

Uma sequência (Xn), definida por $X_n = a_n b_n$, em que (a_n) é uma PA e (b_n) é uma PG, é denominada de **Progressão Aritmético-geométrica(PAG).**

Resolva a QF-82 de duas maneiras, adaptando S_n para as duas versões da fórmula de somação por partes.

DRN-F83:

Por MA ≥ MG, temos que $x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3x$. E lembre-se que

$(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$.

DRN-F84:

Prove por indução. Observe que 144 = 133 + 11.

DRN-F85:

Fatorar P(n) e 120.

DRN-F86:

Mostre primeiro que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é racional.

DRN-F89:

$S = 1 + a + a^2 + a^3(1 + a + a^2) + ...+ a^{78}(1 + a + a^2)$.

DRN-F92:

Usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e MA ≥ MG.

DRN-F93:

Primeiro desenvolva ambos os membros da desigualdade dada. Observe que o segundo membro é igual a 3 + (a/b + b/c + c/a) + (a/c + b/a + c/b). Use a forma especial(sem raiz) de MQ ≥ MA, combinada com MA ≥ MG, para mostrar que $[(a/b)^2 + (b/c)^2 + c/a)^2] \geq a/b + b/c + c/a$.

DRN-F94:

Por rearranjo $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$, deduza que $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$.

A seguir, aplique MA ≥ MG e outra desigualdade conhecida.

DRN-F95:

Por rearranjo $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$.

▶ **Resp.:** a = b = c = 1/3.

DRN-F96:

Aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$|a| + |b| + |c| \leq 3 \text{ e MA } \geq \text{ MG para obter } |abc| \leq 1.$$

DRN-F98:

Usar MA ≥ MG. Verique que o valor mínimo é 6 e ocorre em x = 0.

DRN-F99:

Usar a desigualdade triangular para mostrar que cada parcela é maior do que 1.

DRN-F100:

Usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

DRN-F101:

Usar MA ≥ MG de forma conveniente em pares de fatores do 1º membro.

DRN-F102:

Usar MA ≥ MG.

▶ **Resp.:** $x = \pm \frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ e $y = \pm 1$.

DRN-F103:

Aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

▶ **Resp.:** $x = 1$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$.

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E RAZÃO ÁUREA

Considere a seguinte série:

$$x + x(x + x^2) + x(x + x^2)^2 + x(x + x^2)^3 + x(x + x^2)^4 + x(x + x^2)^5 + \ldots \ (*)$$

Se desenvolvermos os produtos e somarmos os termos semelhantes, obteremos:

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + \ldots$$

Como se pode perceber, os coeficientes dessa série são os termos da **sequência de Fibonacci**: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...), em que cada termo, a partir do 3º, é obtido pela soma dos dois últimos termos antecedentes. Ou seja, os números F_n dessa sequência obedecem à relação de recorrência de segunda ordem $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Observe mais ainda: o coeficiente do termo $\mathbf{a_k x^k}$ é o termo de mesma ordem da sequência de Fibonacci. Exemplo: o coeficiente de $89x^{11}$ é 89, que é o termo de ordem 11 da sequência de Fibonacci. Perceba que para calcular um termo de ordem k bastam alguns poucos termos de (*).

Agora façamos $\mathbf{x + x^2 = a < 1}$ em (*) para obter, usando a soma de uma PG infinita: $\frac{x}{1 - x - x^2}$.

Em seguida fatoremos $\mathbf{1 - x - x^2}$ para chegar em:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2x}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2x}\right)^{-1}\right].$$

Observe que ao resolvermos a equação $1 – x – x^2 = 0$, encontramos como raízes os números: $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Por isso alguns consideram como **razão áurea** o número $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ em vez de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Isso nos permite fatorar $1 – x – x^2$ e $x^2 + x – 1$, assim:

$$1 – x – x^2 = -\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } x^2 + x – 1 = \left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Indicando a razão áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ por φ, verificamos que $\varphi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Podemos também obter a seguinte igualdade:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\bar{\varphi}x}\right], \text{ em que } \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Há muitos resultados curiosos sobre os números de Fibonacci. Por exemplo, a identidade de Cassini: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Uma outra maneira de visualizar esse resultado é usando o teorema de Binet dos determinantes que afirma det(AB) = det(A).det(B), para matrizes quadradas A e B de mesma ordem, usando o resultado surpreendente:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}.$$

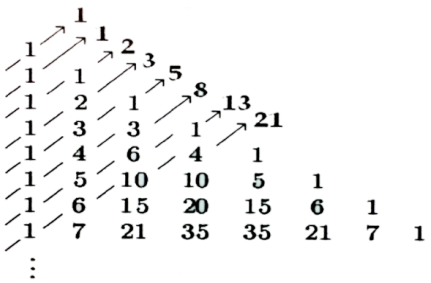
Essa fórmula pode ser provada usando o princípio da indução.

Outra curiosidade sobre esses números é a seguinte propriedade, que poderá também ser provada por indução:

$$\varphi^n = F_{n-1} + \varphi.F_n \text{ , } n \geq 1 \text{ e } F_0 = 0.$$

Vale também a identidade: $\bar{\varphi}^n = F_{n-1} + \bar{\varphi}.F_n$, $n \geq 1$ e $F_0 = 0$.

Também muito interessante é a coincidência entre a sequência de certas somas diagonais dos números binomiais do triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci. Veja a seguir.



Com a ajuda da Relação de Stifel, você compreenderá melhor essa propriedade. Observe uma pequena diferença nas diagonais, dependendo se o n é par ou é ímpar.

Essa propriedade pode ser expressa assim:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ \ldots\ + \binom{0}{n} = F_{n+1},\ \text{n natural, em que } \binom{n}{k} = 0 \text{ se } n < k.$$

Algumas propriedades dos números de Fibonacci que você poderá provar usando soma telescopante são as seguintes:

A) $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$.

B) (Índices ímpares): $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

C) (Índices pares): $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Acrescentamos mais uma propriedade interessante da sequência de Fibonacci:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}.$$

Para provar esta última propriedade use o seguinte: $F_kF_{k+1} - F_{k-1}F_k = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2$.

Observe que *dois números consecutivos da sequência de Fibonacci são sempre primos entre si.* Podemos provar essa propriedade por contradição. Suponha que F_n e F_{n+1} tenham um divisor comum $d > 1$. Então $F_{n+1} - F_n$ é divisível por d, o que implica d dividir F_{n-1}. De modo análogo, obtemos que d divide F_{n-2}, F_{n-3}, ..., F_1. Mas $d > 1$ não é divisor de $F_1 = 1$. Chegamos, assim, numa contradição, o que conclui a prova.

A FÓRMULA DE BINET DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Uma **relação de recorrência homogênea** de segunda ordem $A_{n+2} + aA_{n+1} + bA_n = 0$ pode ser resolvida através de sua *equação característica*: $x^2 + ax + b = 0$. Sua solução é dada pela expressão: $A_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, onde c_1 e c_2 são constantes e x_1, x_2 são as raízes da equação característica.

No caso da sequência de Fibonacci, em que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, temos: $x^2 - x - 1 = 0$. Com as raízes dessa equação temos que

$F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Substituindo os valores de F_1 e F_2 nessa fórmula, obtemos:

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Essa fórmula é denominada de **fórmula de Binet**. Ela pode ser escrita na forma mais simples:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n).$$

Podemos provar essa fórmula pelo princípio da indução, assim como segue. Verifica-se que $F_2 = F_1 = 1$. Suponhamos que ela seja válida para todo $k < n$, com $n \geq 3$. Então ela vale para $n - 1$ e $n - 2$. Segue disso que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} + \varphi^{n-2} - \bar{\varphi}^{n-2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^{n-2}(\varphi+1) - \bar{\varphi}^{n-2}(\bar{\varphi}+1)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^{n-2}(\varphi^2) - \bar{\varphi}^{n-2}(\bar{\varphi}^2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^n - \bar{\varphi}^n].$$

Verifique que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ e $\bar{\varphi}^2 = 1 + \bar{\varphi}$. Isso foi usado anteriormente.

Outra maneira de obter essa fórmula de Binet é usando as fórmulas

$$\varphi^n = F_{n-1} + \varphi.F_n,\ n \geq 1 \text{ e } F_0 = 0 \text{ e}$$

$$\bar{\varphi}^n = F_{n-1} + \bar{\varphi}.F_n,\ n \geq 1 \text{ e } F_0 = 0.$$

Como $\varphi - \bar{\varphi} = \sqrt{5}$, então $\varphi^n - \bar{\varphi}^n = \sqrt{5}\,F_n$.

Usando a fórmula de Binet deduza a seguinte propriedade dos F_n:

$$F_3 + F_6 + F_9 + \ldots + F_{3n} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2}.$$

Uma outra propriedade dos F_n que pode ser deduzida com a fórmula de Binet é a seguinte:

O número de Fibonacci F_n é o inteiro mais próximo do número $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, em que φ é a razão áurea.

Para obter isso, basta provar que $\left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| < ½$. Outra maneira de expressar essa aproximação da sequência de Fibonacci com a PG ($\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$) de razão φ e primeiro termo $\frac{\varphi}{\sqrt{5}}$, é com a fórmula fechada $F_n = [\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}]$, onde [x] representa o maior inteiro que não supera x. Seguindo esse modelo, qual o valor de$[\varphi + \frac{1}{2}]$? E o de $[\pi + \frac{1}{2}]$?

NOTA:

Dois vídeos interessantes sobre Sequência de Fibonacci e Razão Áurea podem ser acessados nos links indicados na versão eletrônica deste texto. Outros links são sugeridos nessa versão para aprofundar os conhecimentos sobre a bela seqência de Fibonacci, bem como se inteirar da biografia de Leonardo Fibonacci.

QF-104. (**IME-2007/2008**) Uma série de Fibonacci é uma sequência de valores definida da seguinte maneira:

- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, T1 = T2 = 1;

- Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, isto é:

$$T_N = T_{N-2} + T_{N-1}.$$

Se T18 = 2584 e T21 = 10946 então T22 é igual a:

A) 12225. **D)** 20412.

B) 13530. **E)** 22121.

C) 17711.

▶ **Resp.: C**.

QF-105. (**IME-2007/2008**). A soma dos números inteiros positivos de quatro algarismos que admitem 3, 5 e 7 como fatores primos é

A) 11025. **D)** 474075.

B) 90300. **E)** 475105 .

C) 470005.

QF-106. (**IME-2006/2007**). Seja $f : N \to R$ uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde *N* e *R* são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.

QF-107. O conjunto dos números naturais é particionado em grupos ordenados assim:

1, (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8 , 9 10), (11, 12, 13, 14 15), ...

Achar a soma dos números que formam o n-ésimo grupo dessa sequência.

▶ **Resp.:** $\mathbf{S_n = n(\frac{n^2+1}{2})}$.

QF-108. Considere a sequência (a_k) definida assim: $a_1 = 2$ e $a_{k+1} = 3a_k + 1$, para todo $k \geq 1$. Achar uma fórmula geral para a soma dos n primeiros termos dessa sequência.

▶ **Resp.:** $\frac{5}{4(3^n-1)} - \frac{n}{2}$.

QF-109. (**IMO-1964**). Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Prove que

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

QF-110. (**IMO-1971, lista curta**). Prove a desigualdade

$\frac{a_1+a_3}{a_1+a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_2+a_3} + \frac{a_3+a_1}{a_3+a_4} + \frac{a_4+a_2}{a_4+a_1} \geq 4$, onde $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

QF-111. Sejam x, y e z números reais e positivos. Prove que $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^3+y^3+z^3} \geq \frac{x^3+y^3+z^3}{x^4+y^4+z^4}$.

QF-112. (IMO-1987, lista longa). Prove que se x, y, z são números reais tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, então $x + y + z \leq 2 + xyz$.

QF-113. (IMO- 1967, lista longa). Prove que $\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geq (n!)^{2/n}$, n um inteiro positivo, e que a igualdade é possível somente no caso n = 1.

QF-114. (**Olimpíada de Matemática da China ocidental – 2004**). Achar todos os números reais k tais que a desigualdade $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geq k(a + b + c + d)$ seja válida para quaisquer a, b, c, d $\in [-1, +\infty)$.

QF-115. (BMO, teste de seleção, 2003). Prove que se a, b e *c* são números positivos com soma 3, então

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \leq \frac{3}{2}.$$

QF-116. (**IMO-1977, lista longa**). Avalie $S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+p)$, onde n e p são inteiros positivos.

QF-117. (**IMO-2006, lista curta**). Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Prove que

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 3.$$

NOTA (DESIGUALDADE DE SCHUR):

A **desigualdade de Schur** afirma o seguinte:

Se x, y e z são números reais positivos e n é um número inteiro diferente de 0, então vale a desigualdade:

$$x^n(x-y)(x-z)+y^n(y-x)(y-z)+z^n(z-x)(z-y)\geq 0\,.\quad (1)$$

Para provar isso podemos considerar, sem perda de generalidade, x ≥ y ≥ z. Para n > 0, temos que $x^n(x-y)(x-z) \geq y^n(x-y)(y-z)$ e $z^n(z-x)(z-y) \geq 0$. Logo,

$x^n(x-y)(x-z) - y^n(x-y)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0$, o que equivale a (1), pois

$-(x-y) = y - x$. De modo análogo, podemos mostrar para n < 0.

Um caso especial dessa desigualdade que devemos destacar é quando n = 1. Ela pode ser apresentada assim:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \text{ ou}$$

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

Lembrar da identidade $(a-b)(a-c) = a^2 - ab - ac + bc$ para obter a primeira dessas.

QF-118. (**Polônia, 2006**). Dados a, b, c reais positivos satisfazendo ab + bc + ca = 3, prove que $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9$.

QF-119. (**IMO-2005**). Sejam x, y e z números reais positivos tais que xyz ≥ 1. Prove que

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0.$$

QF-120. (**IMO-1979**). Dado que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}$, em que p e q são números naturais sem fator comum, prove que p é divisível por 1979.

QF-121. (**IMO-2008, lista curta**). Sejam a, b, c, d números reais positivos tais que abcd = 1 e a + b + c + d > a/b + b/c + c/d + d/a. Prove que a + b + c + d < b/a + c/b + d/c + a/d.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-F(3)

DRN-F105:

Descubra que se trata de uma PA de razão 105 e $a_1 = 1050$.

▶ **Resp.: (D).**

DRN-F106:

Use n = 2005 e n = 2006.

▶ **Resp.: 2007.**

DRN-F109:

Faça as substituições: $a = x + y$, $b = y + z$ e $c = z + x$, com *x, y, z* positivos. Em seguida use MA ≥ MG para chegar em $K \leq 8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$, onde K é a expressão do 1º membro da desigualdade acima.

Obs.: Esta desigualdade já foi resolvida antes por rearranjo.

DRN-110:

Use adequadamente a desigualdade $(a + b)^2 \geq 4ab$, na forma $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$, depois de adicionar os dois pares de termos correlacionados da soma indicada.

DRN-F111:

Usar desigualdade de Cauchy-Schwarz.

DRN-F112:

$2(xy + xz + yz) - 2(x + y + z)xyz + (xyz)^2 \leq 2$. Combinando essa desigualdade com $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ chega-se em $0 \leq (x + y + z - xyz)^2 \leq 4$.

DRN-F113:

Use MA ≥ MG.

DRN-F114:

Se a = b = c = d = -1, então k ≥ ¾. E se a = b = c = d = ½, então k ≤ ¾. Logo k = ¾.

Resta provar que (*) $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geq \frac{3}{4}(a + b + c + d)$, com a, b, c, d ∈ $[-1, +\infty)$.

Prove primeiro que $4x^3 + 1 \geq 3x$, x ∈ $[-1, +\infty)$. A seguir use isso para chegar em (*).

Conclua que k = ¾.

DRN-F115:

DICA:

Mostre que $a + b + c - (\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}) \leq \frac{ab+bc+ca}{2}$ e lembre-se de

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Resolução:

Seja K = $\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}$.

Então a desigualdade dada pode ser escrita assim:

$-K \leq -\frac{3}{2}$, que é equivalente a $3 - K \leq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Como $a + b + c = 3$, então isso equivale a

$$a + b + c - (\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}) \leq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Provemos (1). Verifique que

$$a - \frac{a}{b^2+1} = \frac{ab^2}{b^2+1} = \frac{b}{b^2+1}\, ab,\ b - \frac{b}{c^2+1} = \frac{bc^2}{c^2+1} = \frac{c}{c^2+1}\, bc \text{ e } c - \frac{c}{a^2+1} = \frac{ca^2}{a^2+1} = \frac{a}{a^2+1}\, ca.$$

Com isso, o primeiro membro de (1) pode ser escrito assim:

$\frac{b}{b^2+1}\, ab + \frac{c}{c^2+1}\, bc + \frac{a}{a^2+1}\, ca$. Observe que $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ se $x = 1$.

Provemos que $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$. Podemos usar, pelo menos dois caminhos.

Um deles é derivar a função real $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, para $x > 0$, e concluir que o máximo de f ocorre em $x = 1$. Observe que $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Outro caminho é usar a desigualdade MA ≥ MG.

Para isso, considere o recíproco de $\frac{x}{x^2+1}$.

Temos que

$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$. Logo $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$. Usando esse resultado, deduzimos que

$$\frac{b}{b^2+1}\, ab + \frac{c}{c^2+1}\, bc + \frac{a}{a^2+1}\, ca \leq \frac{1}{2}(ab + bc + ca). \quad (2).$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, então $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca)$.

E sendo $a + b + c = 3$, concluímos que $ab + bc + ca \leq 3$.

Combinado isso com (2) concluímos que $\frac{b}{b^2+1}\, ab + \frac{c}{c^2+1}\, bc + \frac{a}{a^2+1}\, ca \leq \frac{3}{2}$, que é equivalente a (1).

DRN-F116:

Lembrar da Relação de Stifel e deduzir que

$$k(k+1)\ldots(k+p) = (p+1)!\binom{k+p}{p+1} = (p+1)!\left[\binom{k+p+1}{p+2} - \binom{k+p}{p+2}\right].$$

▶ **Resp.:** $(p+1)!\binom{n+p+1}{p+2} = \frac{n(n+1)\ldots(n+p+1)}{p+2}$. **Obs.:** $\binom{m}{p} = 0,\ se\ m < p.$

DRN-F117:

Faça x = $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}$, y = $\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}$ e z = $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$. Segue disso que $b + c - a$ = $x^2 - (x - y)(x - z)/2$. Use agora esse resultado para chegar em $x^{-2}(x - y)(x - z) + y^{-2}(y - z)(y - x) + z^{-2}(z - x)(z - y) \geq 0$.

Aplique a desigualdade de Schur para concluir a prova.

DRN-F118:

Faça uma adaptação para uma forma em que possa se usar o caso especial da desigualdade de Schur com n = 1.

DRN-F119:

Adicione (-1) a cada uma das três parcelas dessa desigualdade e em seguida multiplique por -1 os seus dois membros. Observe que a primeira parcela toma a seguinte forma $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$

Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em cada parcela e com a ajuda da conhecida desigualdade $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, conclua a prova.

DRN-F120:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1319} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1318}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{659}\right)$$

$$= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots + \frac{1}{1319}$$

$$= \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{i} + \frac{1}{1979 - i} = \sum_{i=660}^{989} \frac{1979}{i \cdot (1979 - i)}$$

Desde que nenhum termo dessa soma continha um denominador divisível por 1979, que é um número primo, deduz-se que o p da forma irredutível p/q de S terá de ser divisível por 1979.

DRN-F121:

Considere a seguinte soma:

$$S = 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right).$$

Podemos, agora com uma pequena adaptação na forma de S aplicar a desigualdade MA ≥ MG assim:

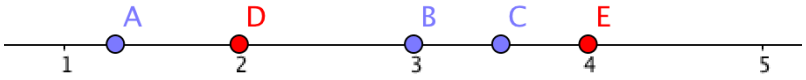
$$S = \left(2\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d}\right) + \left(2\frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{b}{a}\right) + \left(2\frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b}\right) + \left(2\frac{d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c}\right)$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^3}{bcd}} + 4\sqrt[4]{\frac{b^3}{cda}} + 4\sqrt[4]{\frac{c^3}{dab}} + 4\sqrt[4]{\frac{d^3}{abc}} = 4(a + b + c + d)$$

$$> 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right) + (a + b + c + d).$$

Disso, obtemos o resultado procurado: $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} > a + b + c + d.$

QF-122. (**JNCF**) (**Distância do Par mais próximo**). Defina $\langle t \rangle$ como a distância de $t \in R$ ao **inteiro par** mais próximo. Uma ilustração geométrica desse conceito é posta a seguir. Nela temos um segmento da reta real. Perceba que $\langle A \rangle = AD < 1$, $\langle B \rangle = BE = 1$, $\langle C \rangle = CE < 1$, $\langle D \rangle = \langle E \rangle = 0$ e $\langle A + B \rangle < 1 < \langle A \rangle + \langle B \rangle$.



A) Prove que $\langle t \rangle \leq 1$, para todo $t \in R$.

B) Prove que $\langle x + y \rangle \leq \langle x \rangle + \langle y \rangle$, para todos x, y reais.

QF-123. (IME- 2017/2018). Seja f(x) uma função definida no conjunto dos números reais, de forma que f(1) = 5 e para qualquer x pertencente aos números reais f(x + 4) ≥ f(x) + 4 e f(x +1) ≤ f(x) + 1. Se g(x) = f(x) + 2 – x, o valor de g(2017) é

A) 2.

B) 6.

C) 13.

D) 2021.

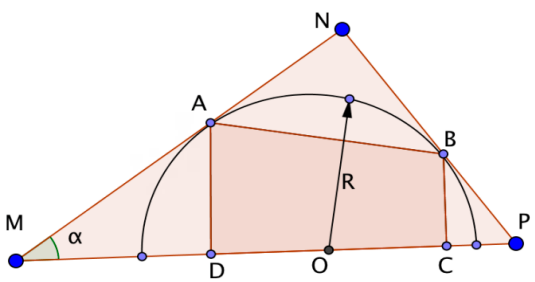
E) 2023.

QF-124. (Competição de Matemática da China, 2002). Considere a função $f(x)$ definida em **R**, satisfazendo $f(1) = 1$, e para todo x de **R**, $f(x + 5) \geq f(x) + 5$ e $f(x + 1) \leq f(x) + 1$. Se $g(x) = f(x) + 1 - x$, então determine $g(2002)$.

QF-125. Considere a figura abaixo, onde temos um triângulo retângulo MNP que tangencia um semicírculo de raio R nos pontos A e B. Calcular:

a área S do trapézio ABCD em função de R e de α;

II) o valor mínimo da razão $\frac{S}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$ em função de R e de α.



QF-126. Prove que se os números positivos a, b e c, nessa ordem, formam uma progressão aritmética, então os números $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ e $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, nessa ordem, formam uma progressão aritmética também.

QF-127. (ITA/2020) Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

A) $P = 1$ e $S = 0$.

B) $P = -1$ e $S = 1$.

C) $P = -1$ e $S = -1$.

D) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

E) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

A RELAÇÃO DE ORDEM NOS REAIS

A relação de ordem "menor do que"(<) no conjunto dos reais é governada pelas quatro regras dadas a seguir. Elas são os fundamentos para obtermos as outras que usamos frequentemente.

O-1. (**Tricotomia**). Cada par de números reais a, b satisfaz uma, e somente uma, das seguintes condições: $a < b, a = b, b < a$.

O-2. (**Transitiva**). Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

O-3. (**Multiplicação**). Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.

O-4. (**Adição**). Se $a < b$, então $a + c < b + c$.

Usando as regras acima, prove as seguintes propriedades:

A) $a < b$ se, e somente se $b - a > 0$.

B) Se $a > 0$, então $-a < 0$.

C) 1 > 0. (Prove por redução ao absurdo).

D) Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

E) Se $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.

F) Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ e $a^2 < b^2$, então $a < b$ (Use contradição e (E) para provar isso).

G) Se $a > 0$, então $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

H) $|a + b| \leq |a| + |b|$. (**Desigualdade triangular**).

I) $|a.b| = |a|.|b|$.

J) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

Há várias maneiras de se provar a desigualdade triangular. Uma mais direta, que faz uso de (F) é a seguinte:

$$(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a|.|b| + b^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Logo,usando (F), obtemos que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Duas consequências da desigualdade triangular, também relevantes, são

$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big| \text{ e } |a + b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

Para provar isso, faça $a = b + (a - b)$ e $b = a + (b - a)$ para a primeira; e $a = -b + (a + b)$ e $b = -a + (b + a)$ para a segunda.

NOTA (Supremo/Ínfimo e Máximo/Mínimo)

De um modo geral, dizemos que um conjunto A $\subset R$ é **limitado superiormente** se existe um real p tal que p ≥ x, para todo x de A. Nesse caso, p é uma **cota superior** de A. Considere o seguinte conjunto de números racionais: A = { x ∈ Q; $x^2 < 2$}. Observe que todos os números de A são menores do que 1,5. Então 1,5 é uma *cota superior* de A e A é **limitado superiormente**. Uma questão natural se apresenta: qual a *menor cota superio*r de A? Em Q não temos a menor dessas cotas. Como sabemos, a menor cota superior de A é $\sqrt{2}$, que não é racional. Denominamos de **supremo** *de* **um conjunto limitado superiormente** A $\subset R$, à menor das cotas superiores de A em R. Por outro lado, um conjunto B $\subset R$ é **limitado inferiormente** se existe um real p tal que p ≤ x, para todo x de B. Nesse caso, p é uma **cota inferior** de B. Considere o conjunto de números racionais: B = { x ∈ Q; $x^2 > 3$}. Em Q não existe a maior das cotas inferiores de B, que é $\sqrt{3}$. Denominamos de **ínfimo** de um **conjunto limitado inferiormente** B $\subset R$, à maior das cotas inferiores. Indicam-se o supremo e o ínfimo de um conjunto A $\subset R$ por sup A e inf A, respectivamente. Temos, pois, que sup A = $\sqrt{2}$ e inf B = $\sqrt{3}$.

Quando o supremo de A pertence a A, então ele é o **máximo** ou o **maior elemento** de A. E quando o ínfimo de A pertence a A, então ele é o **mínimo** ou o **menor elemento** de A. E quando um conjunto é limitado superiormente e inferiormente, então ele é chamado de **conjunto limitado**. No caso contrário, ele é denominado de **conjunto ilimitado**. São conjuntos limitados os intervalos: (a, b), [a, b), (a, b] e [a, b]. Já os intervalos $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(b, +\infty)$, $[b, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty) = R$ são conjuntos ilimitados. O intervalo aberto (a, b) não tem máximo e nem mínimo, mas tem supremo(b) e ínfimo(a), enquanto o intervalo fechado [a, b] tem máximo e

tem mínimo. Já o intervalo semi-aberto [a, b) tem mínimo e não tem máximo, enquanto (a, b] tem máximo e não tem mínimo. Em algumas questões da lista acima, o objetivo era determinar o valor máximo ou o valor mínimo de uma dada função. Como foi mostrado na resolução de alguma delas, depois de provar a desigualdade relativa a um certo valor(cota inferior ou cota superior) tivemos que mostrar que a cota era o mínimo ou o máximo do conjunto imagem da referida função. Reveja, por exemplo, as DRNs das questões QF-68 e QF-98 e QF-125. Perceba, a partir dos exemplos dados, que as duas afirmações seguintes são consequências diretas das definições de sup D e de inf D.

Se b = sup D e b $\notin$ D, então, para todo x $\in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que b - $\varepsilon < x$.

Se a = inf D e $a \notin$ D, então, para todo x $\in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que x $< a + \varepsilon$.

Um teorema relacionado com esses conceitos é o seguinte.

Teorema dos intervalos encaixados: “Dada uma sequência de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, ordenados pela inclusão na forma $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, existe, pelo menos, um número real c tal que c $\in I_n$, para todo $n \in N$.”

Prova:

Perceba que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ implica $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. Disso segue que o conjunto A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é limitado superiormente e, por consequência existe c = sup A. Mas c $\leq b_n$, para todo $n \in N$, pois cada b_n é cota superior de *A*. Assim, concluímos que c $\in I_n$, para todo $n \in N$.

NOTA (Princípio da Boa Ordenação e Princípio da Indução)

Princípio da Boa Ordenação:

Seja A $\subset$ *Z* um conjunto não vazio e limitado inferiormente. Então, A possui um menor elemento.

Esse princípio é equivalente ao **Princípio da Indução**, que pode ser enunciado como segue.

Princípio da Indução Finita

Suponha que, para cada número inteiro $n \geq n_0$, se tenha uma afirmativa sobre n, P(n), que satisfaça às seguintes propriedades:

$P(n_0)$ é verdadeira;

P(k) verdadeira => P(k + 1) verdadeira , para $k \geq n_0$.

Então, P(n) é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

Propriedade Arquimediana

Se a e b são inteiros positivos quaisquer, então existe um inteiro positivo n tal que $na \geq b$.

Prova:

Provaremos por contradição. Suponhamos que para algum par $(a\ ,\ b)$, $na < b$ para todo n inteiro positivo. Então o conjunto A = $\{b - na;\ n$ é inteiro positivo$\}$ possui apenas inteiros positivos. Pelo Princípio da Boa Ordenação, A possui um menor elemento. Seja k = $b - ma$ esse menor elemento. Disso segue que o número k' = $b - (m + 1)a$ também pertence a A, pois A contém todos os inteiros dessa forma. Mas k' = $b - ma - a < b - ma = k$, o que contraria k ser o menor elemento de A.

A propriedade arquimediana vale para a e b reais positivos. Isso significa que R é um corpo arquimediano. O conceito de corpo será dado no próximo capítulo. Um enunciado equivalente é:

O conjunto dos inteiros positivos N não é limitado superiormente em R. Isso pode ser provado por contradição. Suponhamos que N seja limitado em R. Então existe c = sup N. Disso segue que c – 1 não é cota superior de N, o que implica existir n inteiro positivo tal que c – 1 < n. Daí resulta c < n + 1, o que contraria c = sup N. Mostremos que essa proposição implica a anterior. Dados o par $(a\ ,\ b)$ de números reais positivos, temos que existe n tal que $n > \frac{b}{a}$. Disso segue $na > b$.

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Uma **sequência** $(a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, com $k \in N$, é uma correspondência que associa a cada elemento k de N um único elemento(ou objeto) a_k de um conjunto A. Cada elemento a_k de A se denomina *o* **k-ésimo termo da sequência** e cada elemento k de N se chama de **índice** do termo a_k. Às vezes, dizemos que A é o **conjunto imagem** da sequência. Quando no lugar de N colocamos {1, 2, ..., n}, então a sequência é dita **finita**. Aqui trataremos, sobretudo, de sequências de números reais. Nesse caso, A = *R.* Dizemos que uma sequência de números reais (a_k) é *crescente*, quando $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots$, e é *decrescente* quando $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ Se trocamos > por ≥, dizemos que (a_k) é *não* **crescente***;* e se trocamos < por ≤, dizemos que (a_k) é *não decrescente.* Em qualquer um desses quatro casos, dizemos que (a_k) é *monótona.* Quando o conjunto dos termos de uma sequência é limitado inferiormente, limitado superiormente, limitado ou ilimitado, então dizemos que ela é **limitada inferiormente***,* **limitada superiormente***,* **limitada** ou **ilimitada***,* respectivamente.

Interpretamos aqui o conceito de **função** *ou* **aplicação** como uma generalização do conceito de sequência, em que N pode ser substituído por outro tipo de conjunto. Disso segue que sempre podemos fazer “aproximações multifárias” com sequências quando tratamos de função. Quando dizemos que *f é* **uma função** de um conjunto D em um conjunto K, estamos afirmando que a todo elemento x de D corresponde um único elemento y de K. Usualmente indica-se y por f(x) e o denomina de **imagem** de x. O conjunto D é chamado de **domínio**(ou conjunto domínio) de f e K de **contra-domínio** de f. E o conjunto formado por todos os elementos f(x) de K é chamado de **conjunto imagem** de f.

Um conceito fundamental relacionado a uma sequência de números reais, que se descreve usando desigualdades, é o de limite de uma sequência.

Diz-se que um número real b é o **limite de uma sequência** (a_k) de números reais, quando para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural k_0 tal que $k > k_0$ implica $|a_k - b| < \varepsilon$. Comumente se indica esse limite assim: $\lim a_k = b$ ou $\lim_{k\to\infty} a_k = b$. Quando esse limite existe, se diz que a sequência **converge** para b e ela é denominada de **convergente**. Caso contrário, ela é dita **divergente**. Perceba que dessa definição se deduz que

$\lim_{k\to\infty} a_k = b \Leftrightarrow$ Dado um $\varepsilon > 0$, existe um k_0 tal que $k > k_0 \Rightarrow a_k \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Destacamos, inicialmente, quatro propriedades das sequências de números reais relacionadas com o conceito de limite:

A) O limite de uma sequência convergente é único.

B) Toda sequência convergente é limitada.

C) Toda sequência monótona limitada é convergente.

D) (Teorema de Bolzano-Weierstrass.) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Dada uma sequência (x_n), $n \in N$, chamamos de *subsequência* de (x_n) a toda sequência (x_p) formada por termos de (x_n) tais que $p \in N'$, onde N' é uma sequência(infinita) crescente de números naturais.

Exemplos: a sequência dos números pares (2, 4, 6, 8, ...) e a sequência dos múltiplos naturais de 3 (3, 6, 9, 12, 15, ...) são subsequências da sequência dos números naturais $(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots)$. Um resultado que merece destaque é o seguinte.

Teorema da subsequência monótona:

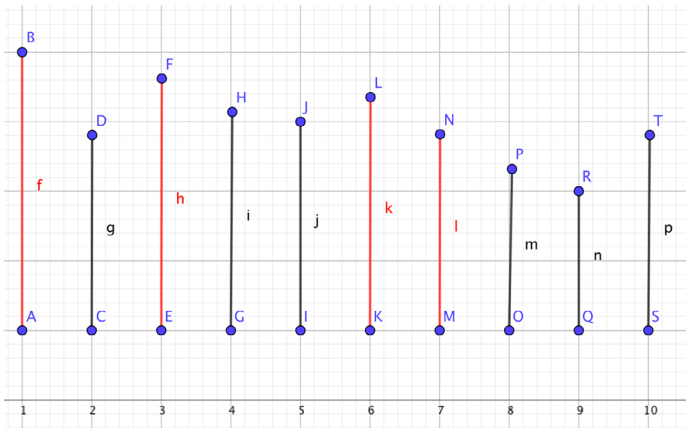
Toda sequência de números reais possui uma subsequência monótona.

Perceba que o teorema de Bolzano-Weierstrass é um corolário imediato da combinação dessa proposição com a proposição do item-c acima.

Prova do Teorema da subsequência monótona

Chamemos de termo *destacado* de uma sequência (x_n) a um termo x_k tal que $x_k \geq x_p$ para p > k. Segue dessa definição que se existirem vários termos destacados eles se ordenam em forma não crescente, isto é, $x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots$. Se o conjunto K de índices $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$ for infinito, então a subsequência (x_{k_j}) será monótona não crescente. Por outro lado, se K for finito, denotemos por k_1 o maior dos seus índices. Então x_{k_1} não é termo destacado e, por conseguinte, existe $k_2 > k_1$ tal que $x_{k_1} < x_{k_2}$. Por sua vez, x_{k_2} não é destacado; logo existe $k_3 > k_2$ tal que $x_{k_1} < x_{k_2} < x_{k_3}$. Prosseguindo assim, obtemos uma subsequência crescente (x_{k_j}), j = 1, 2, ... No caso de K ser vazio, começamos a construção da subsequência com um dos primeiros termos da sequência.

A figura a seguir ilustra parcialmente a noção de termo destacado. Os 10 primeiros termos da sequência estão representados pelos comprimentos dos segmentos verticais associados aos índices 1, 2, ...,10. Supondo que os outros segmentos da sequência tenham comprimentos iguais ou menores do que o segmento l, perceba que os segmentos f, h, k e l são termos destacados.



Um exemplo do último caso indicado na demonstração é o da sequência oscilante e ilimitada (1, - 2, 3, - 4 , 5, - 6 , ...). Ela não tem termo destacado algum. Mas tem as subsequências monótonas:(1, 3, 5 , ...), que é crescente; e (- 2, - 4, - 6, ...) que é decrescente(não crescente).

Classificação dos pontos de um subconjunto de R

Podemos classificar os pontos de um subconjunto D de R em dois tipos. Um ponto x de R ou é limite de uma sequência de pontos de $D - \{x\}$ ou não o é. No primeiro caso denominamos x de **ponto de acumulação** de D e no segundo caso de **ponto isolado** de D. Por outro lado, se x é limite de sequências de pontos de D dizemos que ele é **ponto aderente** a D. Perceba que todo ponto de acumulação de D é ponto aderente a ele. A recíproca é falsa.

E todo ponto de D é aderente a D. Comumente chama-se de **fecho** de D ao conjunto $\overline{D}$ de seus pontos aderentes. Logo $\overline{D} = D \cup D'$, em que D' indica o conjunto dos pontos de acumulação de D. Se X e Y são subconjuntos de R tais que X ⊂ Y e todo ponto de Y é aderente a X, então dizemos que X é **denso** em Y. Em outros termos, $\overline{X}$ = Y. Também se classificam os pontos de um subconjunto D de R em relação ao fecho de D em dois tipos: ponto de fronteira e ponto interior. Dizemos que x é **ponto interior** de D quando existe um r > 0 tal que $(x - r, x + r) \subset D$. O conjunto dos pontos interiores de um conjunto D é chamado de **Interior** *de D.* Se x não é ponto interior de D, mas pertence ao fecho de D, dizemos que ele é **ponto de fronteira** de D. O conjunto formado pelos pontos de fronteira de um conjunto D é denominado de **fronteira** de D. Perceba, pela definição dada, que se um conjunto D não contém intervalo algum $(a, b), a < b$, então seu interior é vazio.

Ilustremos esses conceitos com alguns exemplos.

Um intervalo aberto (a, b), com a < b, não tem pontos isolados, seu fecho é $[a, b]$, sua fronteira é $\{a, b\}$ e seu interior é ele mesmo. Perceba que (a, b) é denso em $[a, b]$. Todos os pontos do conjunto dos números inteiros Z são isolados, pois nenhum deles é limite de uma sequência de pontos de Z. Observe que Z é um conjunto infinito e ilimitado. A fronteira de Z é o próprio Z. O interior de Z é vazio. Veja que o fecho de R – Z é R. Logo R – Z é denso em R e a fronteira de R – Z é Z. O interior de R – Z é também R – Z. No próximo capítulo, compreenderemos melhor que o conjunto Q dos números racionais é denso em R, isto é, $\overline{Q} = R$. E também R – Q é denso em R. Disso segue que (a, b) ∩ Q é denso em (a, b).

Um conjunto formado apenas de pontos isolados é chamado de **conjunto discreto**. Todo conjunto finito de números reais é discreto.

Um conjunto finito de números reais pode ter um ponto de acumulação? O conjunto infinito e limitado {1, 1/2 , 1/3, ... , 1/n, ...} é discreto e tem um único ponto de acumulação, que é 0. Qual é o fecho dele? Verifique, pela definição, que se a é ponto de acumulação $\text{de } D \subset R$, então, para todo número real $\varepsilon > 0$, tem-se que $(a - \varepsilon, a+\varepsilon)$ é um conjunto infinito. Em virtude disso, todo conjunto discreto limitado de números reais, que não tem ponto de acumulação, é finito. Perceba que nessa situação, dado $x \in D$ e $\varepsilon > 0$ temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap D$ é finito.

Com essa nova nomenclatura podemos enunciar um corolário do teorema de Bolzano-Weierstrass, que é uma outra versão dele.

Ele afirma:

“Todo conjunto infinito limitado de números reais possui pelo menos um ponto de acumulação.”

Provemos esse corolário. Seja $D \subset R$ o conjunto infinito limitado de números reais, dado na hipótese. Por contradição, suponhamos que D não tenha ponto de acumulação algum. Então D é discreto, limitado e sem ponto de acumulação algum. Logo, D é finito, o que é uma contradição.

Atualmente, em virtude do desenvolvimento das tecnologias digitais, tem crescido muito a chamada Matemática Discreta. Nela se reúnem diversos ramos da Matemática tais como: Teoria dos números, combinatória, probabilidade discreta, teoria dos grupos, funções geradoras, teoria dos grafos, álgebra de Boole, etc. Há vários livros atuais sobre essa área da matemática. Citamos alguns nas referências bibliográficas. De fato, o nome Matemática Discreta tem muito a ver com o conceito de conjunto discreto e de conjunto enumerável, do qual falamos à frente, logo mais.

Propriedades dos limites de sequências

De um modo geral, é tedioso provar, pela definição de limite, que uma sequência numérica converge para um certo número. Para facilitar isso, temos algumas propriedades operacionais de limites, que mostramos a seguir.

Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então

$$I)\ lim(x_n + y_n) = a + b;$$
$$II)\ lim(x_n - y_n) = a - b;$$
$$III)\ lim(x_n . y_n) = a.b;$$
$$IV)\ \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = a/b, se\ b \neq 0.$$

Provemos a propriedade (I). Pela definição de limite de uma sequência, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existem naturais n_1 e n_2 tais que $n > n_1$ => $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2$ => $|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja k = max$\{n_1, n_2\}$. Então $n > k$ => $|x_n - a| + |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Mas $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - a|$. Logo $lim(x_n + y_n) = a + b$.

De modo análogo prova-se a propriedade (II). Agora vamos provar a (III). Sendo (y_n) convergente por hipótese, então ela é limitada, em virtude da propriedade (b). Logo existe um número real positivo M tal que $y_n \leq M$.

Isso combinado com a desigualdade triangular nos leva a

$$|(x_n y_n - ab)| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \leq M|x_n - a| + |a||y_n - b| \leq$$

$L(|x_n - a| + |y_n - b|)$, onde L = max{M, $|a|$}. Mas pela demonstração da propriedade (I), dado arbitariamente $\frac{\varepsilon}{L} > 0$, existe um índice k tal que $n > k$ => $|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{L}$, que implica L($|x_n - a| + |y_n - b|) < \varepsilon$, como desejávamos provar.

Além disso, se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n, então $\lim z_n = a$. Essa propriedade é conhecida como o **Teorema do Sanduíche**. Evidentemente vale também a desigualdade $\lim x_n \leq \lim y_n$, se $x_n \leq y_n$, para todo n.

Prova do Teorema do Sanduíche

Dado um real $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $n_1, n_2 \in N$ tais que

$$n > máx\{n_1, n_2\} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Disso se conclui que $\lim z_n = a.$

Exemplos bem conhecidos de sequências convergentes são as progressões geométricas infinitas (a_n) de razão q, com 0 < q < 1 e $a_1 > 0.$ Seu termo geral $a_n = a_1 q^{n-1}$ converge para 0. Outros exemplos são as sequências (s_n), em que s_n é a soma dos n primeiros termos de uma PG de primeiro termo 1 e razão q, 0 < q < 1. Nesse caso obtém-se que $s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ e lim $s_n = \frac{1}{1 - q}$. Provemos isso. Como lim $q^n = 0$ e lim $\frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$, então, pelas propriedades acima, obtemos:

$$\lim S_n = \lim \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}\right) = \frac{1}{1 - q} - 0 = \frac{1}{1 - q}.$$

Para completar a prova detalhada desse limite, vamos provar que lim $q^m = 0$, usando a definição acima. Considere a sequência (1, q, q^2, ...), com 0 < q < 1. Como ela é monótona(decrescente) e limitada, então é convergente. Ou seja o limite existe. Como 1/q > 1, então as potências de 1/q formam uma sequência crescente e ilimitada. Dado um $\varepsilon > 0$, existe um $m_0 \in N$, tal que $m > m_0$ implica $(1/q)^m > 1/\varepsilon$, isto é, $q^m < \varepsilon$. Logo $m > m_0$ implica $|q^m - 0| < \varepsilon$, o que equivale a lim $q^m = 0$.

SÉRIES

Uma série é um tipo especial de sequência. O exemplo dado antes de uma sequência de somas dos termos de uma PG, (s_n), ilustra bem o que é uma série. Ela é conhecida como uma **série geométrica**. Agora vamos formalizar o conceito de série. Seja (a_n) uma sequência de números reais. Construamos outra sequência (s_n), em que os termos são as somas $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... , $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. A sequência ($s_n$) é denominada de **série** e essas somas são denominadas de **somas parciais** ou **reduzidas** da série . Normalmente se representa a série por

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots .$$

A parcela a_n é denominada de **termo geral** da série. Quando existe o limite $s = \lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, então dizemos que a série é **convergente** e que o limite s é a *soma* da série. As séries convergentes possuem algumas propriedades dos somatórios. Por exemplo, se $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$ e $k\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} kb_n$, para k constante numérica. Um critério geral para perceber que uma série é divergente é verificar que $\lim a_n \neq 0$. Prove isso. Por outro lado, uma série pode ser divergente e ter $\lim a_n = 0$. Por exemplo, a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Em virtude da propriedade **"Toda sequência monótona limitada é convergente"** e da propriedade **"Toda sequência convergente é limitada"** temos o seguinte teorema de convergência de uma série:

"Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de* **termos não negativos é convergente** se, e só se, a **sequência das reduzidas** $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ **é limitada."**

Mostremos que a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ é divergente. Observe que esta série é uma série de termos positivos. Para atender o teorema citado, é suficiente mostrarmos que uma subsequência da sequência das reduzidas dela não é limitada. Consideremos, pois, a subsequência das reduzidas definida por s_k, com $k = 2^n$, n natural. Temos, pois, que

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \; s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots,$$

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = \quad 1 + n.\frac{1}{2}.$$

Disso segue que lim $s_{2^n} = +\infty$ e, por consequência, lim $s_n = +\infty$. Logo a sequência das reduzidas não é limitada, o que implica a divergência da série harmônica.

Um corolário bem conhecido desse teorema é o chamado Critério de Comparação para determinar a convergência ou não de uma série.

Critério de Comparação:

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem c > 0 e $n_0 \in N$ tais que $a_n \leq c.b_n$, para $n > n_0$, então

a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; e

a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Em muitos casos se usa esse critério comparando a série dada com uma série geométrica convergente. Isso mostra a importância das séries geométricas. Vamos ilustrar com um exemplo.

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, em que $a_n = \frac{1}{n!}$. Mostremos que ela é convergente. Verificamos, facilmente, que $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$, para $n > 2$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, com $b_n = \frac{1}{2^n}$, é a série geométrica de razão q = ½, que é convergente. Logo, pelo critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. De fato, a soma dessa série é o número e, que é a base dos logaritmos neperianos. Verifique, que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, o que implica $2 < e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3$. Mostre, usando o critério de comparação, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Reveja a QF-32 e sua DRN-F32 para perceber o uso oportuno da soma telescopante. Ainda usando o critério de comparação, deduza que as séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, são convergentes se p > 1 e divergentes se p < 1. Como a série harmônica é divergente e para todo n > 1, tem-se que $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, se p < 1, então pelo critério de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente se p < 1. Por outro lado, seja M a soma da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (2/2^p)^n$, com p > 1. Mostremos que toda reduzida s_k da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é menor do que M. Seja n tal que k ≤ $2^n - 1$. Então

$$s_k \leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) <$$

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{i=0}^{n} (2/2^p)^n < M.$$

Logo pelo critério de comparação $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge se p > 1.

Diz-se que uma série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **converge absolutamente**, ou é **absolutamente convergente**, se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é convergente. Prova-se, com alguma adequação, usando-se o critério de comparação, que toda série **absolutamente convergente** é **convergente**. Um teste de convergência relacionado com esse tipo de série é o teste de Cauchy, também decorrente do critério de comparação.

Teste de Cauchy

Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1,$ para todo $n \in N$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim\sqrt[n]{|a_n|} < 1$), a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é absolutamente convergente. E se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, então essa série é divergente.

Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, em que $a_n = (\frac{logn}{n})^n$, é convergente, pois, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{logn}{n}$ converge para 0.

Obs.*:* Um teste relacionado com esse é o **teste da razão.** Ele afirma o seguinte: *Suponha que o limite* $r = lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *exista ou seja infinito. Então a série infinita* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *de termos não nulos converge absolutamente se* $r < 1$ *e diverge se* $r > 1.$ Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tal que $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ tem r = $\lim\left(\frac{2}{n+1}\right) = 0 < 1.$ Logo ela é convergente. Mas esse teste não diz nada sobre a convergência, quando r = 1. Por exemplo, a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente, mas r = 1. Como garantir que ela é convergente? Um teste adequado é o **teste de Leibniz ou teste da série alternada,** que afirma: *Se* (a_n) *é* uma sequência monótona decrescente com $\lim a_n = 0,$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é uma série convergente. Perceba que $\lim(\frac{1}{n}) = 0,$ o que está de acordo com esse teste. Observe que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ não é absolutamente convergente. Por quê?

Uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = +\infty$ denomina-se condicionalmente convergente.

Produto de duas séries

Dadas as séries $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, definimos o *produto de Cauchy* delas pela fórmula

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}.$$

A motivação da fórmula acima é a multiplicação de polinômios, em que evidenciamos as somas dos produtos dos coeficientes dos termos de mesmo grau:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots$$

Teorema de Mertens(convergência do produto de séries)

Suponhamos que

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ seja absolutamente convergente;

(B) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$;

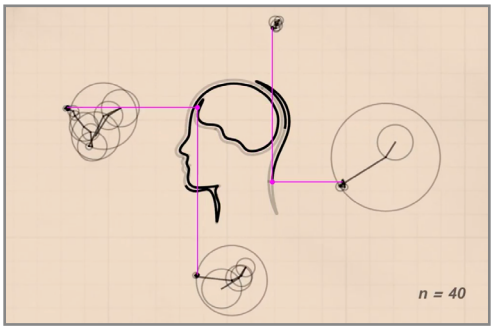
(C) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$;

(D) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, n = 0, 1, 2, 3, ...

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Prova: Vide [Lewin, 1993] ou [Rudin, 1971].

Quando os termos da série são funções ela é denominada de **série de funções**. Um tipo destacado delas são as **séries de potências**, como as séries de Taylor, que veremos no capítulo sobre polinômios. Outro tipo relevante são as **séries trigonométricas**, como as séries de Fourier, que veremos no capítulo final. Mas vale a pena já ver um vídeo bem didático da visualização das séries de Fourier. Vai ajudar na percepção da relevância atual dessas séries. O vídeo pode ser acessado no **Código QR** seguir.



Para ampliar seus conhecimentos sobre sequências e séries consulte as referências: [Edwards & Penney, 1997, vol.2], [Kaplan, 1972, Vol.II], [Lima, 2004, Vol.I] e [Rudin, 1971]. Também, para uma consulta rápida, você pode usar o Google ou o Bing.

Consulte a Wikipédia sobre as biografias de Bernard Bolzano(1781-1848) e Karl Weierstrass(1815-1897). Vale a pena conhecer um pouco da vida e da obra desses dois grandes matemáticos do século XIX. Saber um pouco das dificuldades e desafios que enfrentaram em sua época e a diversidade de suas atuações.

Conjuntos enumeráveis

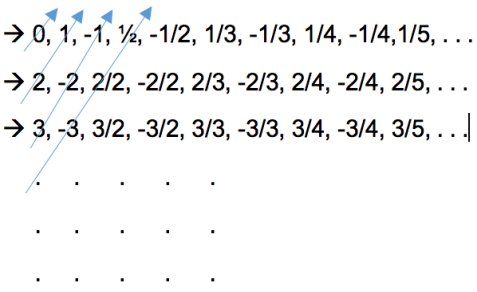
Um conjunto D é dito enumerável quando todos os seus elementos são os termos de uma sequência de termos distintos dois a dois. D pode ser finito(sequência finita) ou infinito(sequência infinita). Um resultado decorrente dessa definição é: todo subconjunto infinito X de um conjunto enumerável D é enumerável. Perceba que a sequência formada pelos termos de X é subsequência da sequência dos termos de D. Como essa sequência é formadas por termos distintos, então toda subsequência dela também é formada de termos distintos. Logo X é enumerável.

Um teorema importante sobre esse tipo de conjunto afirma: uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável. Isso pode ser expresso assim S = $\bigcup_{n=1}^{p} E_n$ ou S = $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, em que E_n é um conjunto enumerável. Vejamos alguns exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis:

A) o conjunto N dos números naturais é enumerável, pois seus elementos formam a sequência natural 1, 2, 3,...,n,...

B) Z, o conjunto dos números inteiros, também é enumerável. Eles são os termos da sequência (x_n) tal que x_n = - (n -1)/2 se n é ímpar; e x_n = n/2, se n é par. Perceba que os índices ímpares listam todos os inteiros negativos, enquanto os índices pares listam todos os inteiros não negativos.

C) Um exemplo mais sofisticado é o conjunto dos números racionais, Q. Justifiquemos esse exemplo. Considere as seguintes sequências de números racionais:



Observe que o conjunto dos termos desta lista de sequências inclui todos os elementos de Q, com repetições. Agora formemos a sequência (x_n) de todos os termos dessa lista, ordenados diagonalmente, assim:

(x_n) = (0, 2, 1, 3, -2, -1, 4, -3, 2/2, ½, ...), conforme indicam as setas diagonais sucessivas.

Nessa sequência estão todos os números racionais e somente eles, embora com repetição. Mesmo considerando as repetições como termos distintos, temos que Q é um subconjunto do conjunto dos termos listados na sequência (x_n). E como todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável, então concluímos que Q é enumerável.

Com esse mesmo método podemos provar o teorema citado no início desse tópico.

Conjuntos equipotentes

Quando existe uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos A e B, dizemos que eles são **equipotentes** ou que possuem o mesmo **cardinal**. Logo todos os conjuntos enumeráveis infinitos são equipotentes e, por conseguinte, possuem o mesmo cardinal. Uma conjectura de Cantor afirma que o conjuntos A tem cardinal menor do que o do conjunto das partes de A, P(A). Eles nunca são equipotentes. Portanto, o cardinal de N é menor do que o de P(N). Prova-se que R, o conjunto dos números reais, não é enumerável. O que se pode concluir sobre a cardinalidade de R, em virtude disso?

Três perguntas a mais:

- Uma interseção enumerável de intervalos abertos de R é sempre um intervalo aberto? Pense nos intervalos da forma (- 1/n , 1/n), em que n é natural.
- Considere o conjunto de todas as sequências cujos termos são 0 e 1. Esse conjunto é enumerável? Veja [Rudin, 1971].
- Quais diferenças relevantes podemos identificar entre os conjuntos enumeráveis Q e Z, considerando apenas a definição de conjunto enumerável e as representações desses conjuntos na reta real? Exiba, pelo menos, duas diferenças relevantes em sua resposta.

Para maiores detalhes sobre conjuntos enumeráveis veja [Rudin, 1971].

QF-128. Considere a sequência de números reais (a_n) tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} = 0$.

Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = 0$.

QF-129. Considere a sequência de Fibonacci (F_n). Prove, admitindo a existência de tal limite, que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, em que φ é a razão áurea.

NÚMEROS DE FIBONACCI E SEQUÊNCIAS DE CAUCHY:

Observe que a sequência definida por $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, em que F_n são os números de Fibonacci, não é monótona. Por isso não podemos aplicar a propriedade "toda sequência monótona limitada é convergente" para concluir que essa sequência é convergente. Há mais de um caminho para se chegar a isso. Um deles é mostrar que a referida sequência é uma **sequência de Cauchy.** E toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Uma sequência de Cauchy (a_n) se define pela seguinte propriedade: Dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_o tal que se $m > n_o$ e $n > n_o$, então $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Usando a identidade de Cassini, obtemos: $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n-1}}\right| = \frac{1}{f_n f_{n-1}}$. Isso implica que dado um $\varepsilon > 0$, existe um n_o tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, para $n > n_o$. A partir desse resultado deduzimos que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ para $m > n_o$ e $n > n_o$, usando a igualdade

$a_m - a_n = a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \ldots + a_{n+1} - a_n$ e a desigualdade triangular generalizada.

A SEQUÊNCIA DE PELL E A RAZÃO PRATEADA

Os **números de Pell** são definidos pela recorrência: $P_o = 0$, $P_1 = 1$ e

$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, para $n > 1$, n natural.

A sequência de Pell tem os seguintes primeiros termos:

(0, 1, 2 , 5, 12, 29, 70, 169, ...).

De maneira análoga ao da sequência de Fibonacci, a sequência (P_{n+1}/P_n) converge para o número $1 + \sqrt{2}$, que é chamado de **razão prateada**. Lembre-se que no caso dos números de Fibonacci a sequência (F_{n+1}/F_n) converge para a razão de ouro: $(1 + \sqrt{5})/2$.

Denomina-se de **retângulo prateado** ao retângulo que tem a propriedade: a razão entre as medidas de dois lados adjacentes é a razão prateada ou seu recíproco. Uma outra maneira de definir esse retângulo é através da proporção:

a/b = (2a + b)/a, em que a e b são as medidas de dois lados adjacentes e a > b. A partir dessa proporção se obtém o valor da razão prateada. Vejamos isso, pois. Seja S = a/b. Em função de S a proporção se transforma na equação:

S^2 - 2S - 1 = 0, que tem como raiz positiva o valor $S = 1 + \sqrt{2}$, que é a razão prateada.

Prova-se por indução finita a fórmula: $S^n = SP_{n+1} + P_n, \quad n \geq 1.$

E a partir dessa fórmula, de maneira parecida com o que fizemos com a sequência de Fibonacci, obtemos: $\lim_{x\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2}$.

Um fato interessante surge das aproximações racionais da $\sqrt{2}$ feitas pelas reduzidas(ou convergentes) da representação em frações contínuas dela, indicada por [1; 2, 2, 2,...]. As primeiras reduzidas são:

(1/1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, ...). Observe que os denominadores dessas frações são os números de Pell. Por outro lado, os numeradores são chamados de "números companheiros" dos números de Pell. Esse números em sequência correspondem à metade dos "números de Pell-Lucas", que se definem pela lei de recorrência: $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$, sendo $Q_0 = Q_1 = 2$ e $n \geq 2$.

Os primeiros números de Pell-Lucas são: (2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, ...).

Perceba que a lei de recorrência dos números de Pell-Lucas tem a mesma forma da lei de recorrência dos números de Pell, diferindo apenas na condição dada aos dois primeiros termos.

Os números de Pell-Lucas podem ser calculados pela fórmula do tipo Binet:

$Q_n = (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n$. Também podem ser calculado pelas somas binomiais do tipo:

$$Q_n = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} 2^k,\ n \geq 2.$$

Obs.: [b] é o maior inteiro que não supera b.

Para ampliar os conhecimentos consulte textos disponíveis na internet via google ou bing.

NOTA (Lema-3):

Vamos provar três desigualdades que serão importantes na compreensão de certos resultados tratados no próximo capítulo.

Lema-1: Suponha que a > 0. Então para todo número natural n vale a desigualdade

$$\frac{a^{n+1}-1}{n+1} \geq \frac{a^n-1}{n}. \quad (1)$$

Lema-2: Suponha que a > 0 e que t e x são números racionais positivos. Se t ≤ x, então vale a desigualdade $\frac{a^t-1}{t} \leq \frac{a^x-1}{x}$. (2)

Lema-3: Suponha que a > 0 e que t e x são números reais positivos. Se t ≤ x, então vale a desigualdade $\frac{a^t-1}{t} \leq \frac{a^x-1}{x}$. (3)

Prova do lema – 1

A desigualdade (1) é equivalente a $na^{n+1} - (n+1)a^n + 1 \geq 0.$ Definamos a sequência (x_n) por $x_n = na^{n+1} - (n+1)a^n + 1.$ Mostremos que $x_n \geq 0$, para todo n. Temos que $x_1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$ e que (x_n) é crescente, pois $x_{n+1} - x_n = (n+1)a^n(a-1)^2 \geq 0$.

Prova do lema – 2

Tomemos t = m/q e x = n/q, em que m, n e q são números naturais. Como t ≤ x, segue que m ≤ n. Seja $b = a^{\frac{1}{q}}.$ Então a desigualdade (2) é equivalente a $\frac{b^m-1}{m} \leq \frac{b^n-1}{n}$, que é verdadeira pelo lema – 1.

Prova do lema – 3

Escolhamos sequências (t_n) e (x_n) de números racionais tais que $0 < t_n < t$ e $x < x_n$, para todo n, e tais que $\lim t_n = t$ e $\lim x_n = x$. Então $\frac{a^t-1}{t} = \lim_{n\to\infty}(\frac{a^{t_n}-1}{t_n}) \leq \lim_{n\to\infty}(\frac{a^{x_n}-1}{x_n}) = \frac{a^x-1}{x}$.

QF-130. Prove que se as séries $\sum_{i=1}^{\infty} {a_n}^2$ e $\sum_{i=1}^{\infty} {b_n}^2$ convergem, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n$ converge absolutamente.

QF-131. (Sequências geradas por polinômios).

A) Seja (a_n) uma sequência em que a_n é dada por um polinômio P(n), de grau d ≥ 1. Prove que a sequência (Δa_n) das diferenças $a_{n+1} - a_n$ é determinada por um polinômio Q(n) de grau d – 1.

B) Prove o teorema: "Se uma sequência (a_n) é gerada por um polinômio de grau d, então $\Delta^{d+1} a_n$ é a sequência nula."

Obs.: $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n)$, $\Delta^3 a_n = \Delta(\Delta^2 a_n)$, ..., $\Delta^{d+1} a_n = \Delta(\Delta^d a_n)$.

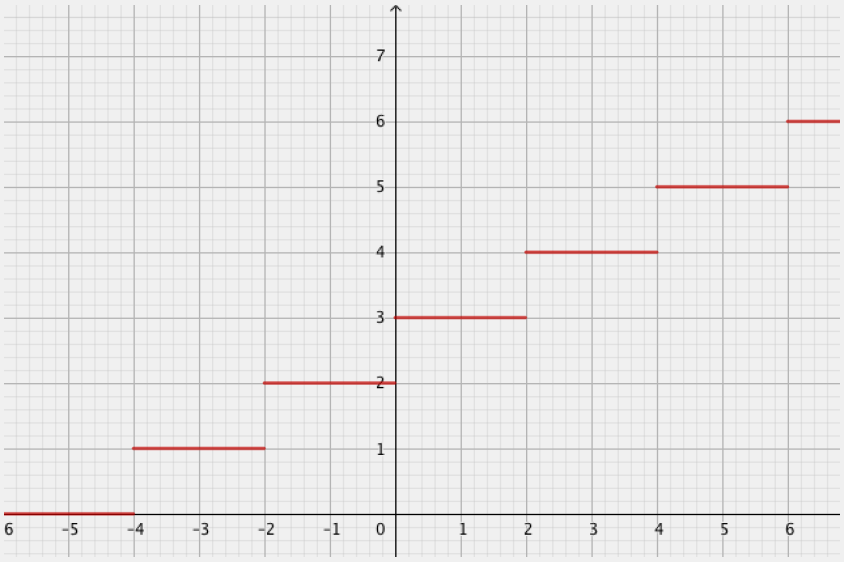
QF-132. Prove que é igual a 1 o limite de cada uma das seguintes sequências:

(b_n) tal que $b_n = \sqrt[n]{a}$ e $a > 0$ é uma constante real.

(a_n) tal que $a_n = \sqrt[n]{n}$.

NOTA (Parte inteira e parte fracionária de um número real x, [x] e {x})

Seja x um número real. Indicamos por [x] a sua parte inteira, isto é, o maior inteiro que não supera x; e por {x} a sua parte fracionária, isto é, x – [x]. Comumente, a função real f(x) = [x] é denominada de função máximo inteiro. Uma generalização dela tem a forma g(x) = [kx] + c, onde c e k são reais e k é diferente de 0. Seu gráfico tem formato de uma escada, como mostra a figura dada a seguir, obtida com o GeoGebra. No gráfico a função representada é g(x) = [x/2] + 3.



Deduz-se dessas definições que $[x] \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$, $x = [x] + \{x\}$, $0 \leq x - [x] < 1$ e $[x] \leq x < [x] + 1$. Além disso, dados x e y reais, temos que $[x] + [y] \leq [x + y]$. Para justificar essa última propriedade observe que $2 > \{x\} + \{y\} \geq 0$ e $x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = [x] + [y] + (\{x\} + \{y\})$, o que nos leva a $2 + [x] + [y] > x + y \geq [x] + [y]$. Vale também $x - 1 < [x] \leq x$.

Para ampliar o conhecimento sobre essa função consulte no **Código QR**.

QF-133. Resolva a equação [x] + [2x] = 3, sendo x um número real.

QF-134. Resolva, em R, a equação $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{6}\right]$.

QF-135. Resolva, em R, a equação x(x – 2).[x] = {x} – 1.

QF-136. Resolva, em R, a equação $x^2 - 10[x] + 9 = 0$.

Resp.: 1, 9, $\sqrt{61}$ e $\sqrt{71}$.

QF-137. Resolva, em R, a equação 7x – 4[x] = 3{x} + 8.

Resp.: 5/2.

QF-138. Prove que, para todo x real, vale a igualdade: [x] + [x + ½] = [2x].

QF-139. Resolva, em R, a equação { 2{2x} } = x.

Resp.: 0, 1/3 e 2/3.

QF-140. (IME-2008/2009). Sabe-se que $a = [a] + \{a\}, \forall a \in R$, em que $[a]$ é a parte inteira de a.

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4{,}2 \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}6 \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}, \text{ com } x, y \text{ e } z \in R$$

Determine o valor de $x - y + z$.

QF-141. (IMO- 1991). Uma sequência infinita x_0, x_1, x_2, ... de números reais é dita limitada quando existe uma constante C tal que $|x_i| \leq C$ para todo $i \geq 0$. Dado um real $a > 1$, construa uma sequência infinita limitada x_0, x_1, x_2, ... tal que $|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$, para todos *i, j* inteiros não negativos distintos.

QF-142. (JNCF). Calcule o produto de Cauchy das séries geométricas infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ e o valor da soma da série gerada por esse produto.

Justifique o método usado nessa segunda parte da questão.

QF-143. (IMO-2016, Lista curta) . Sejam a, b e c números reais positivos tais que $min\{ ab, bc, ca \} \geq 1$. Prove que $\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq (\frac{a+b+c}{3})^2 + 1$.

QF-144. (Média aritmético-geométrica). Sejam a e b números reais tais que $0 < a < b$. Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_0 = a$, $b_0 = b$ e

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ , \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \text{ n} > 0.$$

Prove que as duas sequências são convergentes e têm o mesmo limite.

Esse limite comum é chamado de Média aritmético-geométrica.

QF-145. (Korean Mathematics Competition 2001). A sequência de Fibonacci é dada por

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ (n \in N).$$

Prove que $F_{2n} = \frac{F_{2n+2}^3 + F_{2n-2}^3}{9} - 2F_{2n}^3$, para todo n ≥ 2.

QF-146. Prove que para qualquer sequência (a_n) de inteiros positivos, as partes inteiras das raízes quadradas de todos os b_n, definidos a seguir, são diferentes.

$$b_n = (a_1 + \ldots + a_n)(1/a_1 + \ldots + 1/a_n).$$

QF-147. A sequência (a_n) é definida por $a_1 = 0$, $/a_2/ = /a_1 + 1/$,... , $/a_n/ = /a_{n-1} + 1/$.

Prove que $(a_1 + \ldots + a_n)/n \geq -½$.

QF-148. Seja $k \in N$. Prove que existe um real $r > 1$, tal que k divide $[r^n]$ para todo $n \in N$.

QF-149. Considere a sequência definida por $a_n = \sqrt{1 + (1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt{1 + (1 - \frac{1}{n})^2}, n \geq 1.$

Prove que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{20}}$ é um inteiro.

QF-150. Seja k um inteiro. Prove que se $n = \sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 - 1}} + \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 - 1}} + 1$, então $n^3 - n^2$ é um inteiro.

QF-151. (ITA/2020 adaptado) A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

QF-152. (ITA/2020) A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

A) 20. **B)** 21. **C)** 22. **D)** 23. **E)** 24.

QF-153. Fatore $(a + 2b - 3c)^3 + (b + 2c - 3a)^3 + (c + 2a - 3b)^3$.

QF-154. Prove que, para todo natural $n > 1$, o número $n^4 + 4^n$ nunca é primo.

QF-155. Sejam a e b números inteiros positivos tais que $\frac{43}{197} < \frac{a}{b} < \frac{17}{77}$. Determinar o valor mínimo de b.

QF-156. (IMO-2006). Determine o menor número real M tal que a desigualdade

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

seja válida para todos os números reais a, b e c.

QF-157. Prove que se a, b, c são números de mesmo sinal e $a < b < c$, então

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0. \quad (*)$$

QF-158. Provar que se três números reais a, b e c satisfazem a relação $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, então, obrigatoriamente, dois quaisquer desses números têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários.

QF-159. Verifique a fatoração: $(x + y)^7 – (x^7 + y^7) = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$.

QF-160.(JNCF). Calcule o valor mínimo da função real definida por

$$f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+2}.$$

QF-161. Os números $x_1, x_2, ..., x_n$ formam uma progressão aritmética. Achar a razão r e o primeiro termo x_1 desta progressão sabendo que $x_1 + x_2 + ...+ x_n = a$ e $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 = b^2$.

QF-162. Prove que: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

QF-163. Calcule a soma de todas as frações irredutíveis, da forma p/72, que pertençam ao intervalo real [4, 7].

QF-164. (O número π e a sequência de Fibonacci). Prove que

$\frac{\pi}{4}$ = arc tg($\frac{1}{f_3}$) + arc tg($\frac{1}{f_5}$) + arc tg($\frac{1}{f_7}$) + ... + $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right)+\cdots$, em que f_{2k+1} são os termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci, a partir do terceiro:

2, 5, 13, 34, 89, ...

QF-165. Prove que a soma $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ é sempre um múltiplo de 3, para todo n inteiro positivo.

QF-166. Prove a seguinte propriedade: "Se o produto de $n \geq 2$ números positivos é igual a 1, então sua soma é igual ou maior do que n. Ou seja, se $x_1x_2...x_n = 1$, com todos os x_i positivos, então $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$, para $n \geq 2$."

QF-167. Usando a propriedade de QF-166 prove a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, isto é, MA ≥ MG.

QF-168. Resolva, em Z_+, a equação: (1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!.

QF-169. Prove que, para todo natural n e todos os inteiros $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ o produto $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^2-b_i^2\right)$ pode ser escrito como uma diferença de dois quadrados.

QF-170. Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2-2}$, para todo $n \geq 1$. Prove que a_n é um natural, para todo n.

QF-171. (Romanian IMO Selection Test, 1977). Seja n > 1 um inteiro. Prove que não existe número irracional a tal que $\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$ seja racional.

QF-172. Prove que, para todo n inteiro positivo, vale a seguinte desigualdade:

$$n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

QF-173. Seja sem = $a_n = 2^{2^n}+1$, *n* inteiro positivo. Demonstre que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{2^2}{a_3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{a_n}<\frac{1}{3}.$$

QF-174. (Grécia, 2008). Para x_1, x_2, ..., x_n inteiros positivos, prove que

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq x_1.x_2.\ldots.x_n\ ,$$

Em que k = max{ x_1, x_2, ..., x_n} e t = min{ x_1, x_2, ..., x_n}. Sob que condições a igualdade é válida?

QF-175. Suponhamos que os lados de um triângulo estão em progressão geométrica de razão q. Para quais valores reais de q isto é possível?

QF-176. (JNCF) Um polinônimo $p(x) = x^2 + bx + c$ tem duas raízes reais positivas. A e G, são respectivamente a média aritmética e a média geométrica dessas duas raízes.

Determine a expressão das raízes em função de A e G.

Obs.: Perceba aqui a relação entre a igualdade das raízes e a igualdade entre as médias A e G.

QF-177. (JNCF) Prove o seguinte princípio: "Se m objetos são colocados em n gavetas, com m > n, então pelo menos uma gaveta contém $\left[\frac{(m-1)}{n}\right]+1$ objetos".

Obs:. [a] é a parte inteira de a.

QF-178. Ache o valor da soma infinita S = $\frac{4}{19}+\frac{44}{19^2}+\frac{444}{19^3}+\ldots.$

QF-179. Sejam (a_n) e (b_n) duas progressões aritméticas de razões não nulas. Prove que a sequência (c_n), em que $c_n = a_n . b_n$, é uma progressão aritimética de segunda ordem.

QF-180. Seja *f* : **R** → **R** uma função quadrática. Se (a_n) é uma progressão aritmética com $a_n \in$ **R**, então prove que a sequência (b_n) , em que $b_n = f(a_n)$ é uma progressão aritimética de segunda ordem.

QF-181. Sabendo que o número D_n de permutações caóticas de n elementos é dado pela recorrência $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, para n ≥ 1, prove que $Dn = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

NOTA (Permutação caótica)

Uma permutação da sequência a_1, a_2, ...,a_n é chamada de caótica quando nenhum dos a_i se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Perceba uma relação interessante entre D_n e o número "*e*":

$\frac{1}{e} = e^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, pois $e^x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, como veremos mais à frente.

Deduza que $\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{f_k}\right)$ e $\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \le \frac{1}{2}$ se n > 2. Ou seja D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$ se n > 2. Em forma fechada: $D_n = \left[\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}\right]$.

QF-182. Considere a sequência , em que (f_k) é a sequência de Fibonacci. Prove que $3 < \lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k} < 4$.

Número 3: Aproximações surpreendentes

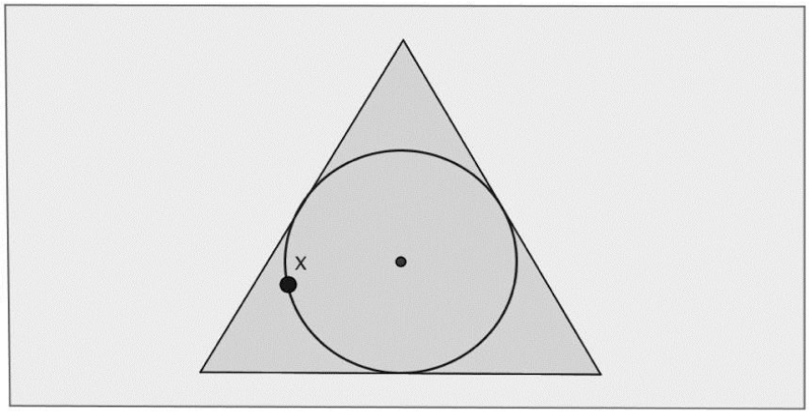
O limite referido em QF-182 é chamado de constante recíproca de Fibonacci. A prova de que esta constante é irracional foi feita em 1989 por André-Jeannin. Mais detalhes pode ser encontrado na Wikipédia usando a expressão Reciprocal Fibonacci Constant. Seu valor é menor do que 3,5. É oportuno recordar que o número π satisfaz à desigualdade 3 < π < 3,5 e o número "e" satisfaz à desigualdade 2,5 < e < 3. Ou seja, essas três constantes famosas têm como "inteiro mais próximo" o número 3. Isso implica a seguinte condição: $[\pi + \frac{1}{2}] = [e + \frac{1}{2}] = [c + \frac{1}{2}] = 3$, onde [x] indica a parte inteira de x e c indica a constante recíproca de Fibonacci. Observe ainda que $2\varphi \cong 3$ ou $[2\varphi + \frac{1}{2}] = 3$. Por outro lado, usando um pouco mais das "aproximações multifárias", pense na importância que tem: o polígono de 3 lados, o famoso triângulo, de onde brota a trigonometria e quase tudo da geometria euclidiana; o "princípio do terceiro excluído" da Lógica; o problema dos 3 corpos; o sistema de numeração de maior "capacidade" é o de base 3, como veremos no próximo capítulo. Também veremos nele o conjunto de Cantor que tem uma relação forte com a base 3. Como o número 3 tem "mistérios"! Saindo um pouco para outros campos: Deus-Trindade(Pai/Filho/Espírito) do cristianismo; Fé/Esperança/Amor(ou Caridade); Liberdade/Igualdade/Fraternidade da Revolução Francesa. Paremos por aqui nesta nota, mas sua memória/imaginação/percepção poderá continuar descobrindo, por aproximações, novos mistérios do número 3!

QF-183. Prove que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1} \cdot f_{n+1}} = 1$, em que (f_n) é a sequência de Fibonacci.

QF-184. Em uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se inscreve um retângulo de lados paralelos aos eixos cartesianos. Qual a área máxima que ele pode atingir ?

QF-185. [JNCF] Considere os 120 primeiros números naturais: 1, 2, ..., 120. É possível distribuí-los em 14 progressões geométricas?

QF-186. [JNCF] Uma bandeira foi desenhada conforme a representação mostrada na figura a seguir.



Na figura, a circunferência está inscrita no triângulo. Esse triângulo é equilátero e um de seus lados mede 4 dm. O ponto X pertence à circunferência inscrita.

Se a média quadrática das distâncias de X aos três vértices do triângulo é q, qual é o valor, em dm², de q^2 ?

A) 16/3. **B)** 6. **C)** 20/3. **D)** 10. **E)** 12.

▸ **Resp.: C)**.

QF-187. Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

QF-188. (IME-1985/1986). Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

QF-189. (Aproximações sucessivas e existência da raiz quadrada de um número real).

Considere a sequência (x_n) de números reais, definida pela lei de recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, sendo $x_1 > 0$ e $x_1^2 > a > 0$, a real. Prove que (x_n) é decrescente. Usando a propriedade “Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente” conclua que existe o limite de (x_n) quando n tende a $+\infty$. Deduza que este limite é $\sqrt{a}$. Em seguida, use esse método para calcular $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, com precisão de duas casas decimais.

QF-190. Todo subconjunto discreto de R é enumerável? Justifique sua resposta.

QF-191. [JNCF] Duas colegas de turma, Mariana e Juliana, marcaram um encontro, às 15,5 horas, na praça de alimentação de um shopping de Teresina. Elas costumam atrasar em seus encontros.

Suponha-se que cada uma delas vai chegar entre 15,5 horas e 17 horas e que se dispõe a esperar, no máximo, 20 minutos pela outra. Qual é a probabilidade delas se encontrarem?

A) 57,1% . **B)** 44,4%. **C)** 39,5%. **D)** 33,3 %. **E)** 25% .

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-F(4)

DRN-F122:

Provar que $\langle t\rangle \leq 1, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Por definição $\langle t\rangle = |t - m|$, em que m é o inteiro par mais próximo de t.

Como $|m_2 - m_1| = 2$ se m_1 e m_2 são pares sucessivos, então temos duas opções para t:

$|t - m_1| = |t - m_2| = 1$ ou

$|t - m_1| \neq |t - m_2|$.

Nesse último caso observamos que $|t - m_1| + |t - m_2| = 2$. Em virtude disso, ou $|t - m_1|$ ou $|t - m_2|$ tem valor menor do que 1. Portanto, $|t - m| \leq \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Provar que $\langle x + y\rangle \leq \langle x\rangle + \langle y\rangle, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Vamos considerar dois casos principais. Os outros casos se reduzem a esses

Supor $x \geq m_1$ e $y \geq m_2$. Então $\begin{cases} x = m_1 + \langle x\rangle \\ y = m_2 + \langle y\rangle \end{cases}$.

De (1) segue que $x + y = m_1 + m_2 + \langle x\rangle + \langle y\rangle$.

Se $\langle x\rangle + \langle y\rangle > 1$, então $\langle x\rangle + \langle y\rangle > \langle x + y\rangle$, pois $\langle x + y\rangle \leq 1$, por (a).

Se $\langle x\rangle + \langle y\rangle \leq 1$, então $|x + y - (m_1 + m_2)| \leq \langle x\rangle + \langle y\rangle \leq 1$.

Logo $\langle x + y\rangle \leq \langle x\rangle + \langle y\rangle$.

(II) Supondo $x \leq m_1$ e $y \geq m_2$, temos que (2) $\begin{cases} x = m_1 - < x > \\ y = m_2 + < y > \end{cases}$

De (2) segue que $x + y = m_1 + m_2 + \langle y\rangle - \langle x\rangle$. Como $|< y > - < x >| \leq 1$, então

$\langle x + y\rangle = |< y > - < x >|$, pois $|x + y - (m_1 + m_2)| = |< y > - < x >|$ e, em virtude da desigualdade triangular, $|< y > - < x >| \leq \langle x\rangle + \langle y\rangle$.

Logo $\langle x + y\rangle \leq \langle x\rangle + \langle y\rangle$.

NOTA:

Provar que $|< y > - < x >| \leq 1$.

Sabemos que $\begin{Bmatrix} 0 \leq < y > \leq 1 \\ 0 \leq < x > \leq 1 \end{Bmatrix}$

Segue disso que: $\begin{Bmatrix} 0 \leq < y > \leq 1 \\ -1 \leq -< x > \leq 0 \end{Bmatrix}$

Logo, adicionado membro a membro essas duas desigualdades obtemos:

$-1 \leq \langle y \rangle - \langle x \rangle \leq 1$, o que equivale a $|< y > - < x >| \leq 1$.

DRN-F123:

Depois de mostrar que f(x + 4) ≤ f(x) + 4 e concluir que f(x + 4) = f(x) + 4, deduza que g(x + 4) = g(x). Disso segue que g é periódica. Logo g(2017) = g(1 + 504(4)) = g(1) = 6.

Resp.: (B).

DRN-F124:

Usando o método da questão anterior conclua que g(x + 5) = g(x). Logo g é periódica de período 5. Portanto, $g(2002) = g(2) = f(1) + 1 - 1 = 1$.

DRN-F125:

(I) S = $\left(\frac{AD+BC}{2}\right)$. DC

DC = DO + OC = R $(sen\alpha + cos\alpha)$

AD = R$\cos\alpha$ e BC = R $sen\alpha$

Logo S = $\frac{R\,(cos\alpha + sen\alpha)}{2}$. [R $(sen\alpha + cos\alpha)$].

Logo S = $\frac{R^2}{2}$ $(cos\alpha + sen\alpha)^2$.

(II) Seja K = $\left(\frac{S}{cos\alpha + sen\alpha}\right)$.

Queremos K_{min}.

K = $\frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{sen\alpha} + \frac{1}{cos\alpha}\right)(sen\alpha + cos\alpha)^2$

Como por MA ≥ MG, temos que $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$(x + y) ≥ 2^2 = 4, então K ≥ $\frac{R^2}{2}$. 4= $2R^2$.

K_{min} ocorre quando K =$2R^2$, ou seja, quando $sen\alpha = cos\alpha$, que significa $\alpha = {}^{\pi}/_{4}$.

Logo K_{min} = $2R^2$.

DRN-F127:

Escreva a sequência na forma (b/k, b , bk) e usando as condições dadas chegue em $k^4 - k^2 - 1 = 0$. Resolvendo-a, obtenha $k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Logo $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$. ▶ **Resp.:** D.

DRN-F128:

Use MQ ≥ |MA|, teorema do sanduíche e o fato: $\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = 0$, para $s_n \geq 0$.

DRN-F130:

Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o critério de comparação.

DRN-F131:

Usar Binômio de Newton para o item A. Use o item A para resolver o item B.

DRN-F132:

Consulte a referência [Lima, 2004, vol. 1].

DRN-F133:

Estude os três casos: [x] < 1, [x] = 1 e [x] > 1.

▶ **Resp.:** S = { x; 1 ≤ x ≤ 3/2 }.

DRN-F134:

Observe que $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x$. Deduza com isso e com [y] ≤ y ≤ [y] + 1 que $0 \leq [\frac{x}{4}] + [\frac{x}{5}] < 3$. Depois obtenha que 0 ≤ x < 10. Por fim chegue nas raízes: 0, 4 e 5.

DRN-F135:

Coloque na forma $[x].(x-1)^2 = x - 1$ e perceba que x =1 é uma solução. A seguir, estude os casos (x < 0, 0 ≤ x < 1, 1 < x < 2 e x ≥ 2) na forma [x].(x – 1) = 1. Conclua que a única solução da equação dada é x = 1.

DRN-F136:

Verifique que $x \geq 1$. Faça $[x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Logo $n \geq 1$. Deduza que $x = \sqrt{10n-9}$. Use $0 \leq x - [x] < 1$ para obter as desigualdades: $n^2 - 10 + 9 \leq 0$; $n^2 - 8n + 10 > 0$.

DRN-F137:

Use $x = [x] + \{x\}$ para obter $\{x\} = \frac{8-3[x]}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} < [x] \leq \frac{8}{3}$. Logo $[x] = 2$ e $x = \frac{5}{2}$

DRN-F138:

Considere dois casos possíveis:

1°) $x = n + a$, $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a < \frac{1}{2}$;

2°) $x = n + a + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a < \frac{1}{2}$.

DRN-F139:

Perceba que $0 \leq x < 1$. Divida em 4 casos:

A) $0 \leq x < \frac{1}{4}$;

B) $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$;

C) $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$;

D) $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

DRN-F140:

Some as três equações e obtenha: $x + y + z = 4{,}9$. (*)

Como $x - y + z = x + y + z - 2y = 4{,}9 - 2y$, então precisamos encontrar o valor de y.

Some as duas primeiras equações e use (*) para obter: $[y] + \{x\} = 2{,}9$. Disso segue que $[y] = 2$ e $\{x\} = 0{,}9$.

Some as duas últimas equações e use (*) para obter: $[z] + \{y\} = 0{,}7$. Disso segue $[z] = 0$ e $\{y\} = 0{,}7$.

Logo $y = [y] + \{y\} = 2{,}7$ e, por conseguinte, $x - y + z = 4{,}9 - 5{,}4 = -0{,}5$.

DRN-F141:

Considere x_i = $k\{i\sqrt{2}\}$, k constante real positiva. Verifique que $0 \leq x_i < k$ e que $x_i - x_j = k(\{i\sqrt{2}\} - \{j\sqrt{2}\}) = k((i-j)\sqrt{2} - ([i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}]))$. Como $|i-j|^a \geq |i-j|$, basta provar para $|x_i - x_j||i-j| \geq 1$, o que equivale a provar $\left|k\left((i-j)\sqrt{2} - \left([i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}]\right)\right)\right| |i-j| \geq 1$. E aqui podemos usar o resultado (vide resolução de QF-76):

$|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{a\sqrt{2}+b}$, com $a = i - j$ (supor i > j) e $b = [i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}]$. Como x – 1 < [x] ≤ x, então $b < i\sqrt{2} - j\sqrt{2} + 1 = a\sqrt{2} + 1 \leq 3a$, pois $a > 1$. Disso segue que $k|a\sqrt{2} - b|a > \frac{ka}{a\sqrt{2}+3a} = \frac{k}{\sqrt{2}+3}$. Com isso, basta tomarmos k = $\sqrt{2}$ + 3 para definirmos a sequência procurada.

DRN-F142:

Consulte a parte final do tópico sobre Sequências e Séries. A soma da série produto é igual a ½.

DRN-F143:

Suponha, sem perda de generalidade, que $a \geq b \geq c$. Disso vem que $a \geq 1$. Faça $d = \frac{a+b+c}{3}$ e veja que $ad \geq 1$. A seguir aplique adequadamente o resultado mostrado na QF-42 para obter

$$(a^2+1)(d^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leq (d^2+1)^4.$$

DRN-F144:

Por MA ≥ MG obtemos que $a_n < b_n$, $n \geq 1$. A partir disso deduzimos três resultados: (a_n) é crescente, (b_n) é decrescente e ambas são limitadas. Mostremos, pois

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) > 0, \quad (1)$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0. \quad (2)$$

E usando MA ≥ MG deduzimos que

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_1 < b_0 . \quad (3)$$

Em virtude de (1), (2) e (3), (a_n) e (b_n) são monótonas e limitadas, o que implica serem convergentes. Falta mostrar que os limites são iguais. Sejam q =lim a_n e k = lim b_n.

De (1) obtemos 0 = lim $\sqrt{a_n b_n}$ - lim a_n, que equivale a q = q.k. Disso segue que q = k.

DRN-F145:

Temos que $F_{2n+2} - 3F_{2n} = F_{2n+1} - 2F_{2n} = F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-2}$. Disso segue

$3F_{2n} - F_{2n+2} - 2F_{2n-2} = 0,$ (1) para todo n ≥ 2.

Fazendo a = $3F_{2n}$, b = $-F_{2n+2}$ e c = $-F_{2n-2}$ na identidade

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, obtemos

$$27F_{2n}^3 - F_{2n+2}^3 - F_{2n-2}^3 - 9F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2} = 0, \text{ o que nos leva a}$$

$$-F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2} = \frac{F_{2n+2}^3+F_{2n-2}^3}{9} - 3F_{2n}^3. \quad (2)$$

Aplicando (1) duas vezes obtemos

$$F_{2n+2}F_{2n-2} - F_{2n}^2 = [3F_{2n} - F_{2n-2})F_{2n-2} - F_{2n}^2 = F_{2n}(3F_{2n-2} - F_{2n}) - F_{2n-2}^2$$

$$= F_{2n}F_{2n-4} - F_{2n-2}^2 = \cdots = F_6F_2 - F_4^2 = 8 - 9 = -1.$$

Ou seja $F_{2n+2}F_{2n-2} - F_{2n}^2 = -1.$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por -F_{2n} ,encontramos

$$-F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2} + F_{2n}^3 = F_{2n}. \quad (3)$$

Por (2) e (3) concluímos que

$$F_{2n} = \frac{F_{2n+2}^3 + F_{2n-2}^3}{9} - 2F_{2n}^3.$$

DRN-F146:

Faça $b_n = ac$ e prove que $b_{n+1} \geq b_n + 1$, usando $\frac{a}{a_{n+1}} + c.a_{n+1} \geq 2\sqrt{ac}$.

DRN-F147:

Eleve ao quadrado todas as igualdades e use soma telescopante ou o teorema da somação. Observe que $a_{k+1}^2 = (a_k + 1)^2 = a_k^2 + 2a_k + 1.$

DRN-F148:

Considere uma sequência (a_n) definida pela recorrência de segunda ordem $a_{n+2} = (2k + 1)\, a_{n+1} - k a_n$. Então sua equação característica é $x^2 - (2k + 1)x + k = 0$, que tem as raízes:

$x_1 = \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+1}}{2}$ e $x_2 = \frac{2k+1-\sqrt{4k^2+1}}{2}$. Logo $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. Fazendo $c_1 = c_2 = 1$, temos que $a_1 = 2k + 1$ e $a_2 = (2k + 1)^2 - 2k$. Observe que em virtude desses valores e da recorrência, $a_n = x_1^n + x_2^n$ é um número inteiro, para todo n natural. Por outro lado, como $2k - 1 < \sqrt{4k^2 + 1} < 2k + 1$, então $0 < x_2 < 1$. Logo $[x_1^n] = a_n - 1$. Para maior clareza dessa última igualdade, observe que x_1^n e x_2^n não são inteiros, pois $0 < x_2^n < 1$ e $x_1^n + x_2^n$ é inteiro.

Agora vamos provar, por indução, que k divide $(a_n - 1)$. De fato, $a_1 - 1 = 2k$ e $a_2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 2k - 1 = 4k^2 + 2k$, de acordo com a recorrência.

Suponhamos que k divida $(a_n - 1)$ e $(a_{n+1} - 1)$. Então $a_n - 1 = kf(k)$ ou $a_n = kf(k) + 1$ e $a_{n+1} - 1 = kg(k)$ ou $a_{n+1} = kg(k) + 1$. Isso combinado com a recorrência implica

$a_{n+2} = (2k + 1)(kg(k) + 1) - k(kf(k) + 1) = 2k(kg(k) + 1) - k(f(k) + 1) + kg(k) + 1$.

Logo $a_{n+2} - 1 = 2k(kg(k) + 1) - k(f(k) + 1) + kg(k)$, que é divisível por k.

DRN-F149:

Use conjugado para obter uma soma telescopante. Verifique que $a_n . \overline{a_n} = \frac{4}{n}$, o que nos leva a $\frac{4}{a_n} = n . a_n$. O resultado final é 7.

DRN-F150:

Escolha a, b e c de modo adequado ao uso do resultado da QF-14. Ao final, obtenha $n^3 - n^2 = 2k - 2$.

DRN-F151:

Observe que a quantidade de velas gastas segue uma PA de razão 1. Se V_T é o total de velas gastas até o n-ésimo aniversário, então $V_T = \frac{(1+n)n}{2}$.

Como todo ano um novo pacote de 12 velas é comprado, temos até o n-ésimo aniversário: $12n - \frac{(1+n)n}{2}$ velas remanescentes. Elas serão insuficientes quando $12n - \frac{(1+n)n}{2} < 0$, o que implica $n > 23$. Logo o menor inteiro que satisfaz essa condição é $n = 24$.

DRN-F152:

Na fatoração de 100! Precisamos contar a quantidade de fatores da forma (2.5). Como a quantidade de fatores 5 é menor do que a quantidade de fatores 2, então basta contarmos a quantidade de fatores 5. Os múltiplos de 5 contribuem com ao menos um fator 5 e os múltiplos de 25 = 5^2 da lista contribuem com um fator 5 a mais. Assim temos 20 fatores 5 do primeiro e 4 fatores 5 a mais do segundo. Portanto, são 24 zeros no fim de 100!

DRN-F153:

Use QF-13.

DRN-F154:

Primeiro observe que se n é par , então $n^4 + 4^n$ é par e maior do que 2. Logo não é primo. Se n é ímpar, então ponha n = 2k + 1 e use a identidade de Sophie Germain:
$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$. Observe que $4^{2k} = (2^k)^4$.

DRN-F155:

Temos que $\frac{43}{197} < \frac{a}{b} < \frac{17}{77} \implies \frac{77a}{17} < b < \frac{197a}{43}$.
Testando essa desigualdade para a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, verificamos que não existe b que a satisfaça.
E para a = 7, obtemos $b = 32$. Logo o valor mínimo de b é 32.

DRN-F156:

Fatorando o primeiro membro da desigualdade dada, obtemos:

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)| \leq M\,(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Façamos x = $(a-b)$, y = $(b-c)$, z = $(c-a)$ e s = $(a+b+c)$. Então essa desigualdade fica assim $|xyzs| \leq \frac{M}{9}\,(x^2+y^2+z^2+s^2)^2$, com a condição x + y + z = 0.
Em virtude dessa condição, sem perda de generalidade, podemos supor x, y positivos. Agora, para qualquer valor fixado x + y = 2m, seja x = y = m. Então z = - 2m e por MA ≥ MG, temos que

$$|xyzs| \leq \left|\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 zs\right| = |2m^3 s| \text{ e } (x^2+y^2+z^2+s^2)^2 \geq \left(\frac{(x+y)^2}{2}+z^2+s^2\right)^2 = (6m^2+s^2)^2$$

$$= (2m^2+2m^2+2m^2+s^2)^2 \geq \left(4\sqrt[4]{(2m^2)^3 s^2}\right)^2 = 16\sqrt{2}|2m^3 s|.$$

Sendo $16\sqrt{2}|2m^3s| \geq |2m^3s|$, então devemos obter M tal que $\frac{M16\sqrt{2}|2m^3s|}{9} \geq |2m^3s|$. Isso ocorre quando M $\geq \frac{9}{16\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Analisemos, agora, as condições de igualdade. Em virtude da MA ≥ MG devemos ter x = y e $2m^2 = s^2$ ou $2s^2 = a + c$ e $(c - a)^2 = 18b^2$. Fazendo *b* = 1, obtemos $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ e $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Com isso, podemos concluir que M = $\frac{9\sqrt{2}}{32}$ é, de fato, a menor constante satisfazendo a desigualdade, com a igualdade ocorrendo para qualquer tripla (a, b, c) proporcional a $(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}, 1, 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2})$, a menos de permutação.

DRN-F157:

Como $c^2 - a^2 = (c^2 - b^2) + (b^2 - a^2)$, então (*) é equivalente a

$$a^3 (b^2 - c^2) + b^3(c^2 - b^2) + b^3(b^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0 \ . \ (**)$$

Fatorando parcialmente (**), obtemos

$$(c^2 - b^2) (b^3 - a^3) + (b^2 - a^2)(b^3 - c^3) < 0 \ . \ (***)$$

Sendo a < b < c, temos que (c – b) (b – a) > 0. Dividindo (***) por (c – b) (b – a) obtemos: $(c + b) (b^2 + a^2 + ab) - (b + a) (b^2 + c^2 + bc) < 0$, que desenvolvendo e simplificando chegamos a $b(a^2 - c^2) + ac (a - c) < 0$ (****).

Agora, divindo (****) por a – c, que é negativo, obtemos b(a + c) + ac > 0, que é verdadeira tanto para a, b e c positivos, como para a, b e c negativos.

DRN-F158:

Multiplique a igualdade dada por $(a + b + c)abc$ e depois de algumas simplificações conclua que $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

DRN-F160:

Use MA ≥ MG.

DRN-F161:

Use $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

▶ **Resp.:** r = $\pm\sqrt{\frac{12(nb^2 - a^2)}{n^2(n^2-1)}}$; $x_1 = \frac{1}{n}\left[a - \frac{n(n-1)}{2}r\right]$.

DRN-F162:

Seja S_n a soma do 1º membro. Então $2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

A seguir faça a decomposição em duas partes de cada fração:

$$1 + (2/2 + ½) + (2/2^2 + 3/2^2) + \ldots + (\frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^{n-1}}).$$

Observe que as primeiras parcelas formam uma PG.

DRN-F163:

Calcular a soma total das frações da forma p/72 e depois subtrair a soma parcial das frações(redutíveis) de numerador par ou múltiplo de 3. Cuidado com a interseção: múltiplo de 6.

▶ **Resp.:** 1193,5 – 797,5 = 396.

DRN-F164:

Seja (f_n) a sequência de Fibonacci. Prove que:

$$\text{(I) } f_n \cdot f_{n+3} = f_{n+1} \cdot f_{n+2} + (-1)^{n+1}, \ \forall\, n > 1.$$

Dica:

Mostre que $f_n \cdot f_{n+3} - f_{n+1} \cdot f_{n+2} = f_n \cdot f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ (Cassini)

(II) $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}(\frac{1}{f_3}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_4})$. **Dica**: Lembrar de tg(a + b) e de que $f_3 = 2$ e $f_4 = 3$.

(III) $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}(\frac{1}{f_3}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_5}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_6})$.

(IV) $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}(\frac{1}{f_3}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_5}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_7}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_8})$.

(V) $\text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2n+3}}\right) + \text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2n+4}}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right), \ \forall\, n > 1.$

Dica: Use (I) e tg(a + b).

(VI) $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \left[\text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2k+1}}\right)\right] + \text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right)$.

(VII) $\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2k+1}}\right)\right]$.

Conclua assim, que

$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}(\frac{1}{f_3}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_5}) + \text{arc tg}(\frac{1}{f_7}) + \ldots + \text{arc tg}\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right) + \cdots$

DRN-F165:

Seja A(n) a soma dada. Prove por indução finita. Outro caminho é verificar que $A(n) = n(n - 1)(n + 1) + 3(n + 1)^2$.

DRN-F166:

Use o princípio da indução. E observe que se $x_{k+1} \leq 1$, então existe algum $x_i \geq 1$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor $x_k \geq 1$ e obter $(x_k - 1)(x_{k+1} - 1) \leq 0$.

DRN-F167:

Basta tomar $x_i = a_i/MG$

DRN-F168:

Use paridade.

DRN-F169:

Use indução e a identidade $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$. Lembrar de QF-17.

DRN-F170:

Verifique que (a_n) é crescente e $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 4a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0$. Disso segue que $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$, para n ≥ 1. A seguir use indução para concluir a prova.

DRN-F171:

Faça $x = \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ e obtenha que $\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}} = 1/x$. Logo, se x é racional então $x + 1/x$ é racional também. Use indução e a identidade a seguir para deduzir que $x^n + 1/x^n$ é racional e chegar em um absurdo. $x^k + \frac{1}{x^k} = (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}})(x + 1/x)(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}})$.

DRN-F172:

Observe que $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{n}) = n+1$. Use isso e MA ≥ MG para obter $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)$. Por outro lado $(1)(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Usando MA ≥ MG deduza que $n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1 > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

DRN-F173:

Faça $b_n = 2^{2^n}-1$, para n inteiro positivo, e chegue em $\frac{1}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}=\frac{1}{a_n}$. Use soma telescopante para concluir.

DRN-F174:

Use o Princípio Mínimo de Engel para chegar na desigualdade

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq x_1.x_2.\ldots.x_n .$$

Perceba que kt/n ≥ n e $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq 1$. Com isso, basta provarmos que

$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n \geq x_1.x_2.\ldots.x_n$, que é equivalente a MA ≥ MG.

Como as desigualdades intermediárias são válidas quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, então concluímos que a igualdade na desigualdade inicial só ocorre quando também $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

DRN-F175:

Usar a desigualdade triangular estrita e analisar os casos: 0 < q < 1, q = 1 e q > 1.

▶ **Resp:.** $\frac{1}{\varphi} < q < \varphi$, onde φ é a razão áurea.

DRN-F176:

▶ **Resp:.** $A \pm \sqrt{A^2-G^2}$.

DRN-F177:

Use contradição e [a] ≤ a.

Obs.: Perceba a equivalência desse princípio com o princípio das gavetas.

DRN-F178:

Faça a subtração 19S – S e conclua: S = $\frac{38}{81}$.

DRN-F182:

Observe que $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{f_k} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = 2+\frac{31}{30} > 3$. Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{f_k} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{21}+\frac{1}{34}+\frac{1}{55}+\cdots =$$

$$= (1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{34}+\frac{1}{55}\right)+\cdots$$

$$(2)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\cdots = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Logo $3 < \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{f_k} < 4$.

DRN-F183:

Use $\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_nf_{n+1}}$, para n ≥ 2, a fim de obter uma soma telescopante para $\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}$.

DRN-F184:

A ideia é usar MA ≥ MG para deduzir a área máxima do retângulo.

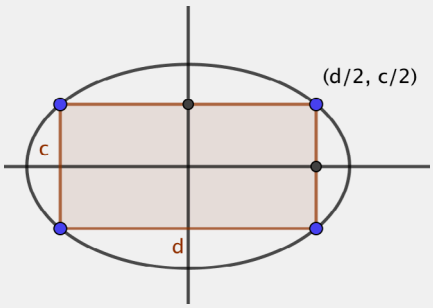
A figura a seguir ilustra a situação descrita na questão. Substituindo as coordenadas (d/2, c/2) de um dos vértices do retângulo na equação da elipse, obtemos:]

$$\frac{(\frac{d}{2})^2}{a^2}+\frac{(\frac{c}{2})^2}{b^2} = 1\,.$$

Usando MA ≥ MG , tem se $1 \geq 2\frac{d}{2a}.\frac{c}{2b} = \frac{dc}{2ab} \Rightarrow 2ab \geq dc$. Logo a área máxima do retângulo é $2ab$ e ocorre quando $bd = ac$.

Obs.: A área da elipse descrita anteriormente é A = πab. Comparando a área B = $2ab$ do retângulo de área máxima com essa da elipse, verificamos o seguinte:

A/B = $\frac{\pi}{2} \cong 1{,}6 \cong \varphi$ = razão áurea. Como essa razão áurea aparece em tantos lugares! Perceba a relevância das aproximações multifárias!



DRN-F185:

Provaremos isso usando a seguinte propriedade: três números primos não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

Como na lista 1, 2, ..., 120 existem 30 primos, então, pelo princípio das gavetas, das 14 progressões geométricas pelo menos uma tem 3 primos, o que é absurdo.

Para provar a propriedade, suponhamos que três primos a, b e c, nesta ordem, são termos de uma PG. Sem perda de generalidade, se q > 1 é a razão dessa PG, então $aq^n = b$ e $aq^m = c$.

DRN-F186:

Construamos um sistema de coordenadas cartesianas, com a origem em um dos vértices do triângulo equilátero ABC, tal que: A = (0, 0), B = (4, 0) e C = (2, $2\sqrt{3}$), em que $2\sqrt{3}$ é a altura do triângulo. Sejam d_1 = AX, d_2 = BX e d_3 = CX. Pondo X = (x, y) e denotando o centro do círculo por D e seu raio por r, deduzimos que D = (2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$), r = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e

$(x - 2)^2 + (y - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 = 4/3$, que equivale a

$x^2 + y^2 = 4x - 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}y$. (1)

Por outro lado, temos: $q^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{3}$. Usando a fórmula da distância e simplificando, obtemos:

$3q^2 = 3(x^2 + y^2) + 32 - 12x - 4\sqrt{3}y$ (2)

Por (1) e (2), deduzimos: $3q^2 = 20 <=> q^2 = 20/3$.

Portanto, a resposta certa é C.

DRN-F188:

Use Teorema Fundamental da Aritmética e redução ao absurdo.

Suponha que exista a PG, tal que $\frac{20}{12} = q^k$ e $\frac{35}{12} = q^n$. Então $(\frac{20}{12})^n = q^{kn} = (\frac{35}{12})^k$, o que implica $20^n 12^k = 35^k 12^n$. Mas isso contraria o TFA, pois o fator 7 só existe no segundo membro.

DRN-F189:

Primeiramente, verificamos que os termos de (x_n) são positivos, pois $x_1 > 0$ => $x_2 > 0$ => ... => $x_n > 0$. Para provarmos que (x_n) é decrescente, precisamos mostrar que $x_{n+1} - x_n < 0$, para n ≥ 1. Provaremos por indução.Temos, pois, que $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) - x_1 = \frac{a}{2x_1} - \frac{x_1}{2}$.

Seja $A_1 = \frac{a}{2x_1} - \frac{x_1}{2}$. Então $x_1 . A_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2}$.

Como $a < x_1^2$, temos que $x_1 . A_1 < 0$. Logo A < 0, o que implica $x_2 < x_1$. Também, temos que $x_2^2 - a = \left(\frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}\right)^2 - a = \frac{\left(x_1 - \frac{a}{x_1}\right)^2}{4} > 0$. Logo $x_2^2 > a$.

Agora vamos para o passo indutivo. Suponhamos que $x_n^2 > a$, então devemos mostrar que $x_{n+1} < x_n$ e $x_{n+1}^2 > a$. Temos que $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{x_n}{2}$.

Seja $A_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{x_n}{2}$.

Então $x_n . A_n = \frac{a}{2} - \frac{x_n^2}{2}$. Como $a < x_n^2$, temos que $x_n . A_n < 0$. Logo A_n < 0, o que implica $x_{n+1} < x_n$.

Por outro lado, $x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}\right)^2 - a = \frac{\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2}{4} > 0$. Logo $x_n^2 > a$.

Assim, concluímos que (x_n) é decrescente e limitada e pela propriedade citada no enunciado ela é convergente. Ou seja, existe o lim x_n. E em virtude de $x_n^2 > a > 0$, esse limite é um k > 0. Calculemos esse limite.

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Leftrightarrow k = \frac{k}{2} + \frac{a}{2k} \Longrightarrow 2k^2 = k^2 + a \Longrightarrow k^2 = a \Longrightarrow k = \sqrt{a}$, pois $x_n > 0$.

Portanto, todo número real positivo tem uma raiz quadrada positiva.

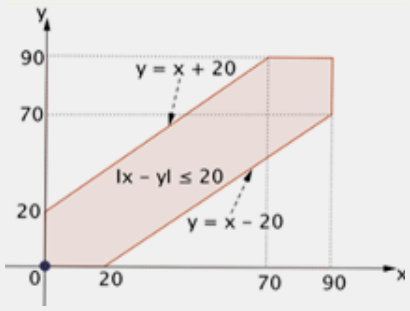
Para $\sqrt{2}$ escolha $x_1 = 1{,}5$ e obtenha $x_2 = 0{,}75 + \frac{2}{3} = 1{,}4166$ ... Logo 1,41 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com precisão de duas casas decimais. E para $\sqrt{3}$ escolha $x_1 = 2$, para obter $x_2 = 1{,}75$ e $x_3 = 0{,}875 + \frac{3}{3{,}5} \cong 1{,}732$. Logo 1, 73 é uma aproximação de $\sqrt{3}$ com precisão de duas casas decimais.

DRN-F190:

Seja D um subconjunto discreto de R. Seja E ⊂ D um subconjunto enumerável denso em D. Dado qualquer $x \in D$, temos que $x \in \bar{E} = E \cup E'$. Mas D é discreto, logo $x \notin E'$. Disso segue que $x \in E$. Portanto, D ⊂ E e, por consequência, sendo E ⊂ D, concluímos que $D = E$.

DRN-F191:

Pondo o tempo em minutos, o universo de possibilidades é o **quadrado 90 x 90** do plano xy, onde:



x → tempo de Mariana

y → tempo de Juliana

E a região favorável?

É a faixa desse quadrado descrita por

$|x - y| \leq 20$.

$|x - y| \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq x - y \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq x - y$ e $x - y \leq 20$

$\Leftrightarrow$ $y \leq x + 20$ e $y \geq x - 20$

$\Leftrightarrow$ $x - 20 \leq y \leq x + 20$.

E como podemos calcular a probabilidade? → $P = \frac{Área\ da\ faixa}{Área\ do\ quadrado}$

Área da faixa 90 x 90 – 2(70 x 70)/2 = 8100 – 4900 = 3200

Logo $P = \frac{3200}{8100} = \frac{32}{81} \cong 39{,}5\%$.

Probabilidade geométrica e Medida de conjunto

O problema resolvido anteriormente usou o conceito de probabilidade geométrica, que significa a razão entre as áreas de duas regiões, em que a primeira delas(região favorável) está contida na segunda(região possível). Trata-se, pois de uma probabilidade contínua. Lembre-se que a probabilidade discreta se define pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis.

Agora considere uma variante do problema: em vez de duas colegas, suponha que sejam três. Qual o Universo ou Espaço Amostral desse novo problema? Qual é a região favorável? Qual é a probalidade das três se encontrarem? Esta questão será apresentada no capítulo V, com dica bem detalhada para ser resolvida. Aqui, por enquanto, interessa perceber que as coisas começam a ficar mais complexas quando se tenta usar um método análogo ao que foi usado anteriormente. É claro que a interpretação deve ser feita em termos de figuras espaciais e de volume. Mas a descrição da "região favorável" por três desigualdades modulares dentro do cubo de aresta 90, tem suas dificuldades. Agora, ampliando para quatro colegas, mantendo os outros dados da questão, como poderia

ser interpretado geometricamente? E se ampliasse para 10 colegas? Percebe-se logo que o modo "bem geométrico" como foi resolvido a questão inicial para 2 colegas, não tem mais condição de se aplicar para essas últimas duas situações. Tais situações mais complexas revelam a necessidade de se conhecer novos métodos de se medir volumes(áreas), bem como de esclarecer melhor o que significa probabilidade de um modo geral.

Geralmente, denominamos de Espaço Amostral de um experimento aleatório ao Universo U dos resultados(eventos) possíveis. Na linguagem dos conjuntos, cada evento é um subconjunto do espaço amostral U, que é não vazio. E a probalidade associada a U é uma função P que tem características especiais. Seu domínio é uma família Ω de subconjuntos(partes) de U, que satisfaz às seguintes condições:

I) $\emptyset$ e U pertencem a Ω;

II) se $E \in \Omega$, então seu complementar $E^c = U - E$ pertence a Ω;

III) se (E_k) é uma sequência de elementos(eventos) de Ω, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Omega$.

E a cada elemento E(evento) de Ω, essa função P associa um número real $P(E) \in [0, 1]$ tal que

$P(E) \geq 0$, para todo $E \in \Omega$;

$P(U) = 1$;

Se (E_k) é uma sequência de eventos, disjuntos dois a dois, então $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$.

Decorre dessa definição várias propriedades bem conhecidas, entre elas:

A) $P(\emptyset) = 0$; **B)** $P(E^c) = 1 - P(E)$; e **C)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$.

Esta última pode ser justificada assim:

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ e $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ =>

$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(B - A) + 2P(A \cap B)$ =>

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A \cup B)$.

Observe que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Omega$ é uma união enumerável de conjuntos disjuntos. Vimos antes o experimento de lançar um dado "normal" sobre uma mesa e observar o número da face superior dele. De acordo com o modelo definido acima, temos: o Espaço Amostral é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; o domínio Ω da função de probabilidade é formado pelos 64(=2^6) subconjuntos de U; a função de probabilidade é definida por P(E) = n(E)/n(U); veja alguns eventos e suas probabilidades: P({1,3,6}) = ½, P({1, 5}) = 1/3 e P(U – {1,5}) = 2/3. É fácil verificar que o domínio Ω descrito satisfaz às três propriedades i, ii, e iii citadas na definição e que a função P : Ω ➔ [0, 1] tal que P(E) = n(E)/n(U), satisfaz às condições 1), 2) e 3).

No caso da probabilidade geométrica, vista na questão, temos que cada evento é identificado com um subconjunto de uma dada região do plano(ou do espaço), que tem uma certa área(ou volume). E assim podemos calcular a probabilidade pelo quociente das áreas ou dos volumes respectivos, sendo a área(volume) do evento dividida pela área(volume) do espaço amostral. Ou seja, P(E) = a(E)/a(U). No caso específico da questão dada, temos: U = [0, 90] X [0, 90]. Percebemos aqui uma situação mais complexa do que no caso de probabilidade discreta. Precisamos medir área ou volume de uma certa região do plano ou do espaço para poder medir a probabilidade geométrica de um evento.

Tal situação nos provoca uma indagação: o que há de comum entre áreas, volumes e probabilidades? Há um padrão comum entre eles? A resposta é sim.

Medida de conjunto

Vamos agora, formular de modo mais preciso, o padrão geral do que entendemos por medida, seguindo o modelo da função(medida) de probabilidade.

Uma família de subconjuntos de um conjunto U é denominada de σ-álgebra quando satisfaz às seguintes condições:

$\emptyset$ e U pertencem a Ω;

se E $\in \Omega$, então seu complementar E^c = U – E pertence a Ω;

se (E_k) é uma sequência de subconjuntos de Ω, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Omega$.

Seja **K** uma **σ-álgebra** de um conjunto U. Denominamos de **medida** toda função μ de K em $R^+ \cup \{+\infty\}$ tal que

I) $\mu(\emptyset) = 0$;

II) μ (E) ≥ 0, para todo E $\in K$;

III) Se (E_n) é qualquer sequência de subconjuntos disjuntos de U, com $E_n \in$ K, então $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Quando admitimos que o valor da medida é finito, então a denominamos de medida finita.

Um exemplo bem simples de medida que usamos em nosso cotidiano é a de contagem em N(conjunto dos naturais). Seja U o conjunto das partes(E) de N. A medida de contagem μ(E) é definida assim:

→ μ(E) = números de elementos de E, se E é um subconjunto finito de N; e

→ μ(E) = $+\infty$ se E for um subconjunto infinito de N.

Essa medida, sem dúvida, é a mais antiga e mais popular da humanidade. E ela nunca esteve tão atual. Afinal de contas, na era digital, em que quase tudo é reduzido ou adaptado à matemática discreta, nunca se usou tanto a medida de contagem e suas "aproximações multifárias". Por isso, com razoável aproximação, podemos dizer que a medida de contagem é a medida mais usada pela humanidade ao longo de toda a sua história.

Um conjunto U dotado de uma **σ-álgebra** $\boldsymbol{L}$ de subconjuntos de U e de uma medida μ é denominado de **Espaço de Medida**. Um espaço amostral dotado de uma função de probabilidade é um exemplo típico de Espaço de Medida.

Agora vamos descrever a medida(comprimento) na reta real R. Ela serve de modelo para as outras medidas análogas: área no plano e volume no Espaço. E assim nos aproximamos mais da compreensão de probabilidade geométrica. Nos próximos capítulos acrescentaremos mais informações sobre medidas de áreas e volumes, continuando nossa narrativa iniciada nesse tópico.

Suponhamos que L é uma σ-álgebra de subconjuntos X de R em que definimos uma medida(comprimento) μ com as duas propriedades seguintes.

P1. Se X é um intervalo, limitado e não degenerado, aberto, fechado ou semiaberto, então μ(X) = b – a, onde a e b são os extremos do intervalo.

P2. Se X não satisfaz à P1, então μ(X) = inf $\mu\{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$, em que os E_n são intervalos abertos(ou fechados) disjuntos(ou quase disjuntos) e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ representa a união de qualquer sequência de E_n, que seja uma cobertura(enumerável) de X, isto é, X $\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Dizemos que dois conjuntos são **quase disjuntos**, quando seus interiores tem interseção vazia. Por exemplo, [2, 3] e [3, 6] são quase disjuntos, pois seus interiores (2, 3) e (3, 6) têm interseção vazia: (2, 3) ∩ (3, 6) = ∅. Perceba que intervalos abertos disjuntos são também quase disjuntos.

Perceba que essa medida estende a medida usual de comprimento para uma família enorme de subconjuntos X de R, que são todos aqueles que podem ser aproximados arbitrariamente por uma união enumerável de intervalos abertos ou de intervalos fechados quase disjuntos. Por outro lado, todo conjunto aberto A de R é uma união enumerável de intervalos abertos não degenerados. Isso decorre, basicamente, de duas coisas: Q é enumerável e denso em R; todo ponto de A é ponto in-

terior. Logo todo conjunto aberto é mensurável, isto é, pertence a L. Como o complementar de um fechado é um aberto, então todo conjunto fechado também pertence a L. Verifique que μ(A ∪ B) = μ (A) + μ (B) – μ (A ∩ B), onde A e B são subconjuntos mensuráveis.. Essa medida é comumente chamada de medida de Lebesgue.

Um subconjunto D de R tem medida nula quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma união enumerável $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ de intervalos abertos E_n tais que D ⊂ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \varepsilon$.

Uma consequência disso, quase imediata, é que um conjunto enumerável qualquer de números reais tem medida nula. Provemos que essa proposição é verdadeira. Seja E = $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de números reais. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, consideremos a sequência (E_n) de intervalos $E_n = \{ x \in R;\ a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < x < a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \}$. Temos que E ⊂ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\mu(E_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ e que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, o que conclui a prova. Uma consequência dessa proposição e da definição de medida na reta real é que todo intervalo aberto (a, b) de R, com a < b, é um conjunto não enumerável. Logo R é não enumerável.

Portanto, de um modo geral, quando “medimos algo”, usamos, ainda que implicitamente, uma **σ-álgebra** de um conjunto U e uma função μ, com as características de medida, descritas anteriormente. Se a curiosidade de aprender mais(ou de revisar) sobre isso for grande, consulte [Bartle, 1995] ou a Wikipédia.

Obs.: Usamos o termo **família** para generalizar o conceito de sequência. Em uma sequência os termos têm índices em N ou em I_n = {1, 2, 3, … } ⊂ N; e numa família os termos têm índices em um conjunto enumerável ou não enumerável, como R ou um intervalo (a, b), com a < b. Por exemplo, o conjunto das partes de N não é enumerável. Desse modo, é adequado dizermos “a família de subconjuntos de N”. É claro, que toda sequência de subconjuntos de N é uma família de subconjuntos de N. Às vezes falamos em família de certos objetos independente de alguma “ordem” entre eles. Observe que usamos o termo família no texto acima, com esse sentido.

QF-192. (Soma de Conjuntos). Prove que a soma algébrica de dois subconjuntos K_1 e K_2 de R^n, que é definida por $K_1 + K_2$ = { x + y ; x ∈ K_1 e y ∈ K_2 }, é um conjunto convexo, quando K_1 e K_2 são convexos. Esboce a figura representativa, no plano cartesiano, de $K_1 + K_2$, sendo

$K_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $K_2 = \{(y_1, y_2) \in R^2;\ 2 \leq y_1 \leq 3 \text{ e } 0 \leq y_2 \leq 1\}$.

O CONJUNTO $\mathbb{Q}$ COMO UMA APROXIMAÇÃO DO CONJUNTO $\mathbb{R}$

Como vimos antes, temos definida em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{Q}$ também, uma relação de ordem(<). Com isso foi possível definirmos o limite de uma sequência de números(racionais ou reais). Por outro lado, a propriedade das sequências de Cauchy é tão importante que serve para construir o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a partir do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Podemos considerar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como o conjunto formado por todos os números racionais e limites de todas as sequências de Cauchy de números racionais. Isso implica que todo número irracional é limite de uma sequência de Cauchy de números racionais. É claro que todo número racional *q* é também limite de uma sequência de Cauchy de números racionais, pois, para n natural, a sequência (q + 1/n) converge para q. Por outro lado, uma sequência de Cauchy de números irracionais pode convergir para um irracional ou para um racional, pois basta ver que se *d* é irracional, então, para *n* natural, a sequência (*d/n*) converge para 0, enquanto a sequência (*d + 1/n*) converge para *d.* Em suma, toda sequência de Cauchy de números reais converge em *R.* Por isso Q é denso em R e R é o fecho de Q.

De maneira mais precisa, considera-se como um número real a classe(de equivalência) de sequências de Cauchy de números racionais que têm o mesmo limite.

Reveja o método das aproximações sucessivas mostrado em QF-189. Nele vimos que toda sequência (x_n) de números reais, definida pela lei de recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, sendo $x_1 > 0$ e $x_1^2 > a > 0$, a real, tem limite igual a $\sqrt{a}$. Se $a = 2$, então podemos tomar $x_1 = 1{,}5$ e com a lei de recorrência construir uma sequência (x_n) formada exclusivamente de números racionais que converge para $\sqrt{2}$, que não é racional. Essa sequência é uma sequência de Cauchy de números racionais que não tem limite em $\mathbb{Q}$.

Uma maneira mais próxima da realidade cotidiana do Ensino Básico pode ser colocada como segue. Considere os números reais como todos os números que têm representação decimal. Dessa forma teremos que os racionais são aqueles que têm representação decimal finita ou infinita e periódica; e os irracionais serão aqueles que têm representação decimal infinita e não periódica.

Provemos aqui que “todo racional positivo na forma irredutível a/b tem uma representação decimal finita ou infinita periódica.” Pelo algoritmo de Euclides temos que $a = bq_0 + r_0$, com $r_0 < b$; $10r_0 = bq_1 + r_1$, com $r_1 < b$; ... tal que $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots$. Olhemos agora para sequência dos restos $(r_k) = (r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, em que $r_k < b$ para todo k natural. Se $r_k = 0$, para algum k, então a representação decimal é finita. Se nenhum r_k é nulo, então, pelo princípio das gavetas, depois de b – 1 divisões ocorrerá repetição. Suponhamos que $r_k = r_{k+d}$ para $d > 0$ e $k + d < b$. Ao dividirmos $10r_{k+d}$ e $10r_k$ por b

obtemos o mesmo quociente e o mesmo resto, isto é, $q_{k+1} = q_{k+d+1}$ e $r_{k+1} = r_{k+d+1}$. Repetindo esse procedimento obtemos $q_{k+2} = q_{k+d+2}$ e $r_{k+2} = r_{k+d+2}$. E assim por diante, o que conclui a prova. A recíproca do teorema que terminamos de provar é verdadeira. Basta ver que a parte periódica tem a forma de uma série geométrica de razão $1/10^p$, onde p é o número de algarismos da dízima periódica. Logo se A é o primeiro termo dessa série, então sua soma é $A/(1 – 1/10^p)$ que é um número racional. Visualizando a série: $\frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{n+p}} + \cdots$. Observe que A tem a forma $m/10^n$, onde m é um inteiro positivo que tem p algarismos.

Com essa compreensão fica fácil construirmos certos tipos de números irracionais. Por exemplo, os números descritos a seguir, têm uma lei de formação intuitiva comum que impede a formação de dízima periódica. Logo, todos eles são irracionais.

Mas observe que cada um deles é limite de uma sequência de Cauchy de números racionais.

3,202002000200002...

(3,2; 3,202; 3,202002; 3,20200220002, ...) .

15,7171171117111117...

(15,7; 15,717; 15,717117; 15,7171171117; ...) .

124,13221322213222213...

(124,13; 124,132213; 124,13221322213; ...) .

Em virtude da propriedade “toda sequência de Cauchy de números reais tem limite real” dizemos que $\mathbb{R}$ é completo e que a reta real é a representação geométrica de $\mathbb{R}$ e chamamos os números reais de pontos dessa reta. A reta real expressa uma correspondência biunívoca ordenada entre os pontos da reta e os números reais. Uma maneira equivalente de dizer que $\mathbb{R}$ é completo se enuncia assim: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio, limitado superiormente, tem supremo em $\mathbb{R}$. Comumente, este enunciado é denominado de Axioma da completude de $\mathbb{R}$. Noutras palavras, $\mathbb{R}$ **é um corpo ordenado completo**. E o que é um corpo?

CORPO

Um conjunto não vazio K é um **corpo** se nele temos definidas uma adição e uma multiplicação que satisfazem, para quaisquer elementos a,b,c ∈ K:

Propriedades da adição:

I) Associativa: (a + b) + c = a + (b + c);

II) Comutativa: a + b = b + a;

III) Existe um elemento neutro: que será denotado por 0 e é tal que a + 0 = a;

IV) Existem simétricos ou inversos aditivos: o inverso aditivo de a é x ∈ K tal que a + x = 0 (x é denotado por −a, ou seja, −a ∈ K e a + (−a) = 0).

Propriedades da multiplicação:

V) Associativa: (a·b)·c = a·(b·c);

VI) Comutativa: a·b = b·a;

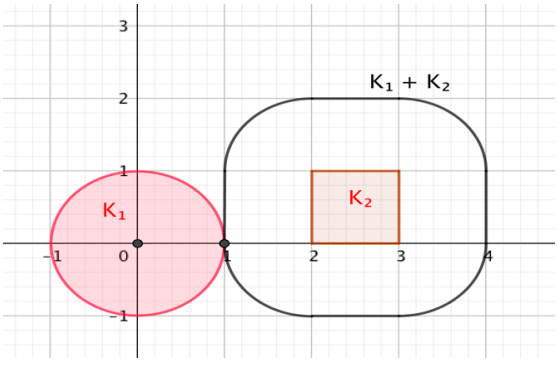
VII) Existe um elemento unidade, denotado por 1 e é tal que 1 · a = a;

VIII) Distributiva da multiplicação com relação à adição: a·(b + c) = a·b + a·c.

IX) Existe o inverso multiplicativo y ∈ K de todo a $\neq 0$, tal que a·y = 1, que é denotado por y = a^{-1} = 1/a ∈ K.

Perceba que tanto o $\mathbb{Q}$(racionais), quanto o $\mathbb{R}$(reais) têm estrutura de corpo. E ambos são ordenados, porque possuem as propriedades de ordem(≤), mostradas no capítulo anterior. Já o $\mathbb{Z}$ (inteiros) não tem a estrutura de corpo, pois não possui a propriedade IX. Podemos dizer que $\mathbb{Z}$ é “quase” um corpo. Na verdade, ele tem uma estrutura de **anel** de integridade, que é uma estrutura algébrica que se “aproxima” muito da de um corpo. No capítulo sobre Polinômios, trataremos disso melhor.

DRN-F192: Sejam $x, y \in K_1 + K_2$. Temos que $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, com $x_1, y_1 \in K_1$ e $x_2, y_2 \in K_2$. Devemos provar que $\lambda x + (1-\lambda)y = w \in K_1 + K_2$, Mas $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 + \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 = w_1 + w_2$, o que conclui a prova, pois K_1 e K_2 são convexos.



NOTA (Representação por fração contínua)

Um fato interessante que tem aproximação com o que falamos anteriormente, é a representação de um número real por fração contínua. Sabe-se que todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita e todo número irracional pode ser representado por uma fração contínua infinita. Embora esse tipo de representação não goze da unicidade, a separação em duas classes disjuntas(finitas e infinitas) é admirável. Algumas questões colocadas à frente ilustram algumas aplicações das frações contínuas. O capítulo 15 da referência [Burton, 2016] tem uma boa introdução sobre as frações contínuas. Mas na Web há bastante coisa para se consultar. Por exemplo, na Wikipédia.

Importância da sequência em Matemática

Gostaria de chamar a atenção para a presença do conceito de sequência nessa representação por fração contínua dos números irracionais. Cada número irracional é limite de uma sequência de números racionais. Isso reforça a importância fundamental que o conceito de sequência e de modo especial, de limite de uma sequência, merece ter na construção unificadora da Matemática. Quer na Matemática Discreta, quer na Matemática Contínua é central o conceito de sequência. Mais uma razão para compreendermos o conceito de função como uma generalização do conceito de sequência e, consequentemente, considerarmos o conceito de sequência como um embrião gerador de uma visão sistêmica integrada de grande parte da Matemática. Neste texto, fizemos esforços para justificar essa visão.

QUIZZES PARA RECORDAR O CAPÍTULO I

1) Descreva, para n termos, as desigualdades entre as médias aritmética, quadrática, geométrica e harmônica. Demonstre as desigualdades MA $\geq$ MG e MQ $\geq$ MA.

2) Descreva a desigualdade do rearranjo para n termos. Qual o ponto principal da sua demonstração? Como se prova a desigualdade MA $\geq$ MG a partir da desigualdade do rearranjo?

3) Descreva o Princípio Mínimo de Engel e prove-o.

4) Complete cada uma das desigualdades seguintes:

A) $x^2 + y^2 + z^2 \geq \ldots$

B) $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq \ldots$, a, b e c positivos.

C) $|x + y + z| \leq \ldots$

5) Se (F_n) é a sequência de Fibonacci, então complete:

A) $\lim (F_{n+1}/F_n) = \ldots$

B) $F_n = \ldots$

C) $\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \ldots$

6) Qual a diferença entre máximo e supremo de um conjunto de números reais? O que significa conjunto limitado?

7) O que significa uma Progressão Aritmética de segunda ordem? E uma Progressão Aritmético-geométrica?

8) Complete as fatorações:

A) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \ldots$

B) $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = \ldots$

9) Descreva a desigualdade de Cauchy-Schwarz para n termos.

10) Mostre como se obtém a desigualdade de Cauchy-Schwarz a partir do Princípio mínimo de Engel.

11) O que caracteriza uma sequência de Cauchy? Que relação, segundo o presente texto, esse tipo de sequência tem com a sequência de Fibonacci?

12) Descreva a fórmula geral de uma soma telescopante(Teorema da Somação) e as principais propriedades dos somatórios.

13) Apresente as fórmulas de definição das médias MQ, MA e MH usando o somatório.

14) Explique a relação entre média ponderada e valor esperado.

15) Passe para o sistema de numeração de base 6 o número $(5432)_8$.

16) Cite três propriedades da função real f(x) = [x]. Esboce o gráfico da função $f(x) = [x]^2$ no intervalo fechado [-4, 4].

17) Defina o limite de uma sequência (x_n) e cite suas principais propriedades.

18) Exiba um exemplo de sequência que não tem “termo destacado”.

19) O que afirma o teorema de Bolzano-Weierstrass? Que passagem da demonstração desse teorema você achou mais “interessante” ?

20) Prove a desigualdade MQ $\geq$ MA usando a desigualdade de Tchebyschev.

21) Prove que, para todo natural n e todos os inteiros a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, o produto $\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 - b_i^2)$ pode ser escrito como uma diferença de dois quadrados.

22) Como você explicaria para um amigo “leigo no assunto” que o conjunto dos números racionais é enumerável e que R é não enumerável?

23) O que é uma série? Cite um critério de convergência de uma série. Por que a série harmónica é divergente?

24) Para calcular a probabilidade de um evento realizamos um tipo de medida. De forma breve, descreva as características principais dessa medida e dê um exemplo ilustrativo.

25) Usando o conceito de conjunto de medida nula mostre que o conjunto dos números reais é não enumerável.

CAPÍTULO II

EXPOENTES, LOGARITMOS E APROXIMAÇÕES

POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL E LOGARITMO

Com a construção apresentada dos números reais a partir nos números racionais, podemos falar de forma mais compreensiva da potência a^x, com $a > 0$ e x real. Ela será entendida, para o caso de x ser irracional, como o limite da sequência de Cauchy de potências com expoentes racionais crescentes

$(a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}, \dots)$, em que lim r_k = x. Ou seja, $a^x = a^{\lim r_k} = \lim a^{r_k}$.

Para maior clareza, lembramos que, por definição, uma potência de expoente racional $a^{p/q}$ significa $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. A partir dessa definição e das propriedades análogas das potências de expoentes inteiros se verificam as propriedades:

$$a^{r_1}.a^{r_2} = a^{r_1+r_2};\ (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2} \text{ e } a^{r_1}b^{r_1} = (ab)^{r_1}\ .$$

Além disso, a função $f(x) = a^x$, com $a > 1$, para x racional, é crescente. Mostremos, pois. Se x < y, podemos escrever x = k/n e y = m/n, com n > 0, k < m e m, n e k inteiros. Logo

$$f(x) = a^x = a^{k/n} = (a^{1/n})^k < (a^{1/n})^m = a^{m/n} = f(y).$$

E no caso de $0 < a < 1$ verifica-se que $f(x) = a^x$ é decrescente.

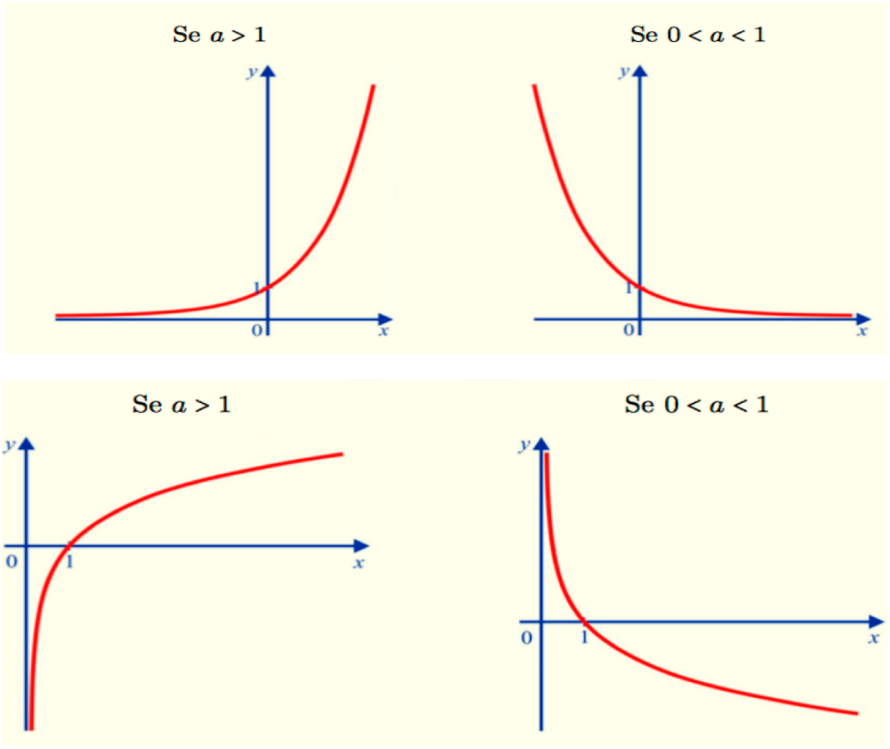
Portanto, a função $f(x) = a^x$ é sempre monótona(crescente ou decrescente) para todo x racional. E com as propriedades operacionais dos limites de sequências, vistas antes, podemos estender essa propriedade para o caso geral de expoentes reais.

Por fim, devemos colocar que no caso de $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos o expoente real da potência $a^x = b$ como o *Logaritmo de b na base* a e o indicamos por $\log_a b$. Ou seja, para todo x real temos que

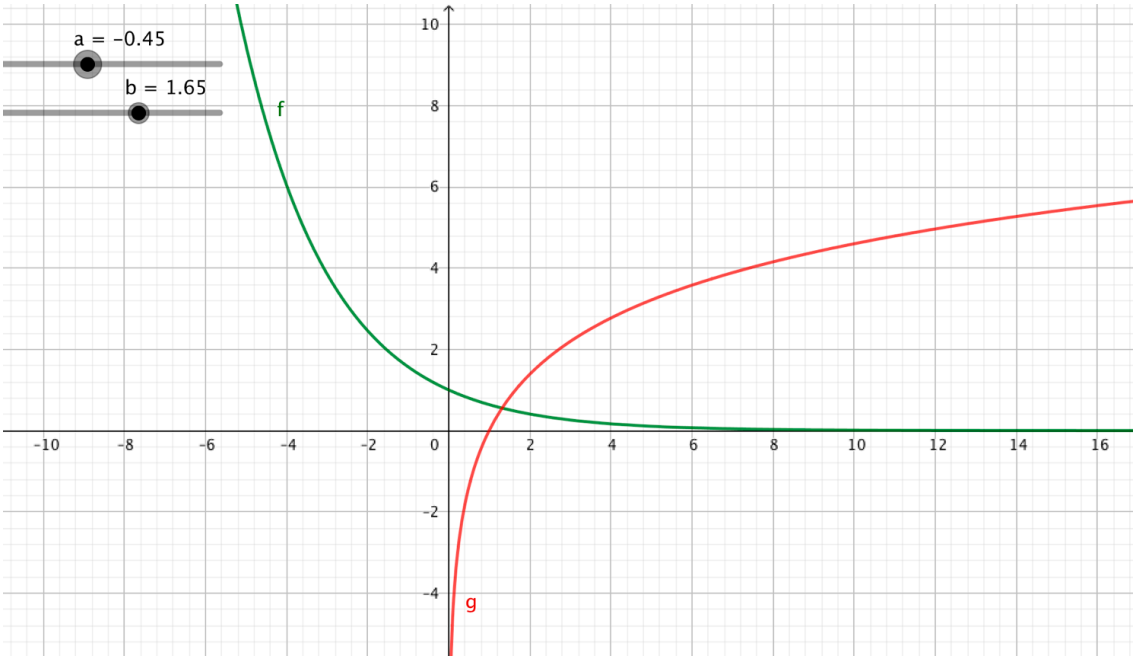
$$a^x = b,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \Leftrightarrow x = \log_a b\ .$$

A partir dessas definições obtemos as propriedades operacionais conhecidas das potências e dos logaritmos. E na linguagem das funções definimos a **função logarítmica de base** $a > 0$ e $a \neq 1$ como a inversa da **função exponencial** $f : R \to R^+$; $f(x) = a^x$. A seguir ilustramos os dois tipos básicos de gráficos dessas funções. Os gráficos expressam, além da monotonicidade(crescente ou decrescente), mais uma propriedade dessas funções: são *funções contínuas* em todos os pontos de seus domínios. Mas o que significa dizer que uma função é contínua? Discorremos sobre isso mais à frente.

Gráficos de f(x) = a^x e g(x) = $\log_a x$



Para obter uma visualização dinâmica dos gráficos dessas funções, podemos usar o Geogebra como ilustra a figura a seguir. Através do controle de deslizamento “a” visualizamos uma família de funções exponenciais e uma família de funções logarítmicas. Observe que as funções foram colocada nas formas: f(x) = e^{ax} e g(x) = *ln(x)/ln(b).*



CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO REAL

Dizemos que uma função real *f:* $D \subset R \to R$, *é* **contínua** em um dado ponto $a \in D$, quando *lim f(x$_n$) = f(*a*)* para toda sequência de pontos *x$_n$* $\in D$ *com lim x$_n$* = a. Se *f* é contínua em cada ponto de um subconjunto A de seu domínio D, então dizemos que *f* é uma **função contínua** em A. Se $a \in D$ é um *ponto isolado* então *f* é contínua em a . No caso de D ser um conjunto discreto como N ou Z, também dizemos que *f* é contínua. Dizer que *f* é contínua em $a \in D$, com *L = f(a)*, equivale a afirmar isto:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $x \in D, x \in (a - \varepsilon', a + \varepsilon') \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Perceba que o ε' está associado ao limite a da sequência (x_n) de pontos no domínio D e o ε está associado ao limite L da sequência ($f(x_n)$) de pontos no conjunto imagem de f.

De maneira análoga, dizemos que a **função f tem limite L** quando $x \to a$, indicando por $L = \lim_{x \to a} f(x)$, quando a é ponto de acumulação de *D e lim f(x$_n$) = L* para toda sequência de pontos *x$_n$* $\in D - \{a\}$, *com lim x$_n$* = a. Essa definição pode ser colocada assim:

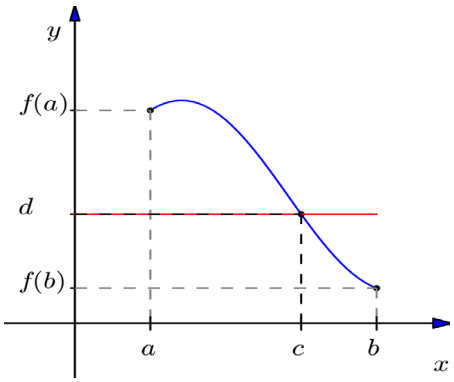
$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $x \in D - \{a\}, x \in (a - \varepsilon', a + \varepsilon') \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Observe que na definição de limite de uma função em $a \in D$ há duas condições que não são exigidas para a continuidade de *f* em a: o ponto a deve ser ponto de acumulação de D e ele não precisa pertencer a D. Assim, o limite da função pode existir em um ponto a e a função não ser definida em a. Por isso, não tem sentido falar de limite de uma função em um ponto isolado. Perceba que é preciso existir a sequência de pontos *x$_n$* $\in D - \{a\}$. No caso da continuidade, não há problema, pois os pontos x_n da sequência pertencem a D.

Decorre dessa definição que os limites de funções reais têm propriedades operacionais análogas às dos limites de sequências de números reais. Além disso, se $L = \lim_{x \to a} f(x)$, $M = \lim_{x \to a} g(x)$ e g(L) = M, então $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\,(\lim_{x \to a} f(x))$ = g(L) = M.

Portanto, *a soma(f + g), o produto(f.g), quociente(f/g), quando bem definido, g* $\neq 0$ *e a composta de funções contínuas são funções contínuas também.* Disso, segue que são contínuas as funções potências reais $f(x) = ax^n$, bem como a soma delas, que são as conhecidas funções polinomiais, que estudaremos posteriormente no capítulo 5.

Uma característica importante de uma função real contínua f, definida em um intervalo fechado $[a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$, é que ela assume todos os valores intermediários entre $f(a)$ e $f(b)$, quando x varia entre a e b. Esta característica ou propriedade é conhecida pelo nome de **Teorema do Valor Intermediário.** A figura a seguir ilustra esse teorema.



Teorema do valor intermediário

Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua tal que $f(a)<y_0<f(b)$. Então existe um ponto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=y_0$.

Prova:

Consideremos o conjunto A = $\{x\in[a,b];\ f(x)<y_0\}$. Então $a\in A$ e b é uma cota superior de A. Logo A é um subconjunto não vazio e limitado de $[a,b]\subset R$ e, por conseguinte, tem um supremo. Seja c = sup A. Como sup$[a,b]$ = b e A $\subset[a,b]$, então $c\in[a,b]$. Por hipótese, f é contínua em $[a,b]$, o que implica ser contínua em c. Segue disso que dada uma sequência (x_n) em A tal que $\lim_{n\to\infty}x_n=c$, temos que a sequência $f(x_n)$ tem limite igual a $f(c)$. Mas $f(x_n)<y_0$ e $f(x_n)<y_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)\le y_0$. Logo $f(c)\le y_0$. Por outro lado, $c\le b$ e $f(b)>y_0$. Então $c<b$. Pela continuidade de f em c, podemos escolher uma sequência (t_n) em (c,b) tal que $\lim_{n\to\infty}t_n=c$ e $\lim_{n\to\infty}f(t_n)=f(c)$, com $f(t_n)>y_0$. Disso segue que $f(c)\ge y_0$. Assim, sendo $f(c)\le y_0$ e $f(c)\ge y_0$, concluímos que $f(c)=y_0$.

Um Corolário do Teorema do Valor Intermediário é o seguinte: “Toda função *f,* contínua e injetiva num intervalo A, é crescente ou decrescente.” Sua prova pode ser feita por contradição.

NOTA(Conjuntos compactos em R)

Dizemos que um conjunto D $\subset R$ é **compacto** quando toda sequência de pontos em D possui uma subsequência que converge para um ponto de D. Uma consequência imediata dessa definição é que todo compacto é limitado. Perceba que toda sequência de pontos em D é limitada, pois as ilimitadas não têm subsequência convergente. Um exemplo de conjunto compacto é um intervalo fechado L = [a, b] de R. Ele é um conjunto limitado, o que implica toda sequência (x_n) em L ser limitada. Mas toda sequência limitada de números reais tem uma subsequência convergente (x_p). E como sup(L) = b e inf(L) = a, então o limite de qualquer subsequência convergente (x_p)

pertence a L. Portanto, L = [a, b] é compacto.

Um conjunto $D \subset R$ é **fechado** *em R* quando toda sequência de pontos de D que converge *em R* tem limite em *D*. Vale a proposição: "O fecho de todo conjunto de números reais é fechado." Prove isso. Por outro lado, um $D \subset R$ é aberto em *R* quando seu complementar *R – D* é fechado em *R*. Observe que todo intervalo fechado de R é um conjunto fechado em R, assim como todo intervalo aberto é um conjunto aberto em R. O R todo é fechado, pois toda sequência convergente de pontos dele tem limite nele. Logo o seu complementar, $\emptyset$, é aberto. Mas isso implica que R também é aberto, o que , por sua vez, implica que $\emptyset$ é fechado. Portanto, R e $\emptyset$ são fechados e abertos simultaneamente.

Observe que *o* conjunto compacto é uma generalização do intervalo limitado e fechado *[a, b]*. De fato, todo conjunto compacto $D \subset R$ além de ser limitado é também fechado, pois toda sequência de pontos de D que converge *em R* tem limite em *D*. E em consequência disso tem máximo e mínimo.

E outra propriedade relevante é que toda função contínua $f: [a,b] \to R$ *tem* **valor máximo** *e* **valor mínimo**. Esse teorema, comumente, é chamado de **teorema de Weierstrass**.

Teorema de Weierstrass

Seja $f: [a,b] \to R$ uma função contínua. Então f é limitada e tem valor máximo e valor mínimo.

Prova:

Devemos provar que o conjunto K $\subset R$ das imagens de f é compacto, isto é, que toda sequência (y_n) de pontos de K tem uma subsequência que converge em K. Como $f: [a,b] \to$ K é sobrejetiva, então podemos escolher uma sequência (x_n) em $[a,b]$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $[a,b]$ é compacto, então existe uma subsequência (z_m) de (x_n) que tem limite z em $[a,b]$. Mas f é contínua em $[a,b]$, logo $f(z)$ é limite da sequência $f(z_m)$ em K. Concluímos, assim que K é compacto e por conseguinte, tem máximo e mínimo.

Dizemos que uma função $f: D \subset R \to$ R é **uniformemente contínua** *em D*, quando para todo par de sequências (x_n) e (y_n) em *D* com $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, tem-se $\lim_{n\to\infty}|f(y_n) - f(x_n)| = 0$.

Esse conceito tem uma estreita ligação com o último teorema, pois se D é compacto, então f é uniformemente contínua. Perceba que se isso não fosse verdade, então existiriam duas sequências (x_n) e (y_n) em D e um $\varepsilon > 0$ tais que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, para todo n natural.

Mas sendo D compacto, a sequência (x_n) tem limite $a \in D$ e, por conseguinte, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, já que $y_n = x_n + (y_n - x_n)$. E como a função f é contínua em a, temos que $\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = f(a) - f(a) = 0$, o que contradiz a condição $\lim_{n\to\infty}|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, para todo n natural.

Para maiores detalhes e aprofundamento acerca desses pontos, veja as referências [Lima, 2004] e [Lewin, 1993] ou consulte a Wikipédia.

CONJUNTO DE CANTOR

Existe subconjunto de R, não enumerável, que tem medida nula? A resposta é sim. Um exemplo bem conhecido é o conjunto de Cantor. Provaremos que ele tem medida nula.

O **conjunto de Cantor K** é um subconjunto fechado do intervalo [0, 1], definido por K = [0, 1] - D, em que D é a união enumerável $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ de conjuntos abertos disjuntos de [0, 1], obtidos por uma regra de recorrência descrita assim: $E_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, que é o "terço médio" aberto de [0, 1]; $E_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, que é a união dos terços médios abertos dos dois intervalos fechados de [0, 1] - E_1; ...; E_n é a união dos terços médios abertos dos intervalos fechados de [0, 1] - E_{n-1}, para $n \geq 2$, com medida comum igual a $\frac{1}{3^n}$. A figura a seguir, copiada da Wikimedia Commons, indica as seis primeiras etapas dessa lei de recorrência. Geometricamente, essa recorrência consiste em se retirar o terço médio aberto do intervalo [0, 1], depois, sucessivamente, retirar o terço médio aberto de cada um dos intervalos fechados remanescentes da etapa anterior. O conjunto de Cantor será formado por todos os pontos não retirados de [0, 1].

As medidas dos E_n formam uma progressão geométrica infinita (1/3, 2/9, 4/27, 8/81,..., $\frac{2^{n-1}}{3^n}$, ...) de razão 2/3. Portanto, a medida de D é igual à soma da série geométrica

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots, \text{ que é igual a } S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

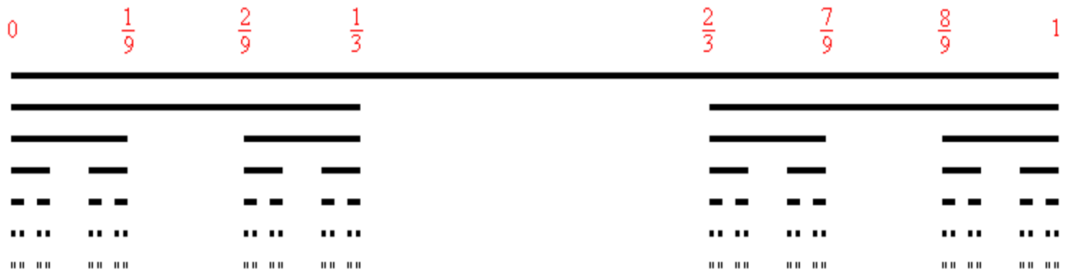
Mas como a medida do intervalo [0, 1] é 1, então a medida de K é 0, ou seja K é um conjunto de medida nula. Esse resultado implica que *K não* contém intervalos(não degenerados). Disso segue que K tem interior vazio. Repitamos, com outras palavras, o conjunto de Cantor tem interior vazio.

O conjunto K' dos pontos extremos dos intervalos que formam D é um subconjunto de K com característica singular. K' é um conjunto enumerável, sem pontos isolados. Todos os pontos de K' são pontos de acumulação! Observe que qualquer ponto b de K', obtido em alguma etapa da recorrência, continua no extremo de algum intervalo fechado da etapa seguinte. Como os comprimentos dos intervalos fechados sucessivos $[a_n, b]$ tendem a 0, então b é limite de uma sequência de pontos a_n de K'. Outras perguntas surgem: existem outros pontos de K? Eles são isolados? Prova-se que todo ponto de K é ponto de acumulação e que ele é não enumerável. Diante desses resultados, contemplemos com mais vagar o conjunto de Cantor para fazermos algumas digressões.

Perceba que esse conjunto é equipotente a R, mesmo tendo interior vazio. Existe, pois, uma bijeção entre os pontos de K e os pontos de R. Ou seja, há uma espécie de imagem fotográfica, com um certo grau de resolução, do conjunto dos números reais no conjunto de Cantor. Agora, lembremos dos fractais da fronteira do conjunto de Mandelbrot. Se fizermos uma comparação, concluiremos que o conjunto de Cantor é uma imagem/aproximação fractal de R. Pense assim: fazemos um "zoom" no intervalo [0, 1] de R para visualizar uma "imagem esquelética" de R escondida em [0, 1]. E daí, no plano R^2, podemos imaginar o quanto se pode gerar de fractais, com grande diversidade. É claro que ao fazermos isso estaremos, de fato, tratando o R como um espaço de medida(com a medida de Lebesgue) ou espaço métrico(com a métrica usual euclidiana). Dentro de K tem também uma imagem fractal de Q, de Z, do conjunto dos números algébricos reais, do conjunto dos números transcendentes, de R – Q, etc. Essas aproximações fazem parte do que chamamos de "Aproximações Multifárias". Precisamos fazer mais digressões, em linguagens mais informais, que incluam, pedagogicamente, essas aproximações. Elas motivam novas compreensões, novas sínteses, também novas pesquisas(lembrar do Programa Langlands em Princeton, vide [Frankel, 2015]), que posteriormente poderão ser colocadas em linguagens mais formais. Enfim, elas motivam o avanço do conhecimento com mais rapidez e profundidade. Precisamos reconhecer a "pobreza da linguagem formal" como motivadora da criatividade humana.

É preciso tocar a sensibilidade dos humanos com a beleza da Matemática mediada pelas aproximações mais intuitivas construídas a partir de exemplos da realidade mais perceptível. Afinal de contas, o conjunto de Cantor surge de algo bem palpável: dividir um segmento de reta em três partes de mesmo comprimento e excluir o do meio sem os extremos. Não há grau de abstração em Matemática que não tenha sido mediado por uma sucessão de percepções de uma realidade con-

creta. Afinal, o teorema de Pitágoras do triângulo retângulo, com algumas mediações, toma a forma de teorema de Pitágora em um Espaço de Hilbert de dimensão infinita, como o L_2. Coisa parecida poderíamos afirmar sobre a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade triangular. E não esqueçamos o quanto as reflexões sobre os experimentos físicos(mentais, virtuais ou laboratoriais) influenciaram o desenvolvimento da Matemática. Para mais informações sobre o conjunto de Cantor consulte [Lima, 2004, Vol 1] ou mesmo a Web.



Acesse o Código QR

Georg Cantor é considerado o pai da teoria dos conjuntos. Um pouco de sua história você pode encontrar na Wikipédia.

QL-1. (IME-1992/1993). Considere uma função L : $Q^+ \to Q$ que satisfaz:

1. L é crescente, isto é, para quaisquer 0 < x < y tem-se L(x) < L(y).

2. L(x.y) = L(x) + L(y) para quaisquer x, y > 0.

Mostre que:

A) L(1) = 0.

B) L(1/x) = - L(x) para todo x > 0.

C) L(x/y) = L(x) – L(y) para quaisquer x, y > 0.

D) L(x^n) = n L(x) para todo x > 0 e natural n.

E) L($\sqrt[n]{x}$) = $1/n$ L(x) para todo x > 0 e natural n.

F) L(x) < 0 < L(y) sempre que 0 < x < 1 < y.

QL-2. (IME-1995/1996). Considerando log 2 = a e log 3 = b, encontre, em função de a e b, o logaritmo do número $\sqrt[5]{11{,}25}$ no sistema de base 15.

QL-3. (ITA-1992). O domínio da função f(x) = $\log_{2x^2-3x+1}(3x^2-5x+2)$ é:

A) $(-\infty,0) \cup (0,1/2) \cup (1,3/2) \cup (3/2,+\infty)$.

B) $(-\infty, 1/2) \cup (1,5/2) \cup (5/2,+\infty)$.

C) $(-\infty, 1/2) \cup (1/2,2/3) \cup (1,3/2) \cup (3/2,+\infty)$.

D) $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

E) n.d.a.

▶ **Resp.: (A).**

QL-4. (IME-1987/1988). Para que valores de x a função f(x) = $|x|^{\frac{1}{lnx^4}}.lnx^2$ assume o valor $e^{1/4}$.

Obs.: ln denota logaritmo neperiano.

▶ **Resp.: x =** $\pm\sqrt{e}$

QL-5. (IME-1984/1985). Determine o valor de *b* tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$, em que p = $b^{(t+1)2^t}$.

QL-6. (ITA-2003). Considere a função

$$f = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1 \ .$$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 4.

E) 6.

QL-7. (ITA-1993). O conjunto solução da inequação $\log_x[(1-x)x] < \log_x[(1+x)x^2]$ é dado por:

A) 1 < x < 3/2. **B)** 0 < x < 1. **C)** $0 < x < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D)** $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **E)** $0 < x < \sqrt{2} - 1$.

▶ **Resp.: (E)**

QL-8. (ITA-1994). Sejam x e y números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema: $x^y = \frac{1}{y^2}$ e $\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(\frac{1}{\sqrt{x}})$. Então o conjunto {x, y} está contido no intervalo:

A) [2, 5]. **B)**]0, 4[. **C)** [-1, 2]. **D)** [4, 8]. **E)** $[5, +\infty[$.

▶ **Resp.: (B).**

QL-9. (ITA-1994). Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Se a soma de seus termos é igual a $13a + 12$ e x é um número real positivo diferente de 1, tal que

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2},$$ então x é igual a:

A) 3^3. **B)** 2^3. **C)** $(5/2)^2$. **D)** $(5/2)^{3/2}$. **E)** $(2/5)^2$.

QL-10. (ITA-1995). Se x é um número real positivo, com $x \neq 1$ e $x \neq 1/3$, satisfazendo $\frac{2+\log_3 x}{\log_{x+2} x} - \frac{\log_x (x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x (x+2)$ então x pertence ao intervalo *I*, em que

A) I = (0, 1/9).

B) I = (0, 1/3).

C) I = (1/2, 1).

D) I = (1, 3/2).

E) I = (3/2, 2).

QL-11. Demonstrar que se $xy < z^2$, então $\log_z^x < \log_y^z$, em que $x > 1$, $y > 1$ e $z > 1$.

QL-12. (IME-1996/1997). Resolva o sistema a seguir:

$$x^y = y^x$$

$$y = ax,$$

em que $a \neq 1$ e $a > 0$.

▶ **Resp.:** $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ e $y = a^{\frac{a}{a-1}}$.

QL-13. (IME-1997/1998 – adaptado). Determine os valores de x que satisfaçam a inequação:

$$27^{2x} - \frac{4}{9} \cdot 27^x + 27^{-1} > 0.$$

QL-14. (IME-2000/2001). Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Dado o sistema a seguir, determine os valores de x e y.

$$a^x . b^{1/y} = \sqrt{ab}$$

$$2\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \text{Log}_{\sqrt{ab}} .$$

▶ **Resp.:** x = ½ e y = 2.

QL-15. (ITA-2003). Considere uma função f: R → R não constante e tal que

f(x + y) = f(x)f(y), $\forall\, x, y \in R$.
f(x + y) = f(x)f(y), $\forall\, x, y \in R$.

I - $f(x) > 0,\ x \in R$;

II - $f(nx) = [f(x)]_3,\ \forall\, x \in R,\ \forall\, n \in N_*$;

III - f e par.

É(são) verdadeira(s)

A) apenas I e II. **B)** apenas II e III. **C)** apenas I e III.

D) todas. **E)** nenhuma.

QL-16. (Korean Mathematics Competition 2000). Achar todos os números x que satisfazem a equação

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1.$$

QL-17. (Romenia 1983). Seja $0 < a < 1$. Resolva $x^{a^x} = a^{x^a}$ para x > 0.

QL-18. (Romenia 1984). Achar o mínimo de $\log_{x_1}(x_2 - \frac{1}{4}) + \log_{x_2}(x_3 - \frac{1}{4}) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$ em que x_1, x_2, ... , x_n são números do intervalo (1/4, 1).

QL-19. (Universidade Lomonosov de Moscou – 1996). Resolver a equação

$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$ para todo valor possível de a.

QL-20. (Universidade Lomonosov de Moscou – 1998). Achar os valores de a para os quais a desigualdade $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 1) < 1$ se cumpre para todos os valores de x < 0.

▶ **Resp.:** $a < \sqrt{2}$.

QL-21. (Universidade Lomonosov de Moscou – 2000). Para que valores de b a equação

$25^x - (2b + 5)5^{x-1/x} + 10b.5^{-2/x} = 0$ tem exatamente duas soluções?

QL-22. (Universidade Lomonosov de Moscou – 2001). Achar todas as soluções da equação

$\log_{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1$ para cada valor inteiro de m.

QL-23. (Universidade Lomonosov de Moscou – 2006). Para que valores de a a soma dos quadrados das raízes da equação $(2\log_a|x-1| - \log_a x - 1)(2\log_{a^2}|x+5| - \log_a 3a + 1) = 0$ é maior que $8a + 1$?

QL-24. Achar todas as soluções reais do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 5^y \\ 2^y + 3^y = 5^z \\ 2^z + 3^z = 5^x. \end{cases}$$

QL-25. Resolver em R a equação $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$.

QL-26. Resolver, em R, as equações:

A) $6^x - 2^x = 32$.

B) $3^X + 4^x + 5^x = 6^x$.

C) $3.5^{2x+1} - 7.2^{4x+1} = 19$.

D) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

E) $\log_2(7 - x) = x - 1$.

QL-27. Resolva, em R, a equação $x.2^{1/x} + \frac{1}{x}.\ 2^x = 4$.

QL-28. Resolva, em R, a equação $2^{1-|x|} - 1 = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$.

QL-29. Resolva, em R, as equações;

A) $x^{\sqrt{\log_x 5}} + 5^{\sqrt{\log_5 x}} = 2\sqrt{5}$.

B) $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.

C) $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}$.

QL-30. **(JNCF).** Considere a série $\frac{a}{3^5}+\frac{a}{3^8}+\frac{a}{3^{11}}+\cdots$, em que $a = 121$. Qual a representação decimal desse número? Qual a representação em base 3 desse número? Qual a série "decimal" que representa esse número? Qual a fração contínua que representa esse número?

QL-31. Achar todas as soluções reais do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$$

QL-32. (ITA-2001). Se $a \in R$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$ é

A) $\log_2 6$. **B)** $-\log_2 6$. **C)** $\log_3 6$. **D)** $-\log_3 6$. **E)** $1 - \log_3 6$.

▶ **Resp.:** (D).

QL-33. (ITA-2002). Seja a função f dada por

$$f(x) = (\log_3 5).\log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1\,+2x-\,x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}.$$

Determine todos os valores de x que tornam f não negativa.

▶ **Resp.:** 1/5 ≤ x ≤ 1.

QL-34. (ITA-2004). Para b > 1 e x > 0, resolva a equação em x:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0.$$

▶ **Resp.:** x = 1/6.

QL-35. (ITA-2004). Seja α um número real, com 0 < α < 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que $\alpha^{2x}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})^{2x^2} < 1$.

A) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

B) $]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$.

C) $]0, 2[$.

D) $]-\infty, 0[$.

E) $]2, +\infty[$.

▶ **Resp.:** C.

QL-36. (JNCF). Considere a seguinte função $f: R \to R$, definida assim:

I) $f(x) = 3$, se $f(x) = 3, \text{se } x \in D = (-4,-2) \cup (-1,0) \cup (2,5) \cup (5,6)$, e

II) $f(x) = 0$, se $x \in R - D$.

Esboce o gráfico de f, identifique seus pontos de descontinuidade, determine a medida(comprimento) do conjunto D e a área da região

$$K = \{(x,\ y); x, y \in R \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Que relação existe entre a medida de D e a área de K?

QL-37. (ITA-2006). Considere a equação $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de *m* para os quais esta equação admite solução real é

A) (-1, 0) $\cup$ (0, 1).

B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

C) (-1, 1).

D) $(0, \infty)$.

E) $(-\infty, +\infty)$.

▶ **Resp.:** C.

QL-38. (ITA-2006). Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 (4^k \sqrt{2})$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita;

II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3;

III. S = 3451;

IV. $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$.

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

A) I e II.

B) II e III.

C) II IV.

D) II.

E) III.

▶ **Resp.:** (B).

QL-39. (ITA-2007). Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\log_k^{(xy)} = 49,$$

$$\log_k^{(x/z)} = 44.$$

Então, $\log_k^{(xyz)}$ é igual a

A) 52.
B) 61.
C) 67.
D) 80.
E) 97.

QL-40. (ITA-2007). Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$ são todos racionais. A soma x + y é igual a

A) 0. **B)** 1. **C)** $2\log_5^3$. **D)** $\log_5^2$. **E)** $3\log_e^2$.

▶ **Resp.:** (E).

QL-41. (ITA-2008). Um subconjunto D de R tal que a função f: D → R, definida por $f(x) = |ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

A) R **B)** $(-\infty, 1]$. **C)** [0, ½]. **D)** (0, 1). **E)** [1/2, ∞).

QL-42. (ITA-2007). Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\log[(x + 2y)(w - 3z)^{-1}] = 0,$$

$$2^{x+3z} - 8.2^{y-3z+w} = 0,$$

$$\sqrt[3]{2x + y + 6z - 2w} - 2 = 0.$$

▶ **Resp.:** {(x = w + 31/3, y = -8/3, z =-5/3, w ≠ - 5); w ∈ R}.

QL-43. (ITA-2008). Para x ∈ R, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é

A) ( ) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$

B) ( ) $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$

C) ( ) $\left\{0, \frac{1}{2}\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

D) ( ) $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$

E) ( ) A única solução é $x = 0$

▶ **Resp.:** (D).

QL-44. (ITA-2008). Seja f(x) = ln(x² + x + 1), x ∈ R. Determine as funções h, g : $R \to R$; tais que f(x) = g(x) + h(x), ∀ $x \in R$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

QL-45. (JNCF). Considere a série $\frac{y}{5^2}+\frac{y}{5^5}+\frac{y}{5^8}+...$, em que y = 31. Qual a representação decimal desse número? Qual a representação em base 5 desse número? Qual a fração contínua que representa esse número?

QL-46. (JNCF). Dê exemplo de um conjunto discreto cujos pontos de acumulação formam um conjunto enumerável infinito.

QL-47. (IME-2004/2005). Dada a função $f(x) = \frac{156^x + 156^{-x}}{2}$, demonstre que:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

QL-48. (IME-2005/2006). Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$C_{r+y}^{r} = \log_y x$$
$$\log_y z = 4 + \log_x z$$
$$C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z$$

em que C^{p}_{m} representa a combinação de m elementos tomados *p a p* e log_c^B representa o logaritmo de B na base c.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-L(1)

As DRN(Dicas/Resoluções/Notas) são **dicas, notas, comentários ou resoluções** relacionadas às questões propostas. Elas são as aproximações/transições preferenciais do presente texto. A partir delas, os textos mais longos foram desenvolvidos como novas aproximações. Essas DRN têm vários papéis, entre eles:

1º) de ajudar, de modo ativo, o aprendente a resolver a questão específica;

2º) de treiná-lo no uso consciente e sistemático de estratégias, fórmulas, padrões, propriedades, teoremas e conceitos;

3º) de reduzir a frustração na busca de resolver/compreender questões mais difíceis; e

4º) de melhorar a **percepção da beleza** dos desafios e das construções matemáticas para enfrentá-los.

Quanto mais frequente esses papéis forem estimulados e assimilados pelo aprendente, mais integrado e profundo será o seu aprendizado, pois estará de acordo com a nova visão sistêmica integrada da realidade, com a concepção de **inteligência senciente**, que integra e unifica, numa única faculdade, o "sentir" e o "pensar" e, evidentemente, com o método ativo das Aproximações Multifárias.

DRN-L1:

L(1.1) = L(1) + L(1) = 2L(1) ⇔ L(1) = 0.

0 = L(1) = L(x.1/x) = L(x) + L(1/x) = 0 ⇔ L(1/x) = - L(x).

L(x) = L[($\sqrt[n]{x}$)^n] = n L($\sqrt[n]{x}$) ⇔ L($\sqrt[n]{x}$) = 1/nL(x).

DRN-L2:

Mudar para a base 10 e expressar 15 e 11,25 em termos de 2, 3 ou 10.

▶ **Resp.:** $\frac{1}{5}\left(\frac{2b+1-3a}{b+1-a}\right)$.

DRN-L5:

Mudança para a base b: $(t+1)2^t = \log_b p$ e $\lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n}\log_p 5^{t+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n}\frac{(t+1)\log_b 5}{(t+1)2^t} =$

$(\log_b 5)\lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n}\frac{1}{2^t} = \log_b 5.\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = 2\log_b 5$. Disso segue que $2\log_b 5 = 4$ e, portanto, $b = \sqrt{5}$.

DRN-L6:

A raiz dupla implica f(x) = 1. Transforme essa igualdade para a forma $3^A = 3^B$. Em seguida obtenha a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ cuja soma das raízes é 2.

DRN-L9:

$a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 = 13a + 12$. Disso segue, por fatoração, que $(a^4 + a^2 - 12)(a + 1) = 0$. Como $a > 0$, então $a^4 + a^2 - 12 = 0$ e, por consequência, $a = \sqrt{3}$.

Logo, mudando a base dos logaritmos para 3, a expressão em *x* do enunciado é equivalente a $\frac{\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c+\log_3 d+\log_3 e}{\log_3 x} = \frac{(1+2+3+4+5)\log_3 a}{\log_3 x} = \frac{15}{2\log_3 x} = \frac{5}{2}$. De modo que $x = 3^3$.

▶ **Resp.:** (A)

DRN-L10:

$\frac{2+\log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x(x+2)$ pode ser escrita assim:

$$[\log_x(x+2)\cdot(2+\log_3 x) - \frac{\log_x(x+2)}{\log_3 3+\log_3 x} - \log_x(x+2) = 0$$

Colocando $\log_x$ (x+2) em evidência, vem: $[\log_x(x+2)]\cdot\left[2+\log_3 x - \frac{1}{\log_3(3x)} - 1\right] = 0$

Logo: $\log_x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 1 \therefore x = -1$ (não convém)

ou $1+\log_3 x - \frac{1}{\log_3(3x)} = 0 \Rightarrow \log_3 3 + \log_3 x = \frac{1}{\log_3(3x)}$

Portanto, $\log_3(3x) = \frac{1}{\log_3(3x)} \Rightarrow [\log_3(3x)]^2 = 1$.

$\log_3(3x) = \pm 1$ →

- 3x = 3. ∴ x = 1 (não convém, pois x ≠ 1.)
- 3x = 3^{-1}. ∴ x = $\frac{1}{9}$, que pertence ao interval $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

▶ **Resp.:** (B).

DRN-L11:

Como z > 1, então $\log_z^x + \log_z^y < 2$, que equivale a $\log_z^x + 1/\log_y^z < 2$. E sendo x > 1, y > 1 e z > 1, temos que $\log_z^x$ e $1/\log_y^z$ são positivos. Logo, podemos aplicar MA ≥ MG para obter $\log_z^x/\log_y^z < 1$, que equivale a $\log_z^x < \log_y^z$.

DRN-L13:

Fatorar o primeiro membro.

▶ **Resp.:** x > -1/3 ou x < -2/3.

DRN-L15:

f(x) = f(x/2 + x/2) = $[f(x/2)]^2 \geq 0$. Suponhamos que f(x/2) = 0, então f(x) = 0 , para todo x, o que implicaria f ser constante. Logo f(x) > 0.

Temos que f(2x) = f(x + x) = $[f(x)]^2$; f(nx) = f(x + (n -1)x) = f(x).f [(n – 1)x] = ... = $[f(x)]^n$. Mostre que f(0) = 1. Veja que f(0) = $[f(0)]^2 > 0$. Disso segue que f(0) = 1.

F(0) = f(x – x) = f(x).f(-x). Se f for par, então 1/f(x) = f(x) = 1,$\forall\, x \in R$ o que implica f ser constante. Logo f não é par.

▶ **Resp.: (A).**

DRN-L16:

Fazendo a = 2^x e b = 3^x, a equação anterior fica assim: a + b – a^2 + ab – b^2 = 1, que pode ser escrita assim: $a^2 + b^2 – ab – a – b + 1 = 0$. Multiplicando essa equação por 2, obtemos:

$a^2 + b^2 – 2ab + a^2 – a + 1 + b^2 – b + 1 = 0 \Leftrightarrow (a – b)^2 + (a – 1)^2 + (b – 1)^2 = 0$. Essa última igualdade implica que a = b = 1, que nos leva a $2^x = 1 = 3^x \Leftrightarrow x = 0$.

DRN-L17:

Aplique logaritmos e observe que o primeiro membro representa uma função decrescente e o segundo membro uma função crescente. Logo a única solução é x = a. Para maior clareza veja a nota após a QL-25.

DRN-L18:

Sabemos que a função f(x) = $\log_a x$ é decrescente para 0 < a < 1. Como $(x – ½)^2 \geq 0$ implica $x^2 \geq x – ¼$, então temos $\log_{x_k}\left(x_{k+1} - \frac{1}{4}\right) \geq \log_{x_k} x_{k+1}^2 = 2\log_{x_k} x_{k+1} = 2\frac{\log x_{k+1}}{\log x_k}$.

Segue disso que

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\geq 2\left(\frac{\log x_2}{\log x_1} + \frac{\log x_3}{\log x_2} + \cdots + \frac{\log x_n}{\log x_{n-1}} + \frac{\log x_1}{\log x_n}\right). \qquad (1)$$

Sendo $\log x_k$ < 0, para todo k, então os quocientes de (1) são positivos e assim podemos aplicar MA ≥ MG para obter: $2\left(\frac{\log x_2}{\log x_1} + \frac{\log x_3}{\log x_2} + \cdots + \frac{\log x_n}{\log x_{n-1}} + \frac{\log x_1}{\log x_n}\right) \geq 2n.$ (2)

Por (1) e (2) concluímos que $\log_{x_1}(x_2-\frac{1}{4}) + \log_{x_2}(x_3-\frac{1}{4}) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right) \geq 2n.$

A igualdade em MA ≥ MG só ocorre se os termos forem iguais entre si. Isso implica que a soma dos termos entre () da desigualdade (2) é igual a n e que cada termo é igual a 1, ou seja $\log x_1 = \log x_2 = \ldots = \log x_n$ e por conseguinte $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = b$. Com isso a expressão dada converte-se em $n.\log_b\left(b-\frac{1}{4}\right) = 2n$.

Resolvendo esta equação, obtemos b = ½. Portanto, o mínimo da função dada é 2n e ocorre quando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = ½$.

DRN-L19:

Aplicando as propriedades de logaritmos obtenha o sistema $\begin{cases} x = -a-2 \\ 2a^2 - 2a - 1 = 0 \end{cases}$.

▶ **Resp.:** $x = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$, se $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $x = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, se $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

DRN-L21:

Multiplique a equação por $5^{2/x}$ e chegue em $x + 1/x = \log_5 2b$.

▶ **Resp.:** 0 < b < 1/50, b > 25/2.

DRN-L22:

Analisar os três casos: $m = 0$, $m \neq 0$ par e m ímpar. Conclua que as raízes existem se $|m| \leq 3$.

▶ **Resp.:** Se m = 0, então x = 3; se m = ± 1, então $x = \pm(3 \pm 2\sqrt{2})/2$; se m = ± 2, então $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$; se m = ± 3, então x = $\pm 3/2$.

DRN-L23:

Usando as propriedades de logaritmos, transforme a equação dada no sistema $\begin{cases} ((x-1)^2 - ax)(x+2) = 0, \\ a > 0, a \neq 1, x > 0. \end{cases}$

Disso, obtenha que $x_1^2 + x_2^2 = a^2 + 4a + 2$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $(x-1)^2 - ax$.

▶ **Resp.:** 0 < a < $2 - \sqrt{3}$ ou $a > 2 + \sqrt{3}$.

DRN-L24:

Observe que y = $\log_5(2^x + 3^x)$. Fazendo f(x) = y, obtemos f(f(f(x))) = x. Veja que f é crescente em R. Em virtude disso, a equação funcional f(f(f(x))) = x é equivalente a f(x) = x. Proceda de modo análogo com x = f(z) e z = f(y).

▶ **Resp.:** A única solução do sistema dado é x = y = z = 1.

COMENTÁRIO:

Há um teorema sobre esse tipo de equação funcional que afirma:

"Se y = f(x) é uma função crescente(ou decrescente), então as equações f(g(x)) = f(h(x)) e g(x) = h(x) são equivalentes no conjunto de valores admissíveis da variável x da equação f(g(x)) = f(h(x))."

Prova:

I) Seja x_o uma solução de $f(g(x)) = f(h(x))$, isto é, $f(g(x_o)) = f(h(x_o))$. Suponhamos que x_o não seja uma solução da equação $g(x) = h(x)$. Então $g(x_o) \neq h(x_o)$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $g(x_o) < h(x_o)$. Combinando isso com a monotonicidade da função $y = f(x)$ no conjunto de valores possíveis, se obtém que $f(g(x_o)) < f(h(x_o))$ se f é crescente ou $f(g(x_o)) > f(h(x_o))$ se f é decrescente. Em ambos os casos, chegamos em uma contradição.

II) Por outro lado, se x_o é uma solução da equação $g(x) = h(x)$, *isto é*, $g(x_o) = h(x_o)$, então $f(g(x_o)) = f(h(x_o))$.

Um corolário imediato desse teorema se enuncia assim: "Se y = f(x) é uma função crescente(ou decrescente) no conjunto imagem das funções y = g(x) e y = h(x), então as equações $f(g(x)) = f(h(x))$ e $g(x) = h(x)$ são equivalentes."

DRN-L25:

É fácil verificar que x = 0 é uma solução dessa equação. Provemos que ela é única. Dividindo a equação por 6^x obtemos: $(3/2)^x + 1 = 2(2/3)^x$. Como $(3/2)^x + 1$ é contínua e crescente em R e $2(2/3)^x$ é contínua e decrescente em R, então só há uma solução para a equação inicial: x = 0.

NOTA:

Para maior clareza desse método observe a argumentação a seguir. Sejam as funções f e g, tais que f é crescente em R, g é decrescente em R e f(x) = g(x). Suponhamos que existam duas soluções a e b dessa equação, com a < b. Então f(a) < f(b) e g(a) > g(b). Mas f(a) = g(a) e f(b) = g(b). Segue-se disso que g(a) < g(b) e f(a) > f(b), o que é uma contradição! Logo só pode existir uma única solução.

DRN-L26:

Use o método da questão anterior.

▶ **Resp.: A)** 2. **B)** 3. **C)** ½. **D)** 9. **E)** 3.

DRN-L27:

Percebemos que não há solução para x ≤ 0. Procuremos, pois, as soluções para x > 0. Podemos, agora, aplicar MA ≥ MG para obter: $2 \geq 2^{\frac{x^2+1}{2x}}$. De $2 = 2^{\frac{x^2+1}{2x}}$, decorre x = 1. Mas x = 1 satisfaz a equação original e também $x.2^{1/x} = \frac{1}{x} . 2^x$, que é a condição exigida por MA = MG. Portanto, a única solução real é x = 1.

DRN-L28:

Adequar a equação para usar MA ≥ MG.

▶ **Resp.:** x = 0.

DRN-L29:

Use a propriedade: $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

▶ **Resp.: A)** $x = \sqrt[4]{5}$; **B)** x = 100; **C)** x = -2.

DRN-L30:

Trata-se de uma série geométrica de razão $1/3^3$ e primeiro termo 121/243. Logo a soma é 121/234, que tem a representação decimal dada pela dízima periódica composta 0, 5 170940 de período 6. Na base 3 temos a dízima periódica simples 0, 111221 de período 3. E a série decimal é $\frac{5}{10} + \frac{170940}{10^7} + \frac{170940}{10^{13}} + \cdots$. A fração contínua é [0; 1, 1, 14, 8]. Recordando o procedimento:

$$\frac{121}{234} = \frac{1}{\frac{234}{121}} = \frac{1}{1 + \frac{113}{121}} = \cdots$$

Observe que a fração contínua é finita, pois o número é racional.

DRN-L31:

Como $x^{\log_8 y} = y^{\log_8 x}$, então o sistema dado é equivalente a $\begin{cases} \log_2 x . \log_2 y = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, encontramos as soluções reais: (x = 8, y = 2) e (x = ½, y = 1/8).

DRN-L39:

As equações dadas equivalem a: $\log_k^x + \log_k^y = 49$ e $\log_k^x - \log_k^z = 44$. Um fato a ser lembrado: "Se a soma de dois primos é um número ímpar, então um deles é 2." Como 49 é ímpar, então podemos escrever : $\log_k^x = 47$ e $\log_k^y = 2$. Disso segue $\log_k^z = 3$. Logo $\log_k^{(xyz)} = 52$.

DRN-L40:

Faça $\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$ = a/b, em que a e b são inteiros. Com isso obtemos: $4a - ae^y\sqrt{5} = be^x - 2b\sqrt{5}$.

Considere o conjunto dos números reais da forma $A + B\sqrt{5}$, com A e B racionais. A soma e o produto de dois números dessa forma são também números dessa forma. Ou seja, esse conjunto é fechado em relação às duas operações(adição e multiplicação). Então a igualdade entre dois números dessa forma segue o mesmo modelo da igualdade entre dois números complexos, isto é: $A + B\sqrt{5} = C + D\sqrt{5} \Leftrightarrow A = C$ e $B = D$. Aplicando isso à igualdade $4a - ae^y\sqrt{5} = be^x - 2b\sqrt{5}$, obtemos: $4a = be^x$ e $ae^y = 2b$. Resolvendo este sistema, obtemos: x + y = 3ln2.

DRN-L41:

Esboce os gráficos de $y = x^2 - x + 1$ e h(x) = ln y. Depois esboce o de f a partir do de h. Verifique que *y* é injetiva(decrescente) em [0, ½] e h é injetiva em [3/4, 1]. Conclua que f é injetiva em [0, ½].

DRN-L44:

Verifique e use: $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ é par e $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ é ímpar.

DRN-L45:

Representação decimal: 1, 25. Representação na base 5: 1, 111111...

Representação em fração contínua: [1; 4].

DRN-L46:

Para construir o exemplo pense numa união enumerável de conjuntos do tipo {1/2, 1/3,..., 1/n, ...}, com pontos de acumulação distintos. Mais uma ajuda: {1/2 + 1, 1/3 + 1, ..., 1/n + 1,...} tem o ponto de acumulação 1.

DRN-L48:

Observe que $C^r_{r+y} = C^y_{r+y}$. Com isso obtenha $z = xy^3$ e também $z = x^2$. Disso segue $x = y^3$. E lembre-se que C^r_{r+y} é um número natural e $y \neq 1$. Logo y = 2 e r = 1. Portanto, x = 8; y = 2; z = 64 e r = 1.

QL-49. (IME-2006/2007). Considere o sistema de equações dado por $\begin{cases} 3\log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2\log_3 \beta = 10 \end{cases}$ em que α e β são números reais positivos. Determine o valor de P = $\alpha\beta$.

QL-50. (JNCF). Construa um conjunto enumerável A tal que todos os seus pontos sejam pontos de acumulação.

QL-51. (IME-2011/2012). Se $\log_{10}{}^2 = x$ e $\log_{10}{}^3 = y$, então $\log_5{}^{18}$ vale:

(A) $\frac{x+2y}{1-x}$ (B) $\frac{x+y}{1-x}$ (C) $\frac{2x+y}{1+x}$ (D) $\frac{x+2y}{1+x}$ (E) $\frac{3x+2y}{1-x}$

▶ **Resp.:** (A).

QL-52. (JNCF) Prove que o conjunto imagem de toda função exponencial contém o conjunto {12, 20, 35}. Também prove que não existe uma progressão geométrica que tenha essa propriedade. Uma PG infinita de números reais positivos, com primeiro termo igual a 1 e razão q, $0 < q \neq 1$, é **restrição** de uma função exponencial?

NOTA(Restrição de uma função):

Seja f: A ➔ B uma função. E seja g : D ➔ B, com D $\subset A$, uma função tal que g(x) = f(x), para todo x de D. Então dizemos que g é uma **restrição** de f.

QL-53. Vide versão digital deste livro.

QL-54. Vide versão digital deste livro.

QL-55. Vide versão digital deste livro.

QL-56. (IME-2017/2018). Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

A) Os valores de a, b e c;

B) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

▶ **Resp.: A)** $a = r, b = 2r, c = 3r$ e $r = 2^{\log_{3/4} 2}$. **B)** $r = 2^{\log_{3/4} 2}$; e $q = \log_{3/2} 2$.

QL-57. Vide versão digital deste livro.

QL-58. (ITA-2014). Considere as funções $f : R \to R, f(x) = e^{ax}$, em que a é uma constante real positiva, e $g: [0, \infty[\to R$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto solução da inequação $(gof)(x) > (fog)(x)$.

▶ **Resp.:** S = { x ∈ R; x > 4 }.

QL-59. Vide versão digital deste livro.

QL-60. Vide versão digital deste livro.

QL-61. Vide versão digital deste livro.

QL-62. Resolva, em R, a equação $x.3^{x+1} = 5x + 4$.

QL-63. Vide versão digital deste livro.

QL-64. Vide versão digital deste livro.

QL-65. Vide versão digital deste livro.

QL-66. Vide versão digital deste livro.

QL-67. (JNCF) (Ponto fixo). Considere a função real $g(x) = x^2$ definida para $x \in [0, 1]$. Verifique que o conjunto imagem de g é [0, 1] e que g(0) = 0 e g(1) = 1. Denominamos de ponto fixo de uma função f : D → D a todo ponto $x \in D$ tal que f(x) = x. Vemos que a função g tem dois pontos fixos em [0, 1]. Prove que toda função contínua f : [0, 1] → [0, 1] tem um ponto fixo.

QL-68. (ITA-2017). Esboce o gráfico da função f : R → R dada por $f(x) = \left| 2^{-|x|} - \frac{1}{2} \right|$.

QL-69. (**IME-2010**). Seja f(x) = $|3-\log(x)|$, x ∈ R. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade $\left|\frac{f(x)}{4}\right|$ + $\left|\frac{2f(x)}{12}\right|$ + $\left|\frac{4f(x)}{36}\right|$ + ... + $\left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right|$ +... ≤ 9/4 somente é possível se:

A) $0 \le x \le 10^6$.

B) $10^{-6} \le x \le 10^8$.

C) $10^3 \le x \le 10^6$.

D) $10^0 \le x \le 10^6$.

E) $10^{-6} \le x \le 10^6$.

QL-70. (IME-2013/2014). Resolver o sistema de equações $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3\frac{y}{x} \\ 2^{x+2}+8^x=5.4^y \end{cases}$.

QL-71. (IME-2013/2014). Sabe-se que o valor do sexto termo da expansão em binômio de Newton de

$$\left(2^{\log_2\sqrt{9^{(x-1)}+7}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{5}\log_2(3^{(x-1)}+1)}}\right)^7 \text{ é } 84.$$

O valor da soma dos possíveis valores de x é

A) 1. **B)** 2. **C)** 3. **D)** 4. **E)** 5.

▶ **Resp.:** C.

QL-72. (IME-2015/2016).

Quantos inteiros k satisfazem à desigualdade $2\sqrt{\log_{10}k-1}+10\log_{10^{-1}}k^{1/4}+3>0$?

A) 10. **B)** 89. **C)** 90. **D)** 99. **E)** 100.

▶ **Resp.: C.**

QL-73. Vide versão digital deste livro.

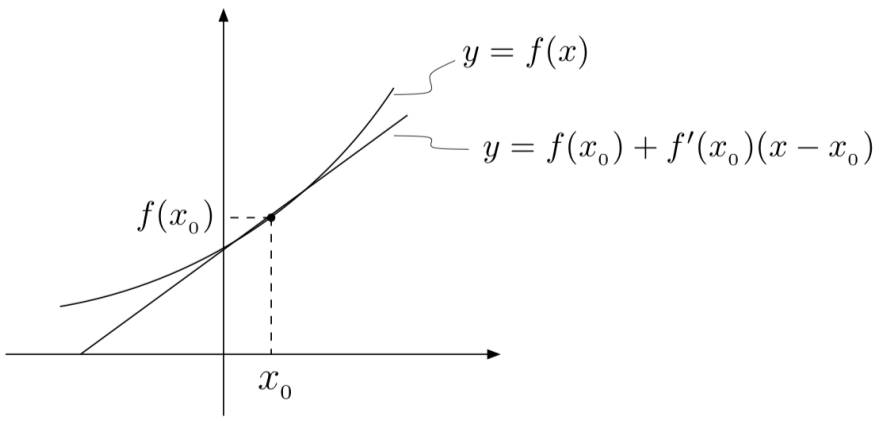
QL-74. Vide versão digital deste livro.

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL

Geometricamente, a derivada $f'(x_0)$ de uma função real $f\colon (a,b) \to R$, com $a < b$, significa a declividade ou inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, f(x_0)). Veja a figura a seguir para uma melhor compreensão. Fisicamente, a derivada pode ser interpretada como velocidade instantânea. Nesse caso, indicando a função do espaço percorrido em função do tempo por s(t), temos que s'(t) = v(t), em que v indica a velocidade no instante t. Em outros contextos usamos a expressão *taxa de* **variação instantânea** para nos referir à derivada de uma função.

A definição de $f'(x_0)$, de um modo geral, é dada por $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

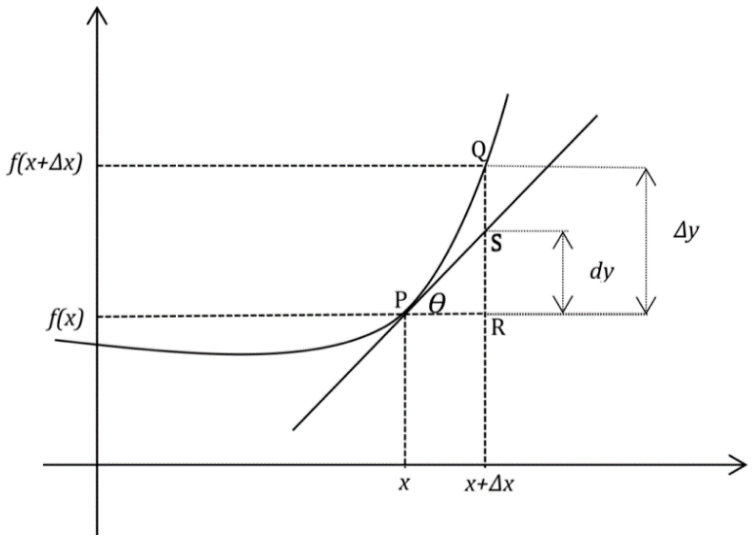
O quociente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ é chamado de **quociente de Newton** da função f em x = x_0. Ele também pode ser colocado na forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, em que y = $f(x)$. Daí o uso tradicional, nas aplicações, do nome **taxa de variação** para a derivada na forma $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Perceba que associada à derivada $f'(x_0)$ temos uma função linear L(h) = f'(x_0).h, com h = x – x_0, e também uma função afim L(h) = $f(x_0)$ + $f'(x_0)$.h , cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto (x_0, f(x_0)). Dessa forma vemos que ao calcularmos a derivada de uma função f, em um dado ponto x_0 de seu domínio, estamos usando uma função linear(ou afim) que seja uma boa aproximação de f na vizinhança do ponto x_0. Portanto, quando dizemos que uma função $f: (a,b) \to R$ é diferenciável(ou derivável) em um ponto $x_0 \in (a,b)$, estamos dizendo que existe uma função linear(ou afim) L : $R \to R$ tal que L(h) = m.h e $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{h} = 0$. Isso equivale a $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$.

É claro que poderíamos considerar a derivada da função f no ponto x_0 como sendo a função linear L e não o coefiente angular dela. Esse método, como veremos depois, é generalizado para funções com várias variáveis. É relevante em Matemática e suas aplicações a ideia de aproximarmos uma função por uma função mais simples, em que os cálculos são mais simples. De preferência essa aproximação é feita com uma função linear ou afim. Observe que na vizinhança de um ponto x_0 os valores da função *f* ficam muito próximos dos valores dados pela função afim L(h) = $f(x_0)$ + $f'(x_0)$.h .

Também se usa a notação $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, com $y = f(x)$. Nesse caso, temos que $\Delta x = dx$, $dy = f'(x)dx$ e denominamos dy e dx de **diferenciais**. Dessa forma, a derivada é vista como um quociente de diferenciais. Veja na figura a seguir uma interpretação geométrica de dy. Um fato, que tem importância nas aplicações, é perceber que dy é uma boa aproximação de Δy, quando Δx for pequeno.



No caso de x = x_0, temos que $f'(x_0)$ é apenas um número. E quando falamos da **função derivada** f'(x), significa que estamos tratando da função que associa a cada ponto x do domínio de f a sua derivada f'(x). Muitas vezes dizemos apenas **derivada** em vez de **função derivada**.

Pode-se mostrar que toda função diferenciável é contínua em seu domínio. Basta ver que

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.h\right] = 0$$

e que $\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{x+h\to x} f(x+h)$. Ou seja $\lim_{x+h\to x} f(x+h) = f(x)$.

Algumas propriedades operacionais das derivadas de funções reais de variáveis reais f e g, que decorrem das propriedades análogas dos limites de funções, nos ajudam a evitar o uso dessa definição:

I. $[af(x)+bg(x)]' = af'(x)+bg'(x)$,

II. $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

III. $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$, em que a e b são constantes reais.

Obs.: A a regra da derivada da composta(III), conhecida como **regra da cadeia**, pode ser apresentada assim: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, em que *y = f(u)* e *u = g(x).*

A derivada da função real f(x) = x^3 é dada por f'(x) = $3x^2$. Provemos pela definição. Calculemos o limite $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$. Observe que $\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3hx+h^2$. Passando ao limite obtemos f'(x) = $3x^2$.

De modo análogo podemos mostrar que se f(x) = x^n, então f'(x) = nx^{n-1}, para n natural. E mais na frente mostramos que podemos estender essa fórmula para um número real r e x > 0.

Consideremos agora a função definida por g(x) = $\frac{(x+2)^3 - 5x^4}{x^2+1}$, para todo x real. Usando esse último resultado e as propriedades anteriores calculemos a derivada g'(x).

Então segue que g'(x) = $[3(x+2)^2 - 20x^3](x^2+1)^{-1} - [(x+2)^3 - 5x^4](2x)(x^2+1)^{-2}$.

NOTA(Limites laterais):

No caso do limite L de uma função f em um dado ponto interior a de seu domínio D, vimos que é preciso garantir que tanto as sequências que convergem pela esquerda, quanto as que convergem pela direita para o ponto a, impliquem na convergência das sequências $f(x_n)$ correspondentes para o mesmo limite L. Por isso quando nos referirmos apenas a um dos lados, diremos que se trata de **limites laterais**. Se for o **limite lateral** *à* **direita** indicaremos por $\lim_{x\to a+} f(x)$ e se for o **limite lateral** à **esquerda** indicaremos por $\lim_{x\to a-} f(x)$. Com essa nova nomenclatura deduzimos que a existência do limite $\lim_{x\to a} f(x)$ equivale à igualdade dos limites laterais $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$. Em virtude disso, fala-se de continuidade à esquerda, continuidade à direita, derivada à direita e derivada à esquerda. Pouco uso faremos disso no presente curso. As colocações aqui têm o objetivo de ampliar a compreensão sobre as funções reais, que muitas vezes são definidas em intervalos fechados.

Voltemos à função exponencial. Consideremos a função $f(x) = 2^x$. Então a derivada f'(x) se existir será o limite $\lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} 2^x(\frac{2^h - 1}{h}) = k2^x$, onde $k = \lim_{h\to 0}(\frac{2^h - 1}{h})$.

Esse limite, de fato existe, como mostraremos a seguir.

Prova da existência do limite $\lim_{h\to 0}(\frac{2^h - 1}{h})$:

Recordemos o lema-3 da última nota do capítulo-1:

Lema-3: Suponha que $a > 0$ e que t e x são números reais positivos. Se $t \leq x$, então vale a desigualdade

$$\frac{a^t - 1}{t} \leq \frac{a^x - 1}{x}.$$

Em virtude desse lema, existe o limite lateral $\lim_{h\to 0_+}(\frac{2^h - 1}{h})$. Mas, como $f(x) = 2^x$ é contínua em 0 e $2^h(\frac{2^{-h} - 1}{-h}) = \frac{2^h - 1}{h}$, então existe também o limite lateral $\lim_{h\to 0_-}(\frac{2^h - 1}{h})$, para $h < 0$, e ambos são iguais a k.

E como $k = \lim_{h\to 0}(\frac{2^h - 1}{h}) \geq 0$ e $f(x) = 2^x$ não é constante, então $k > 0$.

Portanto, a função $f(x) = 2^x$ tem derivada para todo x real e $f'(x) = k2^x$, em que $k = \lim_{h\to 0}(\frac{2^h - 1}{h})$.

Com esse resultado podemos deduzir que para toda função exponencial f(x) = a^x teremos que f'(x) = k($\log_2 a$)a^x. Basta ver que a^x = $2^{x \log_2 a}$ e aplicar a derivada da composta. Se a =$2^{1/k}$, então f'(x) = a^x.

O número $2^{1/k}$ coincide com o conhecido número e, que é a base dos **logaritmos naturais** ou neperianos. Veja, pois, que se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x = f(x)$. Ou seja, a derivada da **função exponencial natural** é igual à própria função exponencial.

Essa é uma propriedade que caracteriza a função exponencial natural $f(x) = e^x$. E com isso, a derivada da função $f(x) = a^x$ é $f'(x) = (\ln a)a^x$, o que significa que a derivada de toda função exponencial real é proporcional à própria função.

Nas aplicações práticas, nos modelos exponenciais, esse critério é fundamental. Exemplos: decaimento radioativo, pH(cologaritmo da concentração hidrogeniônica), resfriamento, juros contínuos, pressão atmosférica em função da altitude, etc.

Uma propriedade relevante das derivadas é a regra de cálculo da **derivada da função inversa**. Seja f uma função injetiva e derivável num intervalo I = (a, b). Então sua inversa x = g(y) é derivável no intervalo J = f(I) e $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Como a **função logarítmica natural** g(y) = ln y é a inversa da função exponencial natural y = f(x) = e^x, então a sua derivada é dada, de acordo com a fórmula anterior, por g'(y) = 1/f'(x) = 1/e^x = 1/y. Fazendo g(x) = ln x , teremos g'(x) = 1/x.

A partir desse resultado podemos chegar na derivada de uma função logarítmica de base a. Seja f(x) = $\log_a x$. Mudando para a base e : f(x) = $\frac{\ln x}{\ln a}$. Então f'(x) = $\frac{1}{(\ln a)x}$.

Usando a identidade fg = $e^{(\ln f + \ln g)}$, com f e g positivas, e a regra da cadeia, prove a regra da derivação de um produto fg de funções deriváveis. A seguir, combine essa última regra com a derivada da potência e a regra da cadeia, para deduzir a regra da derivada do quociente de duas funções deriváveis: $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$.

NOTA(Derivada da potência geral $f(x) = x^r$):

Sabemos que se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$, em que n é natural. Pode ser provado que isso vale para para a função real $f(x) = x^r$, com r real e $x > 0$. Ou seja, $f'(x) = rx^{r-1}$. Para provarmos isso, coloquemos x na forma $x = e^{\log x}$. Logo $x^r = e^{r\log x}$. Façamos agora $g(x) = r\log x$.

Então $g'(x) = r/x$. Agora vamos aplicar a propriedade (III), conhecida como Regra da Cadeia, para $f(x) = f(g(x))$: $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x) = e^{g(x)}.r/x = x^r.\ r/x = rx^{r-1}$.

Observe que usamos o fato $(e^x)' = e^x$. Obs.: Aqui nesta nota $\log x = \ln x$.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO DE LAGRANGE

Uma propriedade famosa do estudo de funções reais é conhecida com o nome de Teorema do Valor Médio de Lagrange. Seu enunciado é assim:

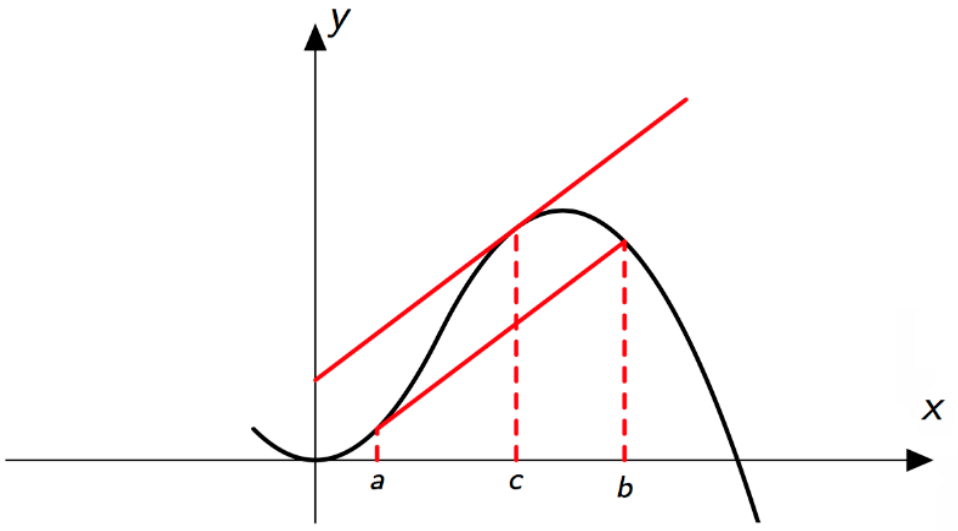
"Se f é uma função contínua num intervalo [a, b] e derivável em (a, b), então existe um ponto interno $c \in (a, b)$ tal que $f(b) – f(a) = f'(c)(b – a)$."

Geometricamente, esse teorema expressa o seguinte: existe um número c entre a e b, tal que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (c, $f(c)$) é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e (b, $f(b)$), como esboçado na figura a seguir.

Uma consequência muito útil do **Teorema do Valor Médio de Lagrange** é o critério que nos permite dizer se uma função derivável é crescente ou decrescente em um dado intervalo de seu domínio. Assim, pelo teorema, temos que se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente,e se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente. Ou seja, pelo sinal da derivada em um dado intervalo do domínio de uma função real podemos dizer se ela é crescente ou decrescente. Evidentemente, se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante. Uma consequência desse último resultado: Se duas funções deriváveis em (a, b) têm a mesma derivada, então elas diferem por uma constante. Noutros termos: se $f'(x) = g'(x)$, então $f(x) = g(x) + k$, em que k é uma constante.

Primitiva de uma função

Se uma função real F: [a, b] → R é derivável e F'(x) = f(x), então dizemos que F é uma **primitiva** de f. Nos extremos do intervalo são consideradas as derivadas laterais correspondentes. Em virtude do Teorema do Valor Médio, podemos afirmar que a diferença entre duas primitivas de uma função f é uma constante. Aliás, podemos afirmar mais ainda. Se uma função tem uma primitiva, então ela possui uma família não enumerável de primitivas. Ou seja, se F'(x) = f(x) e G(x) = F(x) + k, para todo k real, então G'(x) = f(x).



Na demonstração do Teorema do Valor Médio, usualmente, se usa como um lema o **Teorema de Rolle**: " Se f é uma função contínua num intervalo [a, b] e derivável em (a, b), com f(a) = f(b) = 0, então existe um ponto interno c ∈ (a, b) tal que f'(c) = 0." E na demonstração desse se usa o **Teorema de Fermat**: "Se f é uma função contínua num intervalo [a, b], derivável em (a, b) e atinge um valor máximo ou um valor mínimo em c ∈ (a, b), então f'(c) = 0."

Para se provar o TVM, usando o T. de Rolle, basta usar a função auxiliar:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Observe que $g(a) = g(b) = 0$. A função g, assim definida, é melhor compreendida assim: g(x) = f(x) – y, em que y = $f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, que é a equação da reta secante por (a, f(a)) e (b, f(b)), paralela à reta tangente ao gráfico de f no ponto (c, f(c)), conforme indicado no gráfico anterior.

PROVA DO TEOREMA DE FERMAT:

Vamos provar para o caso de f atingir o valor máximo em *c ∈ (a, b).* Como f é derivável em c, então existe o limite $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Estudemos, separadamente, os limites laterais. Tomemos h > 0 tal que c + h ∈ *(a, b).* Então, $f(c+h) - f(c) \leq 0$ e $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$, o que acarreta $\lim_{h\to 0_+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$. Por outro lado, tomando h < 0, com h + c ∈ *(a, b),* temos que $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$, o que implica $\lim_{h\to 0_-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$. Mas os limites laterais são iguais, em virtude da existência de $f'(c)$. Logo $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$.

PROVA DO TEOREMA DE ROLLE:

Pelo teorema de Weierstrass f tem máximo e mínimo em [a, b]. Se o máximo de f ocorre nos extremos do intervalo, então a função é constante e consequentemente $f'(x) = 0$, para x ∈ [a, b]. Se c ∈ *(a, b),* então pelo teorema de Fermat $f'(c) = 0$.

QL-75. (ITA-2010). Analise se a função $f: R \to R,\ f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1}.

QL-76. (ITA-2012). Analise se a função $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: R \to R$.

QL-77. (ITA-2016). Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

A) ( ) apenas I.

B) ( ) apenas I e II.

C) ( ) apenas II e III.

D) ( ) apenas I, II e III.

E) ( ) apenas III.

QL- 78. Suponha que uma função f : *R* ⟶ *R* é tal que f(0) = 1 e f' = f. Prove que f(x) = e^x.

QL-79. Seja $f: [a, b] \to R$ uma função contínua em $[a, b]$ e duas vezes diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$ e $f'(a) = f'(b)$, prove que, para todo número real k, a equação $f''(x) - k[f'(x)]^2 = 0$ tem ao menos uma solução em (a, b).

QL-80. Sejam $a_1,\ a_2, \ldots\ a_n \in (0,1)$ e seja $t_n = \frac{na_1a_2\ldots a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$. Prove que $\sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} t_n \geq (n-1)n$.

QL-81. (JNCF). Uma função g: $R \rightarrow R$ é tal que g'(x) = 3g(x) e g(0) = 5. Determine g(x).

▶ **Resp.:** $g(x) = 5e^{3x}$.

QL-82. (JNCF). Uma função f: $R \rightarrow R$ é tal que f'(x) = 2f(x) + 1 e f(0) = 2. Determine f(x).

▶ **Resp.:** $f(x) = \frac{1}{2}(5e^{2x} - 1)$.

QL-83.(JNCF). Uma função contínua de variável real é tal que $f'(x) = [f(x)]^2$ e f(0) = 1. Determine f(x) e o domínio de f.

▶ **Resp.:** $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e $D_f =]-\infty;\ 1)$.

QL-84. Deduza a fórmula da derivada da função real definida por $f(x) = x^x$, para todo x > 0.

QL-85. Sabendo que $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, mostre que: $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{r}{x})^x = e^r$. A seguir, sabendo que $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, calcule $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{mx})^{rx}$, sendo **m** e **r** naturais.

QL-86. (JNCF). Considere a função $f: D = R - \{-4,-2,-1,0,2,5,6\} \rightarrow R$, definida por $f(x) = 3$.

Determine os limites de f nos pontos x = - 2 e x = 5. A função f é contínua?

Determine a família F de primitivas de f.

QL-87. Vide versão digital deste livro.

L-88. Achar todos os números reais x para os quais $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$.

QL-89. (Korean Mathematics Competition – 2001). Seja $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$, definida para todo número real x. Avalie $f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \cdots + f\left(\frac{2000}{2001}\right)$.

QL-90. (ITA-1997). Dado um número real a com $a > 1$, seja S o conjunto solução da inequação $\log_{1/a}\log_a(\frac{1}{a})^{x-7} \leq \log_{\frac{1}{a}}(x-1)$. Então S é o intervalo

A) [4, + ∞[. **B)** [4, 7[. **C)**]1, 5[. **D)**]1, 4]. **E)** [1, 4[.

▶ **Resp.: (D)**

QL-91. (Romênia, 1990). Achar todas as soluções da equação: $2^x + 3^x + 6^x = x^2$.

QL-92. Resolva, em R, a inequação: $\frac{5.3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geq 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

QL-93. Resolva, em R, a inequação: $-3 + \log_2 x^6 < \sqrt{7 + \log_2 x^2}$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-L(2)

DRN-L49:

Coloque todos os termos na mesma base.

▶ **Resp.:** P = 1.

DRN-L50:

Veja a construção do conjunto de Cantor. A justificativa está no próprio texto sobre ele. Trata-se do subconjunto K'.

DRN-L52:

Por definição, $a^{\log_a x} = x$, para todo x real e $0 < a \neq 1$. Em particular, isso vale para $x \in \{12, 20, 35\}$.

A PG infinita é restrição de uma função exponencial de base q, pois N $\subset R$.

DRN-L53:

$Y^3 - 19Y^2 + 44Y + 64 = (Y + 1)(Y^2 - 20Y + 64)$

Perceba que Y = - 1 não é possível. Logo Y = 4 ou Y = 16, o que nos leva a x = 3 ou x = 15.

▶ **Resp.:** (D).

DRN-L62:

Adaptar a equação dada para aplicar o método usado na questão QL-25, em dois casos possíveis.

▶ **Resp.:** x = -1 ou x = 1.

DRN-L67:

Consideremos a função h(x) = f(x) – x. Como f(x) pertence ao intervalo [0, 1], então 0 ≤ f(x) ≤ 1, para todo x de [0, 1]. Disso segue que h(0) = f(0) ≥ 0 e h(1) = f(1) – 1 ≤ 0. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe um x em [0, 1] tal que h(x) = 0, o que implica f(x) = x.

Obs.: Há um teorema que generaliza essa proposição para R^n chamado de Teorema do ponto fixo de Brouwer.

DRN-L68:

Perceba que o gráfico de f pode ser obtido a partir de transformações sucessivas de $g(x) = (1/2)^x$.

DRN-L69:

Perceba uma PG na soma.

▶ **Resp.:** (D).

DRN-L70:

Coloque a primeira equação na forma exponencial e use monotonicidade para deduzir que x = y.

▶ **Resp.:** x = y = 2.

DRN-L71:

Faça $a = 3^{(x-1)}$ no 6° termo e obtenha $\frac{a^2 + 7}{a + 1} = 4$.

DRN-L72:

Observe que k ≥ 10 e faça $x = \log_{10}{}^k$ para chegar em $\sqrt{x - 1} > \frac{5x - 6}{4}$. Verifique ainda: a função do 1° membro é côncava(f"(x) ≤ 0) e se anula em x = 1; e que $\sqrt{x - 1} = \frac{5x - 6}{4}$ tem solução x = 2. Deduza que a desigualdade ocorre no intervalo [1, 2), o que implica $10^1 \leq k < 10^2$.

DRN-L75:

Use o sinal da derivada para deduzir que f é injetiva em R. Depois verifique que a imagem de f é R, fazendo $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Faça o cálculo da inversa e obtenha no final $f^{-1}(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2+1})$.

Obs.: É possível mostrar que f é crescente sem usar derivada.

DRN-L76:

Use o sinal da derivada para deduzir que f é injetiva em R. Depois verifique, através dos limites laterais, que f é contínua em 0. Mostre que a imagem de f é R, fazendo $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Faça o cálculo da inversa e obtenha no final $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{3-x}, & x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & x \leq 3 \end{cases}$.

▶ **Resp.:** (E).

DRN-L77:

I. Observe que $1 - 1/x > 0$ e a função $g(x) = 1 - 1/x$ é estritamente crescente, para $x > 0$. E como log y é também estritamente crescente, então a função composta f(x) também é crescente.

II. $(2/3)^x$ é bijetiva de R em R^*_+.

III. Faça $x = 1 + h$, com $h > 0$, para concluir que $(x + 1)^x > x$, se $x > 1$. Para $0 < x \leq 1$, não há solução real positiva, pois $(x + 1)^x > 1$, para $x > 0$.

▶ **Resp.:** (B)

DRN-L78:

Sabemos que duas primitivas de uma função diferem por uma constante e que a derivada de e^x é e^x . Então qualquer primitiva dessa função é da forma $g(x) = e^x + c$. Como2 f = f', e f(0) = 1, então precisamos saber qual o valor de c que satisfaz isso. Temos que $g(0) = 1 + c$. Se f(0) = g(0), então c = 0. Portanto, a única função que satisfaz as duas condições dadas é $f(x) = e^x$. Perceba que se f(0) = 2, então a resposta seria $f(x) = e^x + 1$. Ou seja, para cada valor inicial f(0) temos uma solução específica. Um caso mais geral desse problema seria: $f'(x) = kf(x)$, f(0) = 2. Nesse caso devemos lembrar que a função $f(x) = e^{kx}$ tem como derivada $f'(x) = ke^{kx}$. Logo toda primitiva de ke^{kx} tem a forma $g(x) = e^{kx} + c$. Disso segue que $g(0) = 1 + c = 2 = f(0) \Rightarrow c = 1$, o que nos leva a $f(x) = e^{kx} + 1$. Por isso, que esse tipo de problema é, comumente, chamado de problema do valor inicial.

DRN-L79:

A equação dada pode ser escrita na forma $f''(x) = k[f'(x)]^2$. Isso nos faz lembrar da função exponencial $y(x) = e^{kx}$, cuja derivada é $y'(x) = ke^{kx}$. Devemos pois buscar uma função que se "aproxime" dessa para chegarmos na equação dada. Uma "variação" dela é a função $h(x) = e^{kf(x)}$. Sua derivada é $h'(x) = kf'(x)e^{kf(x)}$. Como f, por hipótese, é diferenciável duas vezes, então a função $F(x) = f'(x)e^{-kf(x)}$ é derivável e sua derivada é $F'(x) = -k[f'(x)]^2e^{-kf(x)} + f''(x)e^{-kf(x)}$, que equivale a $F'(x) = e^{-kf(x)}(f''(x) - k[f'(x)]^2)$. Sendo $f(a) = f(b)$ e $f'(a) = f'(b)$, então $F(a) = F(b)$. Assim, pelo teorema de Rolle ou pelo teorema do valor médio de Lagrange, temos que existe $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Logo $e^{-kf(c)}(f''(c) - k[f'(c)]^2) = 0$. E como $e^{-kf(c)} > 0$, então $f''(c) - k[f'(c)]^2 = 0$, o que conclui a prova.

Obs.: Perceba aqui nessa resolução a presença das Aproximações Multifárias. Na verdade, relatamos apenas as principais segundo o caminho incial escolhido. DRN-L80:

Usar MA ≥ MG para chegar em $t_n \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{(n-1)/n}$ e observar que $a_i < 1$.

DRN-L82:

Faça f'(x) = ke^{ax} e obtenha k = 5 e a = 2.

DICA-L83:

Observe que se f(x) = -1/x, então f'(x) = $1/x^2 = [f(x)]^2$, mas não existe f(0). Então faça f(x) = 1/(a – x).

DRN-L84:

Lembrar de b = $e^{\ln(b)}$.

DRN-L88:

Faça a = 2^x e b = 3^x.

▶ **Resp.:** x = - 1 ou x = 1.

DRN-L89:

$f(x) + f(1 - x) = 1$.

▶ **Resp.:** 1000.

DRN-L90:

Faça a = 2^x e b = 3^x.

▶ **Resp.:** x = 0 é a única solução.

DRN-L91:

Para x < 0 temos que x^2 é decrescente e $2^x + 3^x + 6^x$ é crescente. Portanto, x = - 1 é a única solução da equação dada, para x < 0. Agora vamos analisar o caso x ≥ 0. Nesse caso, tanto x^2, como $2^x + 3^x + 6^x$ são crescentes. Logo temos que usar outro método. Vemos que se x ≥ 0, então $x^2 = 2^x + 3^x + 6^x \geq 3$, o que implica $x \geq \sqrt{3}$ e assim [x] ≥ 1. Mas sabemos que em virtude da definição,1 + [x] ≥ x ≥ [x], o que nos leva a $2^x \geq 2^{[x]} = (1 + 1)^{[x]} \geq 1 + [x] \geq x$ e, por conseguinte, obtemos $6^x > 4^x = (2^x)^2 \geq x^2$. Deduzimos disso que $2^x + 3^x + 6^x > x^2$, o que contradiz a hipótese. Concluímos, assim, que a única solução da equação dada é x = - 1.

DRN-L92:

Mostre primeiro que x > 0. Depois, adequando o primeiro membro, faça a mudança de variável y = $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ou y = $\left(\frac{9}{4}\right)^x$.

▶ **Resp.:** 0 < x ≤ 1.

DRN-L93:

Faça a mudança de variável y = $\log_2 x^2$ para obter $\sqrt{y+7} > 3(y+7) - 24$. Em seguida faça z = $\sqrt{y+7}$.

▶ **Resp.:** - 2 ≤ x ≤ - $\frac{\sqrt{2}}{16}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{16} \leq$ x < 2.

QL-94. Resolva, em R, o sistema: $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3(\frac{y}{x}), \\ 2^{x+2} + 8^x = 5.4^y. \end{cases}$

QL-95. (ITA-2002). Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2 \ln\frac{2}{3} + x \ln 6 - \frac{1}{4} \ln\frac{3}{2}$$

temos que

A ( ) a equação $f(x) = 0$ não possui raízes reais.
B ( ) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima.
C ( ) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.
D ( ) o valor máximo de f é $\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.
E ( ) o valor máximo de f é $2\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

QL-96. Prove que log 2 é irracional.

QL-97. Prove que log 21 é irracional.

QL-98. Vide versão digital deste livro.

QL-99. Vide versão digital deste livro.

QL-100. Resolva, em R, a equação: $25.3^{|x-3|+|x-5|} + 9.5^{|x-4|+|x-6|} = 450$.

QL-101. Vide versão digital deste livro.

QL-102. Resolva, em R, a inequação: $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0.$

QL-103. Resolva, em R, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

QL-104. Sabendo que x e y são números reais, resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = e^y - e^x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

QL-105. Achar todos os números reais $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$|\log(xx_1)| + |\log(xx_2)| + \cdots + |\log(xx_n)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_1}\right)\right| + \left|\log\left(\frac{x}{x_2}\right)\right| + \cdots + \left|\log\left(\frac{x}{x_n}\right)\right| = |\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n|.$$

QL-106. (ITA-2019). Sabendo que x pertence ao intervalo fechado [1, 64], determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 . \log_2 \frac{8}{x}.$$

QL-107. (Universidade Lomonosov de Moscou – 1976). Resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^x 3^{-y} = 12, \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$$

QL-108. (Universidade Lomonosov de Moscou – 1992). A função ímpar *f(x)* está definida pela fórmula *f(x)* = $\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$ para x > 0. Achar a fórmula que define a função *f(x)* para x < 0. Resolver a equação f(x) = 3.

▶ **Resp.:** *f(x)* = - $\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$, se x < 0; x = 81 ou x = - 1/9.

QL-109. (Universidade Lomonosov de Moscou – 1998). Resolver a inequação $\log_a(3a^x - 5) < x + 1$, para todo valor admissível de a.

▶ **Resp.:**

se 0 < $a < 1$, então x < $\log_a\left(\frac{5}{3-a}\right)$;

se 1 < $a < 3$, então $\log_a\left(\frac{5}{3}\right) < x < \log_a\left(\frac{5}{3-a}\right)$;

se $a \geq 3$, então x > $\log_a\left(\frac{5}{3}\right)$.

QL-110. (IME-(1977/1978). Se *x(t)* é o número de parasitas existentes no tempo *t,* em uma população hospedeira *y(t),* a relação entre as duas populações pode ser descrita por $y^A e^{By} = kx^R e^{Sx}$, em que *A, B, R* e *S* são constantes apropriadas. Pede-se determinar dy/dx.

QL-111. A Lei de Boyle afirma que, entre a pressão *p* e o volume *v* de um gás confinado, existe a relação *pv* = *k*, em que *k* é uma constante, ou equivalentemente, *p* = *k/v*, com *v* não nulo. Mostre que entre *dp* e *dv* existe a relação *pdv* + *vdp* = *0.*

QL-112. (ITA-1990). Numa progressão geométrica de três termos a razão é e^{-2a}, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

A) ln 2.

B) -ln(5/2).

C) ln$\sqrt{3}$.

D) – ln$\sqrt{2}$.

E) Não existe número real a nestas condições.

▶ **Resp.:** (D).

QL-113. (ITA-1990). Sabendo-se que 3x -1 é fator de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ então as soluções reais da equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$ somam:

A) $-\log_3(12)$. **B)** 1. **C)** $-\frac{1}{3}\log_3(12)$. **D)** – 1. **E)** $\log_3(7)$.

▶ **Resp.:** (A)

QL-114. Vide versão digital deste livro.

QL-115. Vide versão digital deste livro.

QL-74. Vide versão digital deste livro.

QL-116.(ITA-1996). Se (x_0, y_0) é uma solução real do sistema $\begin{cases}\log_2(x+2y) - \log_3(x-2y) = 2 \\ x^2 - 4y^2 = 4\end{cases}$, então $x_0 + y_0$ é igual a:

A) 7/4. **B)** 9/4. **C)** 11/4. **D)** 13/4. **E)** 17/4.

▶ **Resp.:** (D)

QL-117.(IME-2001/2002). Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e n > 0, em que n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

▶ **Resp.:** $\frac{2XY}{n[2Y+(n-1)X]}$

QL-118. (IMO-2006). Determine todos os pares (x, y) de inteiros tais que $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-L(3)

DRN-L94:

▶ **Resp.:** As soluções são (2, 32) e (32, 2).

DRN-L95:

A função f é quadrática. Temos que: $\Delta = (\ln 6)^2 - (\ln(3/2))^2 = (\ln 6 + \ln(3/2))(\ln 6 - \ln(3/2)) = \ln 9.\ln 4 = 4\ln 3.\ln 2 > 0$; logo f(x) tem duas raízes reais e distintas.

E como ln(2/3) < 0, então a concavidade do gráfico(parábola) é para baixo. Isso exclui as alternativas A, B e C. Restam D e E.

Calculemos o valor máximo de f(x): $f(x_V)$, em que x_V é a abscissa do vértice.

$$X_V = -b/2a = -\ln 6/2\ln(2/3) \text{ e } f(x_V) = \frac{(ln6)^2 - (\ln(\frac{3}{2}))^2}{4\ln(\frac{3}{2})} = \frac{\Delta}{4\ln(\frac{3}{2})} = \frac{4ln3.ln2}{4(ln3 - ln2)} = \frac{ln3.ln2}{ln3 - ln2}.$$

Concluímos que a alternativa correta é (D).

DRN-L96:

Suponha log 2 = a/b, com a e b inteiros positivos. Disso segue que $2 = 10^{a/b}$. E lembre-se do Teorema Fundamental da Aritmética.

DRN-L100:

Use a desigualdade $|a| + |b| \geq |a - b|$ e também a equivalência $|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \leq 0$.

▶ **Resp.:** Conjunto solução é o intervalo real [4, 5].

DRN-L102:

Use y = $(x + 1)/(x - 1)$ e perceba que y > 1.

▶ **Resp.:** x > 3.

DRN-L103:

Use a desigualdade MA ≥ MG e a propriedade: A = B e A ≥ m ≥ B $\Longrightarrow$ A = m e B = m.

▶ **Resp.:** x = $\log_4 2\sqrt{3}$, $y = \log_4(2/\sqrt{3})$.

Resolução:

Seja (*) o sistema dado. Aplicando MA ≥ MG ao primeiro membro da primeira inequação de (*) chegamos em $2\sqrt{3.4^{x+3y-2}} \leq 4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} \leq 2$. (1)

Usando a segunda desigualdade de (*) em (1), obtemos: $2 = 2\sqrt{3.4^{-\log_4 3}} \leq 4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} \leq 2$.

Logo $4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} = 2$ e $2\sqrt{3.4^{x+3y-2}} = 2 \Leftrightarrow x + 3y = 2 - \log_4 3$.

Além disso, em virtude de MA ≥ MG, temos que $4^{x+y-1} = 3.4^{2y-1}$. Portanto, o sistema de inequações (*) se transforma no sistema equivalente de equações:

$4^{x+y-1} = 3.4^{2y-1}$

$x + 3y = 2 - \log_4 3$, que é equivalente ao sistema

$x - y = \log_4 3$

$x + 3y = 2 - \log_4 3$.

Resolvendo esse sistema, encontramos a solução: $\boldsymbol{x = \log_4 2\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{y = \log_4(2/\sqrt{3})}$.

DRN-L104:

Use a monotonicidade da função *f(x)* = $x + e^x$.

▶ **Resp.:** Soluções: (-2, -2) e (2, 2).

Resolução:

Da primeira equação do sistema deduzimos que $x + e^x = y + e^y$. Fazendo $f(x) = x + e^x$, podemos interpretar o segundo membro como $f(y)$. Sendo *f* uma função crescente, temos que $f(x) = f(y) => x = y$.

Usando isso na segunda equação do sistema, encontramos: $3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Logo as soluções reais são: (2, 2) e (-2, -2).

DRN-L105:

Observe que $|\log(xx_1)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_1}\right)\right| \geq \left|\log(xx_1) - \log\left(\frac{x}{x_1}\right)\right|$.

▶ **Resp.:** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ e $x = 1$.

Resolução:

Por definição de logaritmo real, $x_i > 0$, para i = 1, 2, ..., n.

Seja S a soma do 1º membro da igualdade dada. Então

$$S = |\log(xx_1)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_1}\right)\right| + |\log(xx_2)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_2}\right)\right| + \cdots + |\log(xx_n)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_n}\right)\right|.$$

Mas $|\log(xx_i)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_i}\right)\right| \geq \left|\log(xx_i) - \log\left(\frac{x}{x_i}\right)\right| = 2|\log(x_i)|$.

Então, $S \geq 2(|\log(x_1)| + |\log(x_2)| + \cdots + |\log(x_n)|) \geq 2|\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n|$.

A última desigualdade é decorrente da desigualdade triangular generalizada. Mas, por hipótese, $S = |\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n| \geq 0$. Logo $S \geq 2S$ e $S \geq 0$, que equivale a $0 \leq S \leq 0$. Portanto, $S = 0 \Leftrightarrow |\log(xx_i)| = \left|\log\left(\frac{x}{x_i}\right)\right| = 0$, para todo i = 1, 2, ..., n. Segue dessas últimas igualdades: $xx_i = 1$ e $\frac{x}{x_i} = 1$, que equivalem a $x = x_i \;\; e \;\; x = \frac{1}{x}$, para todo i = 1, 2, ..., n. Como $x_i > 0$, concluímos que $x = x_i = 1$, para todo i = 1, 2, ..., n.

DRN-L106:

Fazendo y = $\log_2 x$, temos que: $f(x) = y^4 + 12y^2(3 - y) = y^4 - 12y^3 + 36y^2$.

E fatorando esta última expressão, obtemos: $f(x) = (y^2 - 6y)^2 = (-y^2 + 6y)^2$.

Pondo $g(y) = -y^2 + 6y$, podemos escrever $f(x) = [g(y)]^2$.

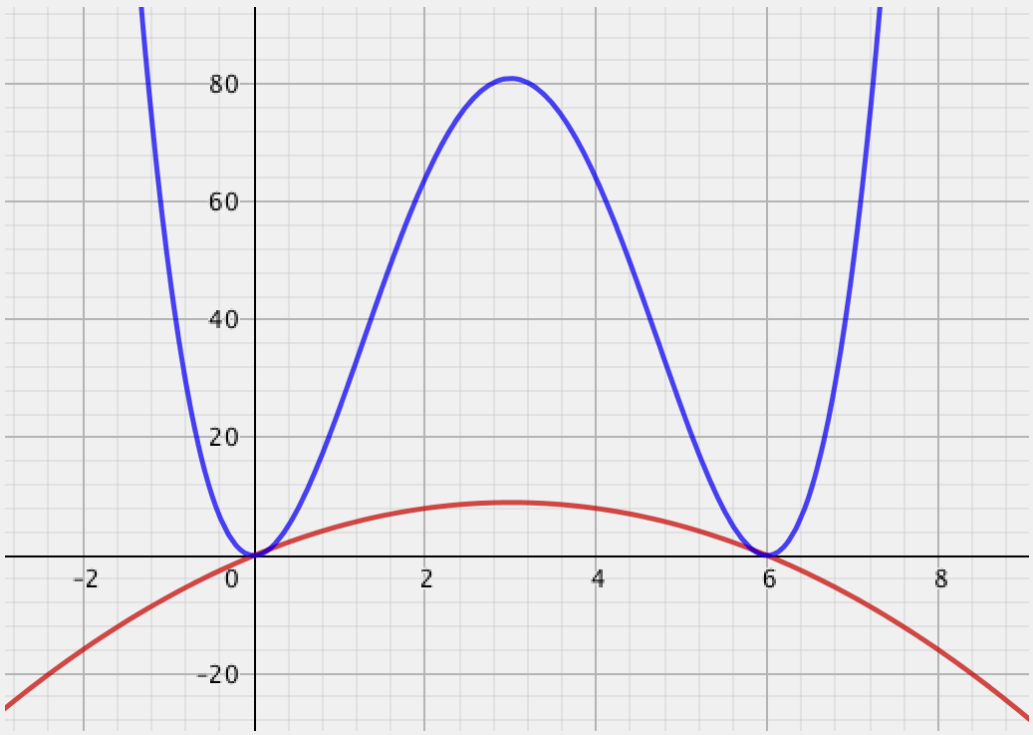
As raízes de g(y) são 0 e 6. Logo g(y) > 0, se 0 < y < 6. Como 1 ≤ x ≤ 64, então 0 ≤ y = $\log_2 x$ ≤ 6.

Então, neste intervalo, o máximo de f é igual ao máximo de $[g(y)]^2$.

Mas o máximo de g(y) ocorre em y = 3.

Assim, podemos concluir que o máximo de f(x) no intervalo [1, 64] é $[g(3)]^2 = [9]^2 = 81$.

Obs.: Para ilustrar graficamente o que acontece nesta questão, veja a figura a seguir. Nela temos o gráfico de g(y) e de h(y) = $[g(y)]^2$. Observe, usando derivadas, que h'(y) = 2g(y).g'(y) = 0 => g(y) = 0 ou g'(y) = 0 => y = 0 ou y = 6 ou y = 3, que são os pontos críticos de h, sendo y = 3 ponto de máximo local e os outros dois pontos de mínimo local.



DRN-L107:

Fazendo w = $3^{\frac{x-y}{2}}$ na primeira equação do sistema se obtém: $w^2 + w - 12 = 0$.

Resolvendo esta equação, encontramos: w = - 4 ou w = 3. Como w > 0, então w = 3, que implica $3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \Leftrightarrow x = y + 2$.

Substituindo esse valor de x na segunda equação, obtemos:

$3^{y+2} + 3^{-y} = 10$, que equivale a $9z^2 - 10z + 1 = 0$, em que $z = 3^y$.

Resolvendo esta última equação, encontramos: z = 1 ou z = 1/9.

Disso segue y = 0 ou y = - 2. Sendo x = y + 2, concluímos que as soluções do sistema são: (0, - 2) e (2, 0).

DRN-L110:

Use o conceito de diferencial: Se z = f(y), então dz = f'(y)dy. Do mesmo modo, se w = g(x), então dw = g'(x)dx.

▶ **Resp.:** $dy/dx = \frac{(R + Sx)y}{(A + By)x}$.

DRN-L113:

Pondo $y = 3^x$, a equação dada se transforma na equação: $12y^3 - 19y^2 + 8y - 1 = 0$.

Dividindo o primeiro membro dessa equação por 3y – 1, obtemos: $4y^2 - 5y + 1$.

Logo podemos rescrever a equação dada na forma fatorada:

$(3y - 1)(4y^2 - 5y + 1) = 0$, que implica y = 1/3 ou y = 1 ou y = ¼.

Segue desses resultados: $3^x = 1/3 \Leftrightarrow x = -1$;

$3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ e $3^x = ¼ \Leftrightarrow x = -\log_3 4$.

Portanto a soma das soluções da equação dada é:

$0 - 1 - \log_3 4 = -\log_3 3 - \log_3 4 = \mathbf{-\log_3 12}$.

DRN-L116:

A segunda equação do sistema pode ser escrita assim: (x + 2y)(x – 2y) = 4, que equivale, dentro das condições de existência, a $\log_2(x + 2y) + \log_2(x - 2y) = 2$.

Subtraindo a primeira equação dessa última, obtemos:

$\log_2(x - 2y) = -\log_3(x - 2y)$ => x – 2y = 1 $\Leftrightarrow$ x = 2y + 1.

Substituindo esse valor de x na segunda equação do sistema original, chegamos em y =3/4.

Logo x = 10/4 e , por conseguinte, **x + y = 13/4.**

DRN-L117:

Temos por hipótese que c = $a.aq.aq^2 \ldots aq^{n-1} = a^n.q^{1+2+\cdots+(n-1)} = a^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Disso vem $\log_b c = n\log_b a + \frac{n(n-1)}{2}\log_b q = \frac{n}{X} + \frac{n(n-1)}{2Y} = \frac{2nY+n(n-1)X}{2XY}$.

Logo $\log_c b = \frac{1}{\log_b c} = \frac{2XY}{n[2Y+(n-1)X]}$.

DRN-L118:

Se x = - 1, temos $y^2 = 2$, o que não tem solução em Z.

E se x < - 1, temos 1 < $y^2 < 2$, o que também não tem solução em Z. Logo x ≥ 0.

Por outro lado, desde que $(-y)^2 = y^2$, basta encontrarmos as soluções com y > 0.

Para x = 0, obtemos $y^2 = 4$, que dá as soluções (0, - 2) e (0, 2).

Para x = 1 e x = 2, não obtemos soluções.

Vamos, a seguir, analisar os casos para x > 2.

Como para x > 0, o número $1 + 2^x + 2^{2x+1}$ é ímpar, então concluímos que **y é ímpar**.

Seja y = 2n + 1. Então $2^x(2^{x+1} + 1)$ = 4n(n + 1).

Sendo mdc$(2^x, 2^{x+1}) = 1$ e mdc(n, n + 1) = 1, deduzimos que os números $\frac{4n}{2^x}$ ou $\frac{4(n+1)}{2^x}$ são inteiros.

Caso-1:

Seja *4n* = $a.2^x$. Então $2^x(2^{x+1} + 1)$ = $a.2^x(a.\frac{2^x}{4} + 1)$, o que nos leva a $4(2^{x+1} + 1) = a^2.2^x + 4a$ ou $8.2^x + 4 = a^2.2^x + 4a$. Disso resulta $2^x = \frac{4(1-a)}{a^2-8} \geq 8$. Os valores possíveis de a para a igualdade são 1 e 2, que contradizem a desigualdade.

Caso-2:

Seja *4(n + 1)* = $a.2^x$. Procedendo de forma análoga ao caso-1, deduzimos que $2^x = \frac{4(1+a)}{a^2-8} \geq 8$. Os valores possíveis de a para a igualdade são 1, 2 e 3.

Substituindo esses valores, verificamos que apenas o 3 satisfaz a desigualdade, o que resulta em x = 4.

Com isso, obtemos $y^2 = 529$, o que leva a duas novas soluções: (4, - 23) e (4, 23).

Portanto, as únicas soluções da equação dada são: (0, - 2), (0, 2), (4, - 23) e (4, 23).

QL-119. (IME-2019). Definimos a função $f : N \to N$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{[\log_2 n]}, n > 1. \end{cases}$$

Determine *f*(*f*(2019).

Obs.: [k] é o maior inteiro menor ou igual a k.

QL-120. (IME-2019). Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}.$$

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 8.
E) 16.

QL-121.(Bulgarian Mathematical Competitions, Winter-2005). Achar todos os valores do parâmetro real *a* tais que a equação Lg(*a*x + 1) = Lg(x – 1) + Lg(2 – x) tenha exatamente uma solução.

QL-122. A) Prove que $\log_4 18$ é um número irracional.

A) Se c e d são dois inteiros não negativos e distintos, então prove que o logaritmo decimal $\log(2^c 5^d)$ é um número irracional.

QL-123. Prove que para todo natural $n > 1$, vale a desigualdade: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

QL-124.(Bulgarian Mathematical Olympiad, Regional-2004). Achar todos os valores de x $\in (-\pi, \pi)$ tais que os números $2^{senx}, 2 - 2^{senx + cosx}$ e 2^{cosx} sejam termos consecutivos de uma progressão geométrica.

QL-125. Vide versão digital deste livro.

QL-126. Vide versão digital deste livro.

QL-127. Vide versão digital deste livro.

QL-128. Vide versão digital deste livro.

QL-129. Prove que se $a > 0, b > 0$, então, para todos x e y reais, vale a seguinte desigualdade:

$$a.2^x + b.3^y + 1 \leq \sqrt{4^x + 9^y + 1}.\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

QL-130. Vide versão digital deste livro.

QL-131. Vide versão digital deste livro.

QL-132. Vide versão digital deste livro.

QL-133. Resolva, em R, a inequação: $(x^2 + x + 1)^x < 1$.

QL-134. Vide versão digital deste livro.

QL-135.(Bulgarian Mathematical Competitions, Spring-2005). Resolva a equação:

$$(x + 6)5^{1-|x-1|} - x = (x + 1)|5^x - 1| + 5^{x+1} + 1.$$

QL-136.(Bulgarian Mathematical Competitions, Regional-2005). Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3.4^x + 2^{x+1}.3^y - 9^y = 0. \\ 2.4^x - 5.2^x.3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

QL-137.(Bulgarian Mathematical Competitions, Regional-2005). Encontrar todos os valores do parâmetro real a tal que a equação $\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{(ax)^2}(7^2(4^x - 3^x) + \log_{(ax)^3} 8^{x-1}$.

Tenha uma solução.

QL-138. Qual é a representação em forma de fração contínua da razão áurea?

QL-139.(Bulgarian Mathematical Competitions, Spring-2006). Resolva o sistema

$$\begin{cases} (4^{\sqrt{x^2+x}} + 7.2^{\sqrt{x^2+x}} - 1)sen(\pi y) = 7|sen(\pi y)| \\ x^2 + 4x + y^2 = 0. \end{cases}$$

QL-140.(Bulgarian Mathematical Competitions, Regional-2006). Achar o máximo da função

$f(x) = \frac{\log x.\log x^2 + \log x^3 + 3}{log^2 x + \log x^2 + 2}$ e os valores de x em que ele é atingido.

QL-141.(Bulgarian Mathematical Competitions, Spring-2006). Considere as equações

$3^{2x+3} - 2^{x+2} = 2^{x+5} - 9^{x+1}$ (1) e $a5^{2x} + |a - 1|5^x = 1$, (2) em que a é um número real.

A) Resolva a equação (1).

B) Ache os valores de a tais que as equações (1) e (2) sejam equivalentes.

QL-142.(Bulgarian Mathematical Competitions, Winter-2004). Achar todos os valores de a tais que a equação $4^x - (a^2 + 3a - 2)2^x + 3a^3 - 2a^2 = 0$ tenha uma única solução.

QL-143. (IME-2013/2014) Sabe-se que $y.z.\sqrt{z.\sqrt{x}} = x.y^3.z^2 = \frac{x}{z.\sqrt{y.z}} = e$, em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor x + y + z é

A) $e^3 + e^2 + 1$.

B) $e^2 + e^{-1} + e$.

C) $e^3 + 1$.

D) $e^3 + e^{-2} + e$.

E) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$.

QL-144.(ITA-2020) Dado $a \in$ R, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. Se p e q são racionais, então a é racional.

III. Se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

A) apenas I.

B) apenas II.

C) apenas I e II.

D) apenas I e III.

E) todas.

QL-145.(IME-2020) Sabe-se que S = x + y + z, onde x, y e z são soluções inteiras do sistema a seguir.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

A) 84

B) 168

C) 234

D) 512

E) 600

QL-146.(IME-2020) Uma progressão geométrica é formada com os números naturais *A*, *B* e *C*, nessa ordem. O log(*A*) possui a mesma mantissa, M, do log(*B*) e *C* é a característica do log(*A*). Sabe-se que M = log(*C*) e que *C* possui o maior valor possível. O valor da mantissa do log(*ABC*) é:

A) M

B) 2M

C) 3M

D) 3M - 2

E) 3M - 3

QL-147.(IME-2020) Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ com as condições: $a_1 > 0$; $a_2/a_1 > 1$; e $b_2 - b_1 > 0$.

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de *n*, o valor de α deverá ser:

A) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/b_2}$.

B) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/b_1}$.

C) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(b_2-b_1)}$.

D) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(b_1-b_2)}$.

E) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(b_2 b_1)}$.

QL-148.(ITA-1991) O conjunto dos números reais que verificam a inequação 3log x + log(2x + 3)^3 ≤ 3log 2 é dado por

A) $\{x \in R: x > 0\}$.

B) $\{x \in R: 1 \leq x \leq 3\}$.

C) $\{x \in R: 0 < x \leq 1/2\}$.

D) $\{x \in R: \frac{1}{2} \leq x < 1\}$.

E) N.D.A.

Obs.: log a denota o logaritmo de a na base 10.

▶ **Resp.:** C.

QL-149. (JNCF) A FAO do Brasil publicou, em 2016, o estudo "SUPERAÇÃO DA FOME E DA POBREZA RURAL: INICIATIVAS BRASILEIRAS". Nele, encontramos o seguinte texto:

"Desde 2003 o Brasil já retirou 36 milhões de pessoas da extrema pobreza, sendo 22 milhões desde 2011; e em 2014 o país saiu do mapa da fome elaborado pela FAO (Brasil, 2015, p. 12, 35 e 139) e superou a meta de redução da mortalidade infantil (Caisan, 2013).

A taxa de extrema pobreza nacional caiu de 7,6%, em 2004, para 2,8%, em 2014, e beneficiou principalmente as crianças de até 5 anos de idade. A taxa de pobreza, no mesmo período, caiu de 22,3% para 7,3%. O índice de Gini, que mede a desigualdade na distribuição da renda, caiu de 0,535 para 0,494, nos rendimentos domiciliares, entre 2004 e 2014, sendo que os 10% mais pobres foram os maiores beneficiados com a melhora na distribuição da renda (MDS, 2015ª).

Os avanços para as populações residentes em áreas rurais são ainda mais notáveis: a extrema pobreza caiu de 21,8%, em 2002, para 7,6%, em 2014, o que representou uma queda de 65,2%; e a pobreza foi reduzida de 49%, em 2002, para 20,2%, em 2014, uma redução de 58,7% (MDS, 2015b)."

Com base nesse texto e adotando $\left(\frac{190}{545}\right)^{0,083}$ = 0, 916, inferimos que a taxa média anual de queda da extrema pobreza rural, no período de 2002 a 2014, foi de

A) 1,2%. **B)** 8,4%. **C)** 4,9%. **D)** 3,5%. **E)** 1,2%.

QL – 150. Demonstre que para a, b $\in \mathbb{R}$, com o < b < a, vale a desigualdade:

$$ln(a/b) > 2(a - b)/(a + b).$$

QL – 151. Resolva no conjunto dos números inteiros a equação x = log (9x + 1).

QL – 152. (Função de Ativação de uma Rede Neural). As "Redes Neurais" são muito importantes nos algoritmos usados em Inteligência Artificial e aplicados no Google, no Facebook, na Amazon, na Netflix, etc. Uma das funções de "ativação" mais usadas em "redes neurais" é a função real tangente hiperbólica definida pela regra $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. O principal motivo desse seu uso é o formato de seu gráfico.

A) Determine o domínio de f e o seu conjunto imagem.

B) Prove que f é ímpar e esboce o seu gráfico. Justifique o formato do gráfico.

C) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f que tem declive máximo.

D) Que mudança importante ocorre no gráfico de f se trocarmos x por 1,5x?

E) Prove que $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x).f(y)}$.

F) Determine a inversa de f.

Obs.: Mais à frente comentamos sobre as funções hiperbólicas e também sobre as redes neurais e as funções de ativição.

QL – 153. (Função de Fibonacci). Uma função f : R → R tal que f(x + 2) = f(x + 1) + f(x) é denominada de função de Fibonacci.

A) Prove que existe uma única função exponencial de Fibonacci e que sua base é a razão áurea φ.

B) Verique que a derivada f"(x) dessa função exponencial é também uma função de Fibonacci.

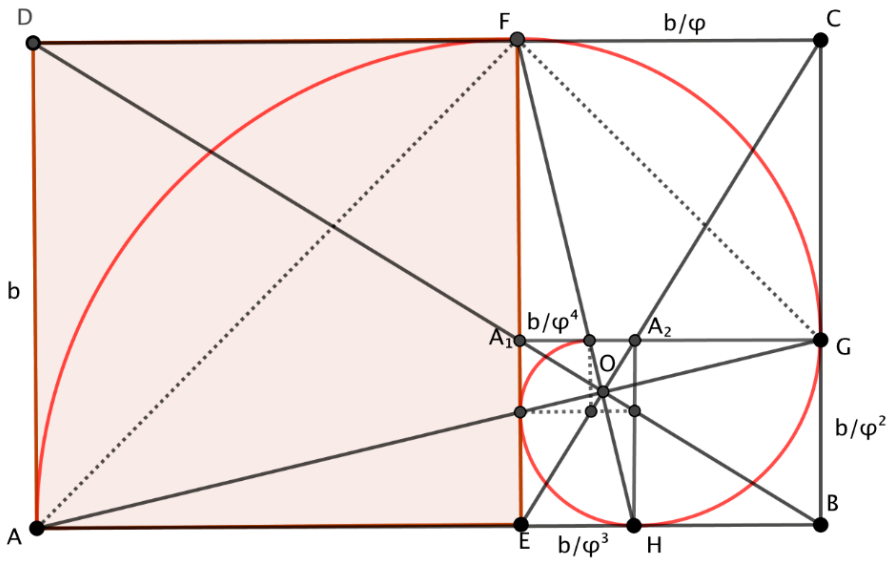
C) Se f é uma função de Fibonacci com $F_0 = 0$ e $F_1 = F_2 = 1$, então vale a relação $f(x + n) = F_n.f(x + 1) + F_{n-1}.f(x)$, para todo x real e n ≥ 2 inteiro.

D) Prove que a função g : R → R, definida por $g(x) = (\frac{1}{\varphi})^x$ satisfaz à equação

$$g(x + 2) = - g(x + 1) + g(x).$$

QL – 154. (Espiral de Fibonacci ou Espiral Áurea). Quando se usa coordenadas polares (ρ, θ), a função exponencial $\rho(\theta) = ce^{k\theta}$, com c e k constantes reais, tem como gráfico uma espiral plana, comumente chamada de espiral logarítmica. Deseja-se determinar a função exponencial que melhor representa a Espiral de Fibonacci ou Espiral Áurea. Essa espiral pode ser desenhada com a construção geométrica descrita a seguir.

I) Seja ABCD um retângulo áureo, isto é, a razão AB/BC é a razão áurea φ. Suponha que BC = b. Trace o segmento FE formando o quadrado AEFD de lado b e e com vértice em E trace o arco AF. A seguir trace o segmento A_1G formando o quadrado A_1GCF de lado b/φ e com vértice em A_1 trace o arco FG. Depois, de modo análogo trace o segmento A_2H formando o quadrado A_2HBG e assim sucessivamente, conforme ilustra a figura a seguir.



II) Trace também as diagonais BD e CE. Perceba que essas diagonais contêm as diagonais dos retângulos áureos menores, respectivamente. Prove que BD e CE são perpendiculares. Trace também AG e FH e mostre que são perpendiculares. Seja O o ponto de interseção de AG e FH. Prove que O é também o ponto de interseção de BD e CE. Observe que na passagem de um retângulo áureo para o seguinte ocorre uma rotação horária de 90º combinada com uma contração(ou razão de semelhança) de 1/φ.

Usando o ponto O como origem dos raios ρ do sistema de coordenadas polares e a reta orientada OG como eixo de referência para medir, no sentido anti-horário, o ângulo θ, determine a função exponencial $\rho(\theta) = ce^{k\theta}$ cujo gráfico passa pelos pontos F e G. Considere G = (1, 0) e use a semelhança dos triângulos retângulos AOF e GOF para deduzir as coordenadas de F.

NOTA(ESPIRAL DE FIBONACCI)

Diversos vídeos disponíveis no YouTube mostram a construção de um retângulo áureo e os primeiros passos da construção da espiral de Fibonacci. A espiral esboçada assim, como ilustra a figura anterior, é formada por arcos de 90º sucessivos. Ela foi construída com o auxílio do Geogebra. O gráfico da exponencial $\rho(\theta) = ce^{k\theta}$ passa por todos os pontos extremos dos arcos, mas não coincide com esses. O gráfico dessa função, portanto, dá uma boa "aproximação exponencial", em coordenadas polares, da espiral de Fibonacci. E qual a razão do nome Fibonacci? Verifique que adotando a ordem inversa da construção, você obtém a seguinte sequência de medidas dos lados dos quadrados: (1, φ, 1 + φ, 1 + 2 φ, 2 + 3 φ, 3 + 5 φ, 5 + 8 φ, 8 + 13 φ, ...), que tem a propriedade da sequência de Fibonacci: a partir do 3º termo, todo termo é igual à soma dos dois termos antecessores imediatos. Além disso, os coeficientes de φ formam a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8 , 13,...

A função exponencial pedida é $\rho(\theta) = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}$. Observe que quando $\theta < 0$, a espiral se prolonga no sentido horário para o ponto O, que é o ponto de convergência da espiral, pois $\lim_{\theta \to -\infty} \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}} = 0$. Para perceber melhor a beleza desses resultados, reveja os comentários expostos no 1º capítulo sobre sequência de Fibonacci e razão áurea e os vídeos referidos.

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

As funções reais cosh(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e senh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, conhecidas como **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**, respectivamente, têm a propriedade fundamental dada pela identidade: $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$. Perceba que o ponto (cosh(x), senh(x)) pertence à hipérbole $u^2 - v^2 = 1$. Daí vem o nome **funções hiperbólicas**, em analogia com as **funções circulares** senx e cosx da trigonometria, em que o ponto (cos x, sen x) pertence ao círculo $u^2 + v^2 = 1$. De maneira análoga, se definem outras funções hiperbólicas:

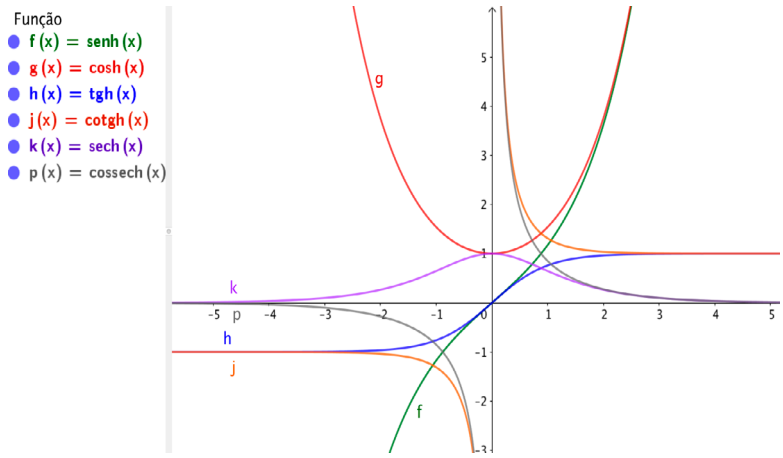
A) tangente hiperbólica: tgh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

B) cotangente hiperbólica: cotgh(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, x ≠ 0;

C) secante hiperbólica: sech(x) $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$;

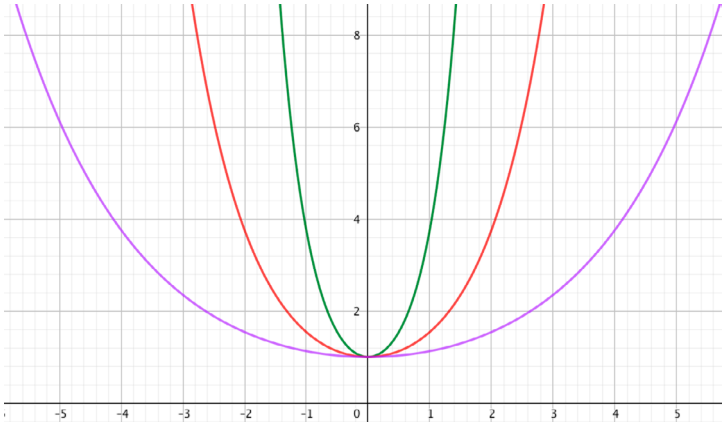
D) cossecante hiperbólica: cosech(x) = $\frac{2}{e^x - e^{-x}}$, x≠ 0.

As funções senh, cosh, tgh e sech são contínuas em R. As outras duas, cotgh e cossech são contínuas em R – {0}, que é o domínio comum delas. Todas elas são deriváveis em seus respectivos domínios. Seus gráficos estão esboçados na figura a seguir, que foi obtida com a ajuda do Geogebra.



Na figura exibida logo à frente, temos os gráficos de cosh(x), cosh(2x) e de cosh(x/2). A forma desses gráficos lembra bem a de uma parábola, mas na verdade, trata-se de outra curva chamada de catenária. Perceba que *a função hiperbólica cosh(x) é dada pela média aritmética de duas funções exponenciais*, sendo uma crescente e outra decrescente:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

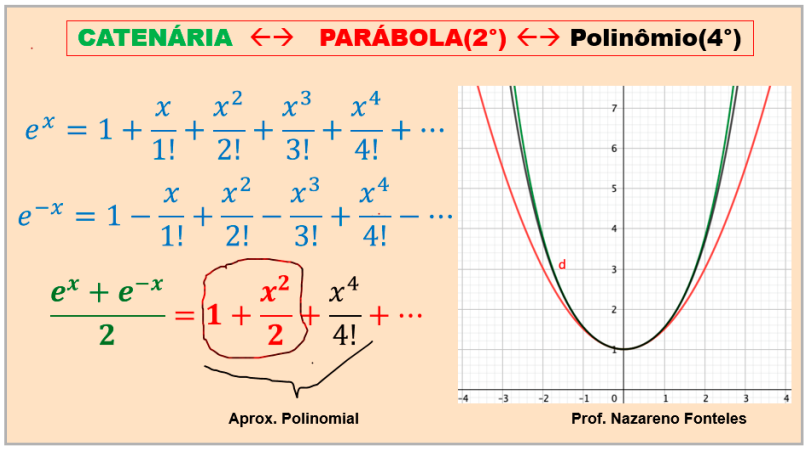


É natural indagarmos:

A) Que tipo de aproximações existem entre as curvas catenária e parábola?

B) que relações existem entre função exponencial e função quadrática? Veremos no capítulo sobre polinômios as explicações mais detalhadas. No entanto, no final da introdução deste livro colocamos um slide sobre isso que resumem essas explicações. Veja que o desenvolvimento em série das funções exponenciais é a parte principal dessas explicações. Ou seja, as aproximações polinomiais das funções exponenciais revelam a proximidade entre as formas dos gráficos das funções hiperbólica cosh(x) e quadrática.

Para maior compreensão, reveja o slide mostrado na introdução.



Um vídeo descontraído e bem ilustrativo da importância prática da catenária está no endereço a seguir. **Acesse o Código QR**

REDES NEURAIS E FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO

As redes neurais são a “alma” das formas avançadas da inteligência artificial. Elas são capazes de aprender a partir de dados e realizar tarefas complexas de forma eficiente e precisa. Uma rede neural típica é composta por três tipos de camadas: a camada de entrada, as camadas ocultas ou intermediárias e a camada de saída. A camada de entrada recebe os dados de entrada, que podem ser imagens, textos, sons ou outros. As camadas ocultas realizam cálculos e transformações nos dados de entrada, usando pesos e funções de ativação. A camada de saída produz os dados de saída, que podem ser classificações, previsões, reconhecimentos ou outros. As camadas são conectadas por sinapses, que transmitem as informações entre os neurônios. Cada neurônio é uma unidade de processamento que recebe, combina e transmite informações.

As redes neurais têm várias aplicações práticas na vida moderna, pois são capazes de aprender a partir de dados e realizar tarefas complexas de forma eficiente e precisa. Algumas das aplicações mais comuns são:

APLICAÇÕES PRÁTICAS

- Reconhecimento de voz: assistentes como Siri e Alexa usam redes neurais para entender e responder aos comandos dos usuários;
- Processamento de imagens: serviços como o Google Fotos usam redes neurais para reconhecer rostos, objetos e locais nas imagens[4]. As redes neurais também são usadas para análise de imagens médicas em busca de sinais de anomalias;
- Tradução automática: plataformas como o Google Tradutor usam redes neurais para traduzir textos e áudios entre diferentes idiomas;

- Análise de dados: as redes neurais podem ser usadas para analisar grandes volumes de documentos à procura de informações valiosas, como tendências, padrões e anomalias;
- Otimização e controle: as redes neurais podem ser usadas para otimizar processos e estruturas, como na criação de novos fármacos, ou para controlar sistemas dinâmicos, como robôs e veículos autônomos.

TIPOS

Existem vários tipos de redes neurais, cada uma com suas características, vantagens e desvantagens. Alguns dos tipos mais comuns são:

- **Redes neurais feedforward:** são redes que transmitem as informações de forma unidirecional, da camada de entrada para a camada de saída, sem retroalimentação. Essas redes são simples, mas podem aprender a realizar diversas tarefas, como classificação, regressão, aproximação de funções, etc. Um exemplo de rede neural feedforward é o perceptron, que é o tipo mais antigo de rede neural;
- **Redes neurais recorrentes**: são redes que possuem conexões que formam ciclos, permitindo que as informações sejam armazenadas e reutilizadas ao longo do tempo. Essas redes são úteis para processar dados sequenciais, como som, séries temporais, linguagem natural, etc. Um exemplo de rede neural recorrente é a LSTM (Long Short-Term Memory), que é capaz de aprender dependências de longo prazo entre os dados;
- **Redes neurais convolucionais:** são redes que utilizam operações de convolução, que consistem em aplicar filtros sobre os dados de entrada, gerando mapas de características. Essas redes são eficientes para processar dados espaciais, como imagens, vídeos, reconhecimento facial, etc. Um exemplo de rede neural convolucional é a AlexNet, que foi a vencedora do desafio ImageNet em 2012, superando os métodos tradicionais de visão computacional.

Cada tipo de rede neural tem suas próprias aplicações, vantagens e desafios, e é importante conhecer as suas características e limitações para escolher a melhor rede neural para cada problema.

FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO

As **funções de ativação** são muito importantes, pois elas determinam se um neurônio deve ser ativado ou não e adicionam não linearidade às redes neurais, permitindo que elas aprendam a resolver problemas complexos que não podem ser resolvidos por modelos lineares simples. As funções de ativação recebem como entrada o valor resultante da combinação linear dos pesos, das entradas e do viés de cada neurônio, e produzem como saída um valor que é passado para a próxima camada da rede neural. Sem uma função de ativação, uma rede neural é apenas um modelo de regressão linear.

Existem vários tipos de funções de ativação, cada uma com suas características, vantagens e desvantagens. Alguns exemplos são:

- **Função degrau binário:** é uma função simples que compara o valor de entrada com um limiar e retorna 1 se for maior ou igual, e 0 se for menor. Essa função é usada para problemas de classificação binária, onde a saída só pode ser uma de duas classes. Essa função tem a desvantagem de não ser diferenciável, o que dificulta o uso de algoritmos de aprendizagem baseados em gradiente;
- **Função sigmoide:** é uma função que mapeia o valor de entrada para um intervalo entre 0 e 1, de forma suave e contínua. Essa função é usada para problemas de classificação binária, onde a saída representa a probabilidade de pertencer a uma classe. Essa função tem a vantagem de ser diferenciável, mas tem a desvantagem de sofrer de saturação, ou seja, quando o valor de entrada é muito grande ou muito pequeno, a derivada da função se aproxima de zero, o que reduz a velocidade de aprendizagem;
- **Função tangente hiperbólica:** é uma função que mapeia o valor de entrada para um intervalo entre -1 e 1, de forma suave e contínua. Essa função é usada para problemas de regressão ou classificação, onde a saída pode ter valores positivos ou negativos. Essa função tem a vantagem de ser diferenciável e de ter uma derivada maior que a da função sigmoide, o que acelera a aprendizagem. Essa função tem a desvantagem de também sofrer de saturação;
- **Função ReLU (Rectified Linear Unit):** é uma função que retorna o valor de entrada se for positivo, e zero se for negativo. Essa função é usada para problemas de regressão ou classificação, onde a saída pode ter valores arbitrários. Essa função tem a vantagem de ser simples, rápida e de não sofrer de saturação. Essa função tem a desvantagem de não ser diferenciável em zero, e de poder causar a morte de neurônios, ou seja, quando o valor de entrada é sempre negativo, o neurônio nunca é ativado.

Há muita coisa disponível na web sobre Redes neurais, tanto na forma de textos como de vídeos. Uma obra fundamental sobre esses e outros temas asssociados à Inteligência Artificial é a obra "Inteligência Artificial - Uma Abordagem Moderna", Quarta Edição, de Stuart J. Russel e Peter Norvig.

QL-155. Considere as seguintes funções hiperbólicas:

A) $\text{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

B) $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

C) $\text{tgh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Encontre as derivadas dessas funções, as expressões das funções inversas delas e prove as identidades: $\text{senh}^2(x) - \cosh^2(x) = 1$; $\cosh^2(x/2) = (\cosh(x) + 1)/2$ e $\text{senh}^2(x/2) = (\cosh(x) - 1)/2$.

QL-156. (JNCF). Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos. Prove a proposição: Se a média aritmética dos logaritmos desses números, em uma base b, é igual ao logaritmo da média aritmética deles, na mesma base, então $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

QL-157. (O Triângulo Potência) Aprenda uma nova forma de representar potências, logaritmos e radicais: "O Triângulo da Potência". Acesse o vídeo no endereço eletrônico indicado abaixo da fotografia disposta a seguir.

Acesse o Código QR

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-L(4)

DRN-L119:

Pela lei de formação da função(sequência), obtemos f(3) = f(1) + $2^{(\log_2 1)}$ = 2 e f(2019) = 800. De modo análogo, obtemos f(f(2019) = f(800) = f(25) = 10.

DRN-L120:

Coloque na forma de Vandermonde: 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & 1+\log 3 & 2+\log 3 \\ (\log 3)^2 & (1+\log 3)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}$.

▶ **Resp.:** (E).

DRN-L121:

A equação dada é equivalente a ax + 1 = (x – 1)(2 – x) , com 1 < x < 2, que pode ser colocada na forma f(x) = x^2 + (a – 3)x + 3 = 0, 1 < x < 2.

Como f(x) é quadrática, para que haja apenas uma raiz, devemos ter $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ (a – 3)^2 = 12 => a = 3 $\pm 2\sqrt{3}$. Sendo 1 < x < 2, então só a = 3 – $2\sqrt{3}$ satisfaz. Neste caso $x_1 = x_2$ = (3 – a)/2 = $\sqrt{3}$.

Que outros casos faltam ser analisados?

Precisamos saber se há mudança de sinal de f(x) quando passa de f(1) para f(2), ou seja, se f(1).f(2) < 0. E também avaliar o que ocorre em f(1) = 0 e f(2) = 0.

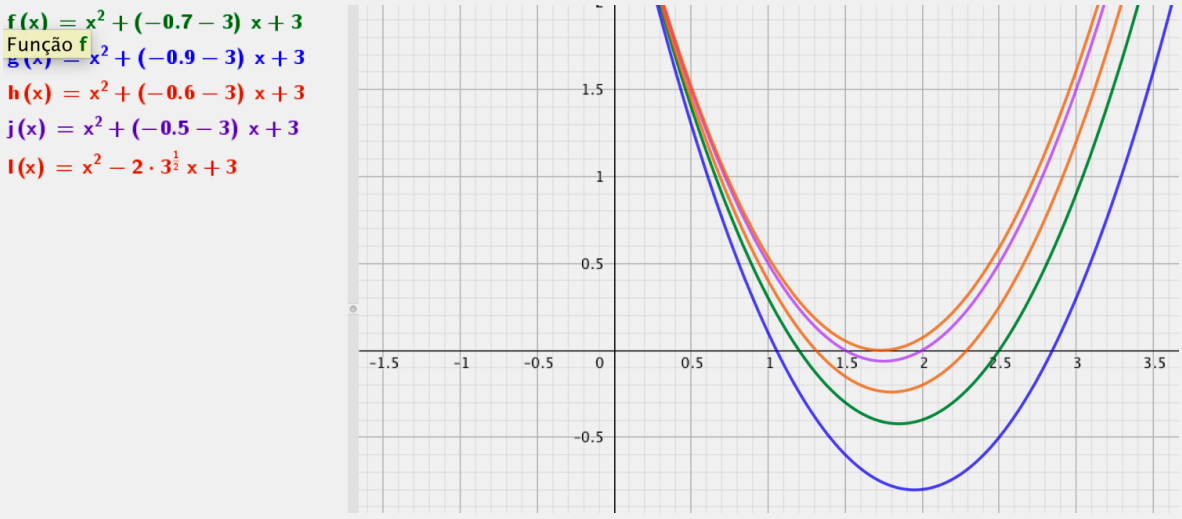
Sabemos, pelo teorema do valor intermediário, que se f(1).f(2) < 0, então existe pelo menos uma raiz no intervalo (1, 2). Como f(x) é quadrática, então existe somente uma raiz em (1, 2). Mas f(1).f(2) < 0 equivale a (a + 1) (2 a + 1) < 0, que implica - 1 < a < -1/2 .

Se f(1) = 0, então a = - 1 e por conseguinte x = 1 ou x = 3. Logo a = - 1 não satisfaz.

Se f(2) = 0, então a = -1/2 e por conseguinte x = 2 ou x = 3/2 . Logo a = - ½ satisfaz.

Concluímos, pois, que a = 3 – $2\sqrt{3}$ ou - 1 < a ≤ -1/2.

Para que se tenha uma melhor compreensão geométrica dessa resolução e do parâmetro “a” na função quadrática f(x), apresentamos a seguir os gráficos de algumas funções quadráticas do tipo f(x) para alguns valores possíveis do parâmetro “a”. Na verdade temos uma família de funções quadráticas associadas ao parâmetro “a”, que no intervalo (1, 2) têm apenas uma raiz.



Obs.: O problema que resolvemos poderia ser formulado assim:

Quais funções da forma f(x) = x^2 + (a – 3)x + 3, em que a é um parâmetro real, têm uma única raiz real no intervalo (1, 2)?

DRN-L122:

Usaremos o Teorema Fundamental da Aritmética e a redução ao absurdo para provar (**A)** e (B).

Lembremos o enunciado do TFA:

“Todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores.”

A) Suponhamos que $\log_4 18$ seja um número racional m/n. Então 18 = $2.3^2 = 4^{m/n}$. Disso segue $(2.3^2)^n = 4^m = 2^{2m} \Leftrightarrow 2^n.3^{2n} = 2^{2m}$.

Esta última igualdade é absurda, pois os números $2^n.3^{2n}$ e 2^{2m} têm fatores distintos, logo pelo TFA são diferentes.

B) De modo análogo, suponhamos que log(2^c5^d**)** seja um número m/n racional. Então $2^c5^d = 10^{m/n}$, que equivale a $(2^c5^d)^n = 10^m = 2^m5^m \Leftrightarrow 2^{cn}5^{dn} = 2^m5^m$.

Esta última desigualdade é absurda, pois c ≠ d implica, pelo TFA, que $2^{cn}5^{dn}$ e 2^m5^m são diferentes.

DRN-L123:

Use o princípio da indução ou a desigualdade MA ≥ MG.

DRN-L124:

Por hipótese $2^{senx + cosx} = (2 - 2^{senx + cosx})^2 = 4 - 4.2^{senx + cosx} + 2^{2(senx + cosx)}$. Fazendo $y = 2^{senx + cosx}$, obtemos: $y^2 - 5y + 4 = 0$.

Resolvendo essa equação, teremos y = 4 ou y = 1. Disso segue $2^{senx + cosx} = 4$ ou $2^{senx + cosx} = 1$.

No primeiro caso temos senx + cosx = 2, que é impossível(senx = 1 ⇔ cosx = 0).

No segundo caso temos senx + cos x = 0 ⇔ $\frac{\sqrt{2}}{2}senx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx = 0 \Leftrightarrow sen(x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

A solução geral dessa equação é $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$.

Como $x \in (-\pi, \pi)$, então $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$. Ou seja, os valores possíveis de x no intervalo $(-\pi, \pi)$, que satisfazem à condição dada, são : $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

DRN-L129:

Eleve ao quadrado ambos os membros e depois de algumas transformações obtenha uma soma de quadrados.

DRN-L133:

Indiquemos por (*) a desigualdade dada. Como $\Delta < 0$ para $x^2 + x + 1$, então $x^2 + x + 1 > 0$, para todo x real. Temos assim que os dois membros de (*) são positivos. Aplicando logaritmos de base 10 a ambos os membros de (*), obtemos: $x\log(x^2 + x + 1) < 0$. Excluindo os valores x = 0 e x = -1, que anulam o primeiro membro dessa desigualdade, temos, pois, dois casos possíveis:

$x < 0$ e $\log(x^2 + x + 1) > 0$ ou $x > 0$ e $\log(x^2 + x + 1) < 0$, que equivalem a

(1) $x < 0$ e $x^2 + x + 1 > 1$ ou (2) $x > 0$ e $x^2 + x + 1$ Analisando (1), vemos que $x^2 + x + 1 > 1$ => $x < -1$ ou $x > 0$. Logo $x < -1$ satisfaz (*).

Analisando (2), vemos que $x^2 + x + 1 < 1$ => $-1 < x < 0$, o que contradiz $x > 0$. Logo não existe solução para $-1 < x < 0$. Portanto $x < -1$ incluem todas as soluções de (*). Noutras palavras, o conjunto solução de (*) é $(-\infty, -1)$.

A questão poderia ser resolvida sem usar logaritmos, analisando o comportamento de $(x^2 + x + 1)^x$ nos dois casos: $x^2 + x + 1 < 1$ e $x^2 + x + 1 > 1$.

DRN-L135:

Observe que para 0 ≤ x ≤ 1, $|x-1| = 1-x$ e $|5^x - 1| = 5^x - 1$. Com isso a equação torna-se uma identidade: (x + 6)5^x – x = (x + 6)5^x – x.

Por outro lado, se x < 0, então a equação dada fica na forma:

$$(x + 6)\,5^x = (x + 1)(2 - 5^x) + 5.5^x \Leftrightarrow (2x + 2)\,5^x = 2x + 2 \Rightarrow x = -1.$$

E se x > 1 teremos:

(x + 6)5^{2-x} – x = (x + 6)5^x – x ⇔ $5^{2-x} = 5^x$ ⇔ x = 1, o que é absurdo, pois x > 1.

Concluímos que o conjunto solução da equação dada é [0, 1] ∪ {- 1}.

DRN-L136:

Fazendo u = 2^x e v = 3^y o sistema fica na forma:

$$(*)\begin{cases} 3u^2 - 2uv - v^2 = 0 & (1) \\ 2u^2 - 5uv + v^2 = -8 & (2) \end{cases}.$$

Dividindo os membros de (1) por uv obtemos:

$$3\left(\frac{u}{v}\right) + 2 - \frac{v}{u} = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{v}\right) - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação encontramos uma única raiz real:

$\frac{u}{v} = 1/3 \Leftrightarrow v = 3u.$

Substituindo esse resultado em (2) chegamos em $u^2 = 2$. Logo $2^{2x} = 2$ ⇔ x = ½. E $v = 3u$ ⇔ 3^{y-1} = $2^{1/2}$ ⇔ y = $1 + \frac{1}{2}\log_3 2$.

Conclusão: a única solução real do sistema é x = ½ e y = $1 + \frac{1}{2}\log_3 2$.

DRN-L137:

Transforme a equação para a forma $45y^2 - 57y - 4 = 0$, em que y = $\left(\frac{4}{3}\right)^x$.

▶ **Resp.:** $a > 0$ e $a \neq 1$.

DRN-L138:

[1;1,1,1,...]. Verifique que as convergentes(reduzidas) dessa fração contínua tem características interessantes: [1] = 1, [1;1] = 1 + 1/1 = 2, [1;1,1] = 1 + 1/2 = 3/2, [1;1,1,1] = 1 + 2/3 = 5/3, [1;1,1,1,1] = 8/5, [1;1,1,1,1,1] = 18/8, ... Seus numeradores, assim como os denominadores, formam a sequência de Fibonacci: (1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, ...). Aliás, essa é a sequência $(\frac{F_{n+1}}{F_n})$ que estudamos antes e que tem como limite a razão áurea. Veja aqui como as aproximações multifárias se revelam na matemática, aumentado sua compreensão e sua beleza!

DRN-L139:

Analise os três casos: $sen(\pi x) > 0$; $sen(\pi x) = 0$ e $sen(\pi x) > 0$. Esse último caso não tem solução.

▶ **Resp.:** Soluções: (x, y) = (- 1, - $\sqrt{3}$), (0, 0), (- 4, 0), (- 2 – $\sqrt{3}$, 1), (- 2 – $\sqrt{3}$, - 1), (- 2, 2) e (- 2, - 2).

DRN-L140:

Usando y = log x obtemos a função g(y) = $\frac{2y^2 + 3y + 3}{y^2 + 2y + 2}$. Verificamos que $y^2 + 2y + 2 > 0$. Logo g(y) existe para todo y real. Seja M o máximo de g. Então,

$2y^2 + 3y + 3 \leq (y^2 + 2y + 2)M \Leftrightarrow$ (2 – M)y² + (3 – 2M)y + 3 – 2M ≤ 0, o que implica 2 – M < 0 e Δ = (3 – 2M)(2M – 5) ≤ 0. O máximo de g ocorre com Δ = 0. Como 2 – M < 0 => 4 – 2M < 0 => 3 – 2M < 0, então 2M = 5. Ou seja, o máximo de g é M = 5/2.

Como f(x) = g(y), então o máximo de f é também M = 5/2, que só ocorre na igualdade

$$(2 – M)y^2 + (3 – 2M)y + 3 – 2M = 0.$$

Substituindo o valor de M nessa equação, obtemos $y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = - 2 \Leftrightarrow x = 10^{-2} = 1/100$. Portanto, o valor máximo de f é 5/2 e ocorre em x = 1/100.

DRN-L141:

A) A equação (1) é equivalente a $3^{2x} = 2^x$. Logo x = 0 é a única raiz real.

B) Com o resultado de (a) tem-se que $|a - 1| = 1 - a$. Então $a \leq 1$. Faça y = 5^x e estude a equação resultante: $ay^2 + (1 - a)y - 1 = 0$. Δ = $(a + 1)^2$ => y = 1 ou y = -1/a. Como y = 1 para x = 0, então $a = -1$ é o único valor negativo que a pode assumir. Assim concluímos que 0 ≤ $a \leq 1$ ou $a = 1$. Noutras palavras, $a \in [0, 1] \cup \{-1\}$.

DRN-L142:

Fazendo y = 2^x obtemos:

$y^2 - a^2y - 3ay + 2y + 3a^3 - 2a^2 = 0$, que fatorando fica assim: $(y - a^2)(y - 3a + 2) = 0$. (1)

Agora vamos procurar os valores de a tais que que essa equação tenha uma única raiz positiva($y > 0$), pois $y = 2^x > 0$.As possíveis raízes de (1) são $y_1 = a^2$ e $y_2 = 3a - 2$. Para y_1 ser a única solução de (1) deve ocorrer uma das duas condições:

I) $y_1 = y_2$ $a^2 = 3a - 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = 2$.

ou

II) $y_2 = 3a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2/3$, com $a \neq 0$, pois $y = 2^x \Rightarrow y_1 = a^2 > 0$.

Portanto, $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 2/3] \cup \{1, 2\}$.

DRN-L143:

Deduza da segunda igualdade que y = 1/z. Depois obtenha x = $_e$z. E usando a primeira igualdade deduza que z = e.

▶ **Resp.:** (B).

DRN-L144:

Use a contrarecíproca(ou contrapositiv**a)** de I: se a é racional, então p e q são racionais. Como p = $a + a^2$ e q = $a + a^3$, então I é verdadeira. No caso de II, temos p + q = $2a + a^2 + a^3 = a$ (2 + $a + a^2$) = $a(2 + p)$. Disso segue que $a = (p + q)/(p + 2), p \neq -2$. Observe que p = - 2 implica $a \notin R$, o que contraria a hipótese. Logo II também é verdadeira. No caso da III, devemos encontrar um contra-exemplo. Sendo p = $a(1 + a)$, fazendo $a = \sqrt{2} - k$, k racional, obtemos p =$(\sqrt{2} - k)(\sqrt{2} + 1 - k)$. Para p ser racional basta k = ½. Isso resulta em p = 7/4. Substituindo $a = \sqrt{2} - ½$ em q = $a^2 + a^3$, obtemos um valor irracional: $(14\sqrt{2} - 7)/8$. Um procedimento análogo poderia ser feito com a = $\sqrt{3} - ½$ ou a = $\sqrt{n} - ½$, n primo.

Obs.: A contrapositiva ou contrarecíproca de P => Q é ~Q => ~P.

DRN-L145:

Das duas primeiras equações deduzimos que x = 0 ou x = 4. Mas, pela condição de existência de lnx, x é diferente de 0. Logo x = 4, y = 16 e z = 64, o que nos leva a S = 84.

DRN-L146:

Verifique que log q = logB – logA = D – C = k é inteiro, pois logA = C + M e logB = D + M, onde C e D são inteiros e 0 ≤ M < 1. Mas logC = M; então C < 10 e M = log(Aq²) = logA + 2k, o que nos leva a C = - 2k. Logo *C* é par e como seu valor é máximo então *C = 8 e k = - 4.* Disso decorre que log(ABC) = (C + M) +(C + k + M) + M = 3M + 2C – 4 = 3M + 12 = 3logC + 12 = 3.log8 + 12 = 9log2 + 12.

Observe que $10^{\frac{1}{4}} < 16^{\frac{1}{4}} = 2 = 8^{\frac{1}{3}} < 10^{\frac{1}{3}}$ => ¼ < log2 < 1/3 ⇔ 9/4 < 9log2 < 3 => [9log2] = 2. Segue disso que a mantissa de log(ABC) é 3M – 2. Perceba aqui a importância prática das aproximações sucessivas, o que reforça o método das Aproximações Multifárias.

DRN-L147:

Observe que $[\log_\alpha(a_n) - b_n] = \log_\alpha(a_1) - b_1 + (n-1)[\log_\alpha(q) - r]$. Para que não dependa de n devemos ter $\log_\alpha(q) - r = 0$, o que nos leva a $\alpha = (\frac{a_2}{a_1})^{1/(b_2-b_1)}$.

▶ **Resp.:** C.

DRN-L149:

Perceba aqui nessa questão contextualizada a importância prática da média geométrica. E observe que a razão da PG associada é 1 – r, onde r é a taxa média procurada. ▶ **Resp.:** B.

Obs.: Se nessa questão, trocássemos a ordem dos números, isto é, se fosse na ordem crescente de 7,6% para 21,8%, o que aconteceria com o valor da taxa média? Seria igual, maior ou menor do que 8,4%?

DRN-L150:

Observe que 0 < b < a ⇒ a = bk, com k >1. Use isso e a função $f(x) = \ln x - 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, com x > 1, mostrando que *f* é crescente($f'(x) > 0$, para x > 1), para provar a desigualdade dada.

DRN-L151:

A equação dada é equivalente a $9x + 1 = 10^x$, sendo $9x + 1 > 0$, o que implica $x > -1/9$. Como x é inteiro, então não existe raiz negativa. Testando x = 0 e x = 1, verificamos que são raízes. Existem outras? Pelo Binômio de Newton, colocando x = n, temos que $(9 + 1)^n = 1 + 9n + \binom{n}{2}9^2 + ... + 9^n > 9n + 1$, se $n > 1$. Portanto, só existem as duas raízes: x = 0 e x = 1.

DRN-L152:

A) → D(f) = R ; Im(f) = (- 1, 1);

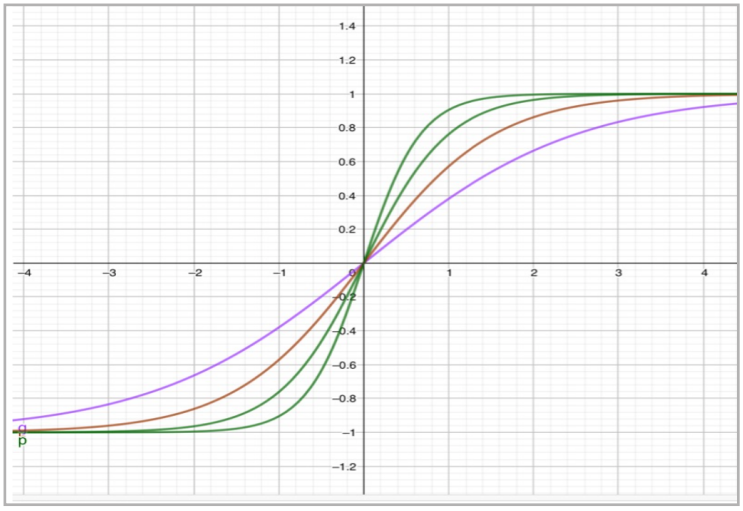
B) → Formato do gráfico: f é crescente, pois $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0, \forall\, x \in R;\ f''(x) = \frac{8(e^{2x} - e^{4x})}{(e^{2x} + 1)^3}$, ponto de inflexão em x = 0, pois $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; x > 0 => $f''(x) < 0$ → concavidade para baixo; e x < 0 => $f''(x) > 0$ → concavidade para cima.

C) → A reta tangente de declive máximo ocorre em x = 0: y = x.

D) → A figura a seguir mostra o gráfico de f e os gráficos de três variações dela feitos com o Geogebra. Essas variações traduzem o potencial de "aprender" das redes neurais e seus algoritmos com a entrada dos dados.

E) → Mostre que o 2º membro é igual ao primeiro.

F) → Inversa: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1.$



$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$g(x) = \frac{e^{0.8x} - 1}{e^{0.8x} + 1}$

$h(x) = \frac{e^{1.3x} - 1}{e^{1.3x} + 1}$

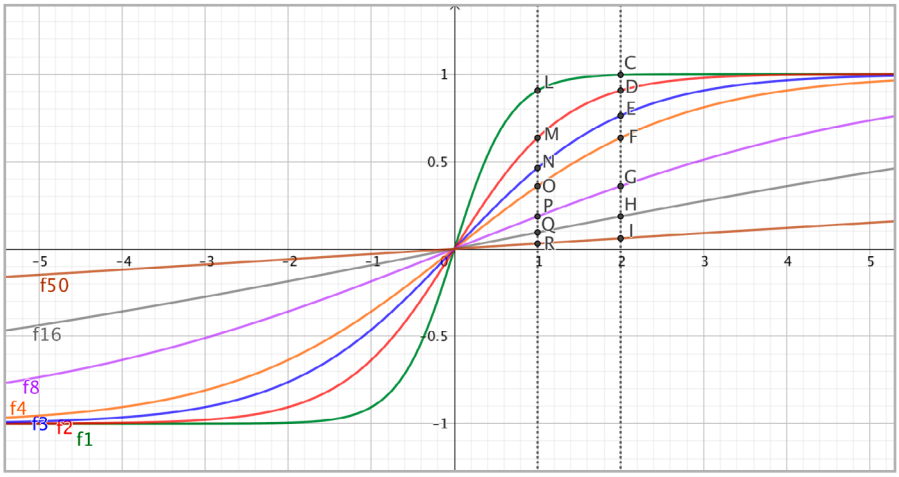
$p(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}$

CONVERGÊNCIA DE UMA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES REAIS

Na figura ilustrada a seguir temos os gráficos de algumas funções hiperbólicas de um mesmo tipo $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1}$, em que a é um parâmetro real.

Agora, vamos considerar a seguinte sequência de funções reais contínuas (f_n), definidas no intervalo D = [-5, 5] por $f_n(x) = \frac{e^{\frac{3x}{n}} - 1}{e^{\frac{3x}{n}} + 1}$. Veja a seguir os gráficos das funções: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_8, f_{16}$ e f_{50}.

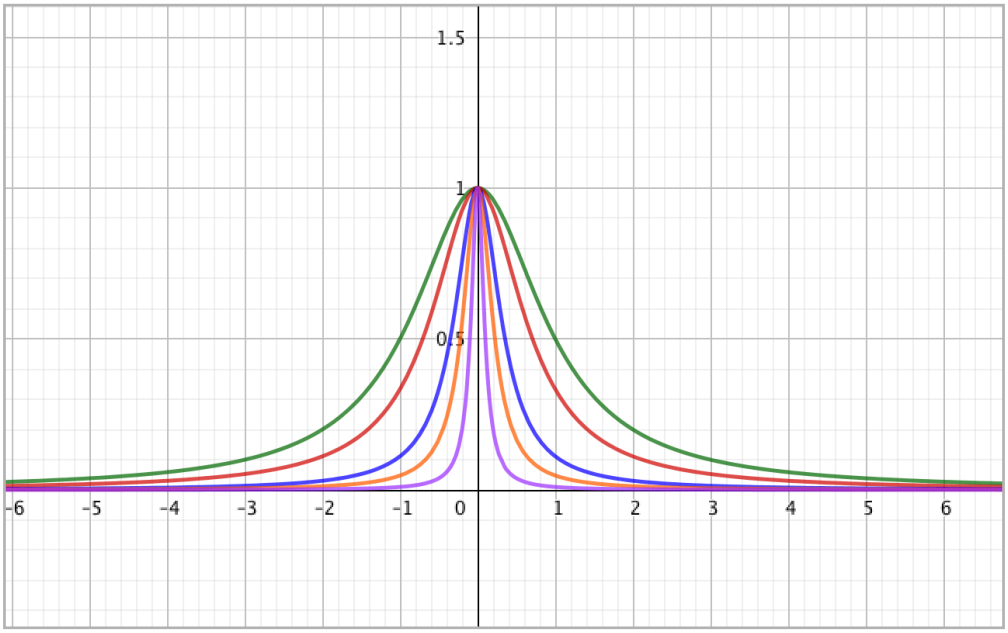
Na figura, temos duas retas verticais(x = 1 e x = 2) intersectando todos eles. Elas indicam 7 valores de duas sequências numéricas. O que ocorre com as duas sequências numéricas de valores $(f_n(1))$ e $(f_n(2))$ quando n tende ao infinito?



Claramente, o limite de cada uma delas é 0. E para outro valor qualquer de x ∈ [- 5, 5], o que altera? Verifique que lim $f_n(x)$ = lim $\frac{e^{\frac{3x}{n}} - 1}{e^{\frac{3x}{n}} + 1} = \frac{0}{2} = 0$, qualquer que seja o x real. Os gráficos claramente nos sugerem que quando o n cresce eles se aproximam do eixo-x.

Fazendo uma certa analogia com as sequências numéricas, dizemos que uma sequência de funções (f_n), com $f_n: D \subset R \to R$, **converge pontualmente**(ou simplesmente) para uma função $f: D \subset R \to R$ quando, para todo $x \in D$, a sequência numérica $(f_n(x)) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para $f(x)$, isto é, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in D$, existe $n_0 \in N$ (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Por outro lado, dizemos que a sequência (f_n) **converge uniformemente** para a função $f: D \subset R \to R$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in N$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in D$. No exemplo ilustrado, temos que a sequência de funções $f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x) = 0$. Ela também converge uniformemente em D = [- 5, 5] para $f(x) = 0$. Perceba que se ampliarmos o domínio dessas funções para todo o R, essas propriedades não mudam. Portanto, em qualquer intervalo real D essa sequência de funções converge uniformemente para a função constante $f(x) = 0$. Vejamos agora outro exemplo. Considere a sequência de funções reais contínuas (f_n), definidas em todo o *R* por $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$. Verifique que $f_n(0)$ = 1, para todo $n \in N$. Por outro lado, em qualquer ponto

$x \neq 0$ de *R* tem-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = 0$. Logo essa sequência converge pontualmente para a função real definida por $f(x) = 0$, se $x \neq 0$, e $f(x) = 1$, se x = 0. Veja na figura mostrada a seguir o comportamento dos gráficos de algumas funções dessa sequência.



Perceba que, embora todas as funções f_n sejam contínuas em x = 0, elas convergem(pontualmen**te)** para uma função f que é descontínua nesse ponto(x = 0). No caso anterior, a sequência gozava da convergência uniforme em todo o seu domínio, enquanto nesse caso não ocorre a convergência uniforme em qualquer intervalo que contenha x = 0. Mas perceba que em qualquer intervalo aberto contido em *R – {0},* a sequência $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge uniformemente para a função $f(x) = 0$.

De fato, há um teorema relacionado a essa propriedade da convergência uniforme.

Teorema da convergência uniforme de funções contínuas

"Se uma sequência de funções (f_n), com $f_n: D \subset R \to R$, converge uniformemente para uma função $f: D \subset R \to R$ e cada função f_n é contínua no ponto $a \in D$, então f é contínua em a."

A prova desse teorema é curta.

Dado um $\varepsilon > 0$, existe um n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in D$. Como cada f_n é contínua em a, se $n > n_0$, então existe um $\varepsilon' > 0$ tal que $|x - a| < \varepsilon'$, $x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$, o que nos leva a $|f(x) - f(a)| = |f(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f_n(x) - f(a)| \leq$

$|f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Logo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o que conclui a prova.

Corolário

Suponha que (f_n), com $f_n: D \subset R \to R$, seja uma sequência de funções contínuas em D.

I) Se a sequência (f_n) converge uniformemente em D para uma função f, então f é contínua em D.

II) Se a série $\sum f_n$ converge uniformemente em D, então a soma dessa série é uma função f contínua em D.

Teste de Weierstrass

"Dada a sequência de funções $f_k: X \to R$, seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série convergente de números reais $a_k \geq 0$ tais que $|f_k(x)| \leq a_k$, para todo k natural e todo x ∈ X. Nessas condições, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ são uniformemente convergentes."

Prova

Pelo critério de comparação, temos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ é convergente e, por conseguinte, a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é convergente também. Dado um $\varepsilon > 0$, existe k_0 natural tal que $\sum_{k>k_0}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Colocando $R_k(x) = \sum_{k>k_0}^{\infty} |f_k(x)|$ e $r_k(x) = \sum_{k>k_0}^{\infty} f_k(x)$, temos que $|r_k(x)| \leq R_k(x) < \varepsilon$, para todo $k > k_0$. Logo as séries são uniformemente convergentes.

Para se aprofundar um pouco mais sobre isso veja as referências [Kaplan, 1972], [Lima, 2004], [Lewin, 1993] e [Rudin, 1970].

A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO ESCADA

Uma **partição** P = $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de um intervalo fechado $[a, b]$ é um subconjunto de n + 1 pontos de $[a, b]$ tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots, < x_n = b$. Se Q é outra partição de $[a, b]$ tal que P ⊂ Q, então dizemos que Q *refina* P. Se os intervalos (x_{i-1}, x_i) têm o mesmo comprimento(medida), dizemos que a partição é *regular.*

Chamamos de **função escada** a toda função f: $[a, b] \to R$, tal que exista uma partição P = $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ e $f(x) = c_i$, quando $x \in (x_{i-1}, x_i)$, para i = 1, 2, ..., n, sendo cada c_i uma constante real. Nos extremos dos subintervalos a função escada assume qualquer valor real. Se a função f tem valor constante c em um dos intervalos (x_{i-1}, x_i) e valor 0 em $[a, b] - [x_{i-1}, x_i]$ dizemos que f é uma **função escada elementar**.

Decorrem diretamente dessas definições as propriedades seguintes.

P1) Toda função escada é uma soma de funções escada elementares;

P2) Se f e g são funções escada, então máx $\{f, g\}$ e mín $\{f, g\}$ são funções escada;

P3) A soma $f + g$ de duas funções escada é uma função escada;

P4) O produto cf de uma função escada f por um número real c é uma função escada.

Obs.: máx $\{f, g\}(x) = máx\{f(x), g(x)\}$ e mín $\{f, g\}(x) = mín\{f(x), g(x)\}$.

Em virtude das propriedades P3 e P4 o conjunto das funções escadas de $[a, b] \to R$ formam um espaço vetorial real. No próximo capítulo, veremos um tópico sobre espaço vetorial.

Quando a partição P é regular, dizemos que a função f é uma **função escada regular**.

Verifica-se, sem maiores dificuldades, que qualquer partição de $[a, b]$ que refine P não altera o valor da soma $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$. Suponhamos que em $[a, b]$ exista um subconjunto de medida nula D. Então o comprimento(medida de Lebesgu**e)** de $[a, b] - D$ é igual ao de $[a, b]$. Além disso, o comprimento de cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) é igual ao comprimento de $(x_{i-1}, x_i) - D \cap (x_{i-1}, x_i)$, que é $x_i - x_{i-1}$. Então, concluímos que $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$ não se altera quando substituímos $[a, b]$ *por* $[a, b] - D$.

Seja D um subconjunto de medida nula de $[a, b]$, denominamos de **função quase-escada** a toda função $f : [a, b] \to R$, cuja restrição ao domínio $[a, b] - D$ coincide com uma função escada $g : [a, b] \to R$. Perceba que toda função escada é uma função quase-escada. Chamamos essa função escada g de *função escada associada* a f. E também chamamos a f de função quase-escada associada a g. Valem para as funções quase-escada, com as devidas adaptações, as quatro propriedades das funções escada, listadas antes.

Seja $f : [a, b] \to R$ uma função quase-escada tal que $f(x) \geq 0$. Definimos a **integral** *de* f em $[a, b]$, como a soma $\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i$, em que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, de uma função escada associada. Representa-se a integral *de* f em $[a, b]$ por $\int_a^b f(x)dx$ ou apenas por $\int_a^b f$. Portanto, temos, por definição, que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i.$$

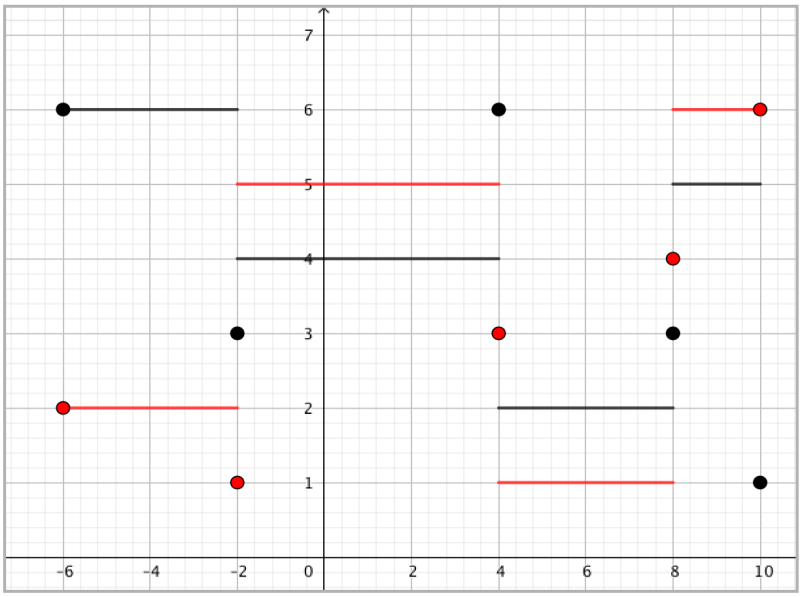
Em virtude dessa definição de integral, há uma família de funções quase-escada, com o mesmo domínio, que têm a mesma integral. Dizemos que essas funções são equivalentes e podemos, quando for adequado, considerá-las como se fossem uma só. Neste sentido, elas formam também um espaço vetorial. Aqui temos um caso análogo ao que relaciona o conjunto R dos números reais com o conjunto Q dos números racionais. A analogia está em que cada número real é uma classe de sequências de Cauchy de números racionais. E tanto o Q como o R podem ser “pensados” como

espaços vetoriais de dimensão 1. Mais do que isso, eles são espaços vetoriais métricos, como veremos no próximo capítulo. Perceba nessa analogia a presença forte das “Aproximações Multifárias”.

Se f é uma função escada e $f(x) \geq 0$, a integral de f é uma soma de áreas de retângulos. Por simplicidade, vamos desenvolver esse tópico supondo as funções não negativas, a menos que se mencione o contrário.

O caso geral, em que a função f tem valores positivos e também valores negativos, pode ser reduzido ao caso em que f é não negativa. Para isso, define-se $f^+ = máx\ \{f, 0\}$ e $f^- = -\ mín\ \{f, 0\}$, o que nos leva a $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Perceba que f^+ e f^- são funções não negativas. Nesse contexto, define-se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.

A figura a seguir ilustra o gráfico de duas funções escada f e g em que $[a, b]$ = [- 6, 10]. O gráfico de f está em preto e o de g em vermelho.



A integral de f em [- 6, 10] é $\int_{-6}^{10} f(x)dx$ = 6(4) + 4(6) + 2(4) + 5(2) = 66. E a de g é

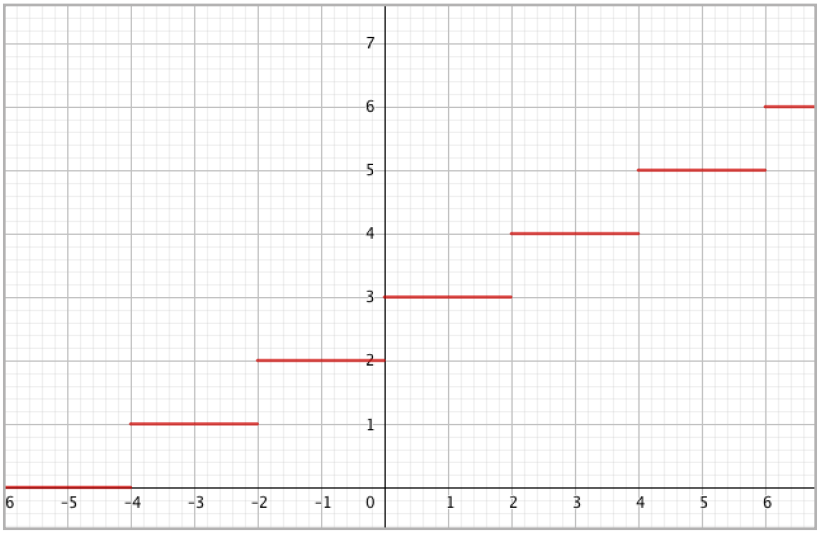
$$\int_{-6}^{10} g(x)dx = 2(4) + 5(6) + 1(4) + 6(2) = 54.$$

Verique que os valores das integrais de M(x) = *máx* $\{f, g\}(x)$ e de m(x) = *mín* $\{f, g\}(x)$ são, respectivamente, $\int_{-6}^{10} M(x)dx$ = 6(4) + 5(6) + 2(4) + 6(2) = 74 e $\int_{-6}^{10} m(x)dx$ = 2(4) + 4(6) + 1(4) + 5(2) = 46.

Perceba que toda função escada é função escada associada de si mesma.

Outro aspecto que deve ser percebido, é que a integral de uma função escada é a soma das integrais das funções escadas elementares que a compõem. E isso vale para as funções quase-escada com relação às funções escada associadas. Observe que cada parcela $c_i\Delta x_i$ representa a integral da função escada elementar associada ao subintervalo (x_{i-1}, x_i).

Um exemplo típico de uma função escada regular é a função f(x) = [x/2] + 3, definida em $[-4,\ 6]$, onde [x] representa o maior inteiro que não supera x. Verifique que $\int_{-4}^{6} f(x)dx = 30$.



Perceba que a integral de qualquer função constante $f(x) = c$, em um intervalo $[a, b]$, é $\int_a^b cdx = c(b - a)$.

A função $f: [0, 5] \rightarrow R$ tal que $f(x)$ = 1 se x é racional e $f(x) = 2$ se x é irracional é uma função quase-escada, pois o conjunto D dos números racionais de $[0, 5]$ tem medida nula. Considere a função escada associada $g: [0, 5] \rightarrow R$ com a partição {0, 2, 3, 5} e tal que $g(x) = 2$ se $x \in (0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5)$.

Essa função g é uma função escada associada a f. Então $\int_0^5 f\ (x)dx = 2(2 + 1 + 2) = 10$. Observe que essa função não é contínua em nenhum ponto, pois qualquer intervalo aberto simétrico com centro em $x \in$ [0, 5] tem pontos racionais e pontos irracionais desse intervalo.

Considere a função $f: [0, 1] \rightarrow R$, definida assim: $f(x) = 3$ se x pertence ao conjunto de Cantor K e $f(x) = 5$ se x pertence a $[0, 1]$ – K. Também é um exemplo de função quase-escada. Qual o valor de sua integral? Verifique que $\int_0^1 f(x)dx = 5$.

Algumas propriedades decorrentes dessa definição listamos a seguir. Sejam f e g duas funções quase-escada em $[a, b]$, $a < c < b$ e k um real qualquer. Então valem as propriedades:

1. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

2. $\int_a^b kf = k \int_a^b f$;

3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Para perceber melhor a última propriedade, basta que interprete f como a soma de funções escada elementares, em que $\int_a^c f$ é a soma das funções escadas elementares com valor 0 em subintervalos que contém (b, c) e $\int_c^b f$ é a soma de funções escada elementares com valor 0 em subintervalos que contém (a, c).

A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO LIMITADA

Sejam $f : [a, b] \to R$ uma função real limitada e não negativa e seja P uma partição de $[a, b]$. Uma **Soma de Riemann-Lebesgue** de f em relação a P é qualquer soma S_P da forma:

$S_P = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x_i,\ \text{com}\ w_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para i = 1, 2, …, n.

Tal soma pode ser considerada como a integral de uma função escada no intervalo $[a, b]$ para cada partição desse intervalo. De fato, considerando $f(w_i) = c_i$, para cada intervalo (x_{i-1}, x_i) de uma partição P, temos que a soma de Riemann-Lebesgue $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x_i$ pode ser dada por $\sum_{i=1}^{n} c_i\,\Delta x_i$, que é a integral da função escada $h_P: [a, b] \to R$ definida por $h_P(x) = c_i$, para $x \in (x_{i-1}, x_i)$, i = 1, 2, ..., n. E também é a integral de uma função quase-escada associada a h_P. Consideremos agora uma partição regular de $[a, b]$. Então $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x_i$ e $\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n}$, para i = 1, 2, ..., n. Podemos agora representar S_p por S_n . Assim temos que $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x_i$. Como a função f é limitada em $[a, b]$, então existe um M > 0, tal que $S_n \leq M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M\,(b - a)$, para todo n natural. Assim temos que a sequência (S_n) das somas é limitada. Seja J = $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(w_i)\,\Delta x_i$. Como $\sum_{i=1}^{k} f(w_i)\Delta x_i$ representa a integral de uma função quase-escada $h_k: [a, b] \to R$, então temos

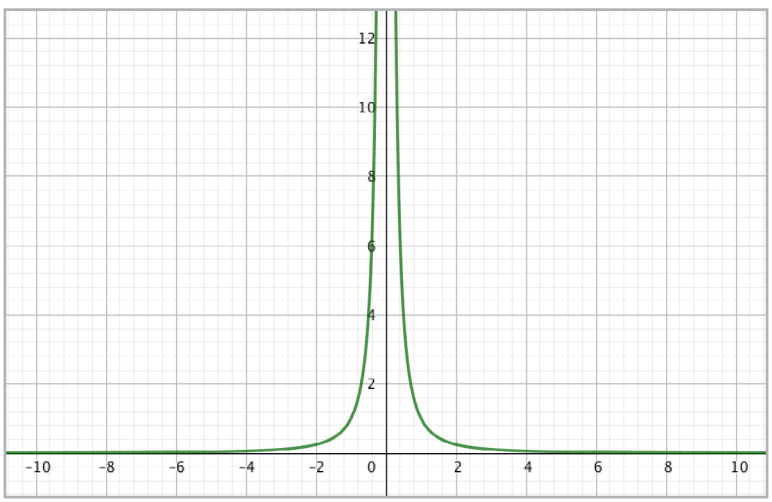
$$J = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(w_i).\,\Delta x_i = \lim_{k\to\infty} \int_a^b h_k(x)dx.$$

A esse limite J, quando existe, denominamos de **Integral da função** f e o representamos com os mesmos símbolos usados para a integral de uma função quase-escada: $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f$. Portanto, por definição

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b h_k(x)dx\,.$$

Quando uma função real f: $[a,b] \to R$ tem o limite J, dizemos que ela é *Integrável.* A definição nos diz que a integral de uma função limitada é o limite de uma sequência de integrais de funções quase-escada. Em outras palavras, podemos "aproximar" a integral de uma função limitada por integrais de funções quase-escada.

Vamos destacar alguns subconjuntos notáveis das funções limitadas, tais como as funções contínuas. Toda função contínua $f : [a,b] \to R$ é limitada e integrável. Denominamos de **função quase-contínua** a toda função f: $[a,b] \to R$ limitada que é contínua em $[a,b] - \mathrm{D}$, em que D é um conjunto de medida nula formado por todos os pontos em que a função é descontínua. Perceba que a função g, dada a seguir, é uma função quase-contínua. Seja g: [- 5, 5] → R definida por $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ para x não inteiro e $g(x) = 2$, se x é inteiro. O conjunto dos pontos de descontinuidade de g é um conjunto enumerável(finito). Por outro lado, a função h: $[-10,10] \to R$, definida por $h(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ e $h(0) = 3$, que é descontínua em único ponto, não é quase-contínua. Por quê? Observe que em qualquer intervalo simétrico [-r, r] $\subset [-10,10]$ a função h é ilimitada. O gráfico a seguir ilustra isso.



A tarefa que se impõe a seguir é a de obter regras mais "operacionais" para se calcular a integral. Decorre da definição e das propriedades das séries convergentes, que as três propriedades mostradas para as funções escadas são válidas para as funções integráveis. Além disso vale também a propriedade: $f \leq g$ => $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Ou seja, se f e g são funções integráveis em $[a,b]$, $a < c < b$ e k é um real qualquer, então valem as propriedades:

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

2. $\int_a^b kf = k\int_a^b f$;

3. Se $f \leq g$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Convencionamos que $\int_a^a f = 0$.

NOTA:

No caso geral de uma função f, que tem valores positivos e também valores negativos no intervalo $[a,b]$, procede-se como mostramos acima e define-se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$. Está subentendido nas propriedades anteriores a ideia de "quase" associada a um conjunto de medida nula. Ou seja, as propriedades são válidas em quase todo ponto, a menos de um conjunto de medida nula.

Teorema da convergência uniforme de funções limitadas

"Se uma sequência de funções integráveis $f_n: [a,b] \to R$ converge uniformemente para $f: [a,b] \to R$, então f é limitada e $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Nós provamos, um pouco atrás, o seguinte teorema: "Se uma sequência de funções (f_n), com $f_n: D \subset R \to R$, converge uniformemente para uma função $f: D \subset R \to R$ e cada função f_n é contínua no ponto $a \in D$, então f é contínua em a." Combinando esse teorema com o teorema que terminamos de enunciar, obtemos o seguinte corolário:

Corolário

"Se uma sequência de funções contínuas $f_n: [a,b] \to R$ converge uniformemente para $f: [a,b] \to R$, então f é contínua e $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$."

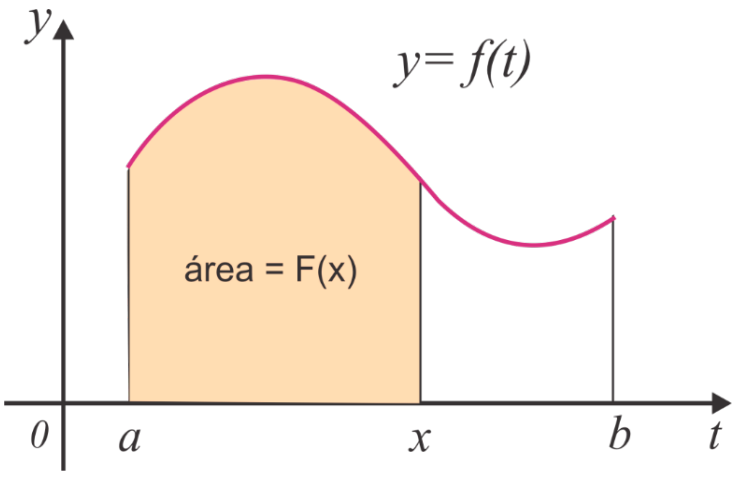
Se no enunciado desse corolário trocarmos funções contínuas por quase-contínuas ele continua válido; porém a convergência uniforme ocorre em $[a,b] - D$, em que D é o conjunto de medida nula em que a função é descontínua. Caso análogo vale para o teorema da convergência uniforme de funções limitadas.

Vamos agora enunciar e provar o famoso Teorema Fundamental do Cálculo. Ele faz uma bela aproximação entre derivadas e integrais, através das primitivas. Com ele podemos calcular integrais de uma família grande de funções reais, sem precisar usar a definição anterior. É, pois, um teorema operacional.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC)

Seja $f: [a,b] \to R$ uma função integrável.

1) Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então a função $F: [a,b] \to R$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.
2) Se f tem uma primitiva $G: [a,b] \to R$, então $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ e $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$.

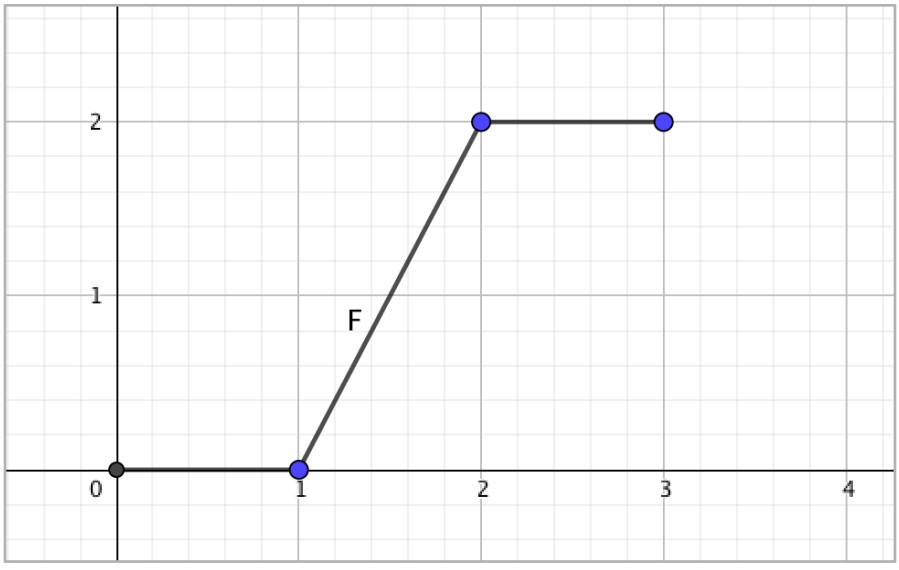


É comum denominar-se de integral definida ao número $\int_a^b f(t)dt$ e de integral indefinida à função F tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Também é comum a muitos autores, o uso de $\int f(t)dt$ + C para representar uma primitiva qualquer de f. Mais à frente mostramos uma tabela de primitivas de algumas funções conhecidas.

Antes de demonstrarmos o TFC, chamamos a atenção para algumas consequências imediatas desse teorema:

A) Toda função contínua em $[a,b]$ tem primitiva; logo toda função derivável em $[a,b]$ tem uma primitiva;

B) nem toda função integrável em $[a,b]$ tem primitiva. Tem integral definida mas não tem primitiva. A integral definida pode existir sem ser derivável em todo ponto. Basta pensar numa função escada com pelo menos dois valores distintos. Ela tem uma descontinuidade "em salto" limitado ou de primeira espécie. A integral definida existe e é contínua, mas não é derivável no ponto de descontinuidade. Para maior clareza, observe a integral definida da seguinte função escada $f: [0,\ 3] \to R$ definida assim: $f(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$ ou $2 < x \leq 3$, e $f(x) = 2$, se $1 \leq x \leq 2$. Considere a integral indefinida $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para o intervalo $[0,3]$. Temos a função $F(x) = 0$, se $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = 2x - 2$, se $1 \leq x \leq 2$, e $F(x) = 2$, se $2 \leq x \leq 3$. Observe que F é contínua em $[0,\ 3]$, mas não é derivável em x = 1 e em x = 2. Veja o gráfico da F a seguir. F é uma função poligonal. Estudaremos um pouco mais sobre essas funções mais à frente.



C) como as funções reais mais conhecidas e mais importantes no Cálculo e na Análise são deriváveis em um certo intervalo $[a,b]$, deduzimos que podemos calcular suas integrais usando esse Teorema e uma tabela de primitivas. Daí a relevância que as aplicações desse teorema tem nos livros de Cálculo;

D) perceba que no processo de integração, quando passa de f para F, a função "melhora" sua forma: se f é limitada, então F é contínua; se f é contínua, então F é derivável. Perceba aqui a ideia de aproximação multifária num contexto interessante: a integração indefinida enriquece a função com novas propriedades.

Uma questão:

Pode uma função ter uma descontinuidade e possuir uma primitiva? Verifique que a função $f(x) = 2x.sen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ tem como primitiva a função $F(x) = x^2.sen(\frac{1}{x})$, se $x \neq 0$ e $F(0) = 0$.

Prova do Teorema Fundamental do Cálculo

1) Como f é contínua em c, então existem intervalos $(c - \varepsilon', c + \varepsilon')$ e $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ tais que $t \in (c - \varepsilon', c + \varepsilon')$ => $f(t) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) \Leftrightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Então, se 0 < |h| < ε' e c + h ∈ [a, b], temos que $\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}[\int_c^{c+h} f(t)dt - f(c)h]\right| = \left|\frac{1}{h}[\int_c^{c+h} [f(t) - f(c)]dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|dt < \frac{|h|.\varepsilon}{|h|} = \varepsilon.$

Disso se conclui que $F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$.

2) Como f tem uma primitiva G, então $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Seja P = $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Segue do Teorema do Valor Médio de Lagrange que existem números $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$, para i = 1, 2, ...,n, tais que $G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} [G(t_i) - G(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} G'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) =$

Passando ao limite e usando a definição de integral, temos que $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$. Disso segue que $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in [a, b]$.

Uma consequência do TFC e do corolário do teorema da convergência uniforme para integrais é o teorema de convergência uniforme para derivadas.

Teorema da convergência uniforme de derivadas

Seja (f_n), $f_n: [a, b] \to R$, uma sequência de funções com derivadas contínuas. Se essa sequência converge em um ponto c de $[a, b]$ e a sequência das derivadas (f_n') converge uniformemente para uma função g, então (f_n) converge uniformemente para uma função f, que é derivável e f ' = g, o que equivale a $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Em palavras simples: a derivada do limite de (f_n) é igual ao limite das derivadas (f_n') .

Prova

Pelo TFC, podemos escrever $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt.$ (1)

E como a convergência de (f_n') é uniforme, podemos usar o corolário do teorema da convergência uniforme de integrais para obter $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt \Leftrightarrow f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$ (2)

Disso segue que *f ' = g* . Agora, precisamos provar a convergência uniforme de (f_n) para *f.*

Por (1), (2) e a desigualdade triangular, temos que $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left|\int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt\right|_n.$ (3)

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um k ∈ N tal que, para todo $t \in [a,b]$, $n > k \Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \varepsilon$ e $|f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon.$

Combinado isso com (3), obtemos $n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon'$, o que conclui a prova.

Integração por partes

Neste capítulo, vimos que dadas duas funções reais deriváveis f e g, em um certo intervalo, vale a regra do produto $[f(t).g(t)]' = f'(t).g(t) + f(t).g'(t)$.

Suponhamos que o intervalo seja $[a,b], a < b$ e que as funções f' e g' sejam integráveis em $[a,b]$. Então a primitiva de $[f(x).g(x)]'$ é igual à primitiva de $f'(t).g(t) + f(t).g'(t)$ se essa última existir. Pelo TFC podemos escrever

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt + C = f(x).g(x) - \int_a^x g(t)f'(t)dt\ .$$

E no caso do cálculo da integral no intervalo $[a,b]$, escrevemos assim:

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(t).g(t)]\ {}_a^b - \int_a^b g(t)f'(t)dt\ .$$

O termo $f(t).g(t)]_a^b$ significa a diferença $f(b).g(b) - f(a).g(a)$. Em termos mais simples, para facilitar a recordação, se apresenta essa regra da integração por partes, colocando $u = f(t), v = g(t), dv = g'(t)dt$ e $du = f'(t)dt$. Ela fica com a seguinte forma

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Exemplo-1:

Calcular a primitiva geral da função $f(x) = xe^{2x}$. $\int xe^{2x}dx$ = $\int udv$ = uv - $\int vdu$ = ? Qual a melhor escolha: u = e^{2x} ou u = x ? Testando, verificamos que a melhor é u = x. Assim sendo, colocamos dv = $e^{2x}dx$. E como $\int e^{2x}dx$ = $\frac{1}{2}e^{2x}$, então $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}$ - $\int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}xe^{2x}$ + C. Se tivéssemos escolhido u = e^{2x}, teríamos chegado em uma integral mais complexa, que também poderia ser calculada por integração por partes. Ou seja, precisaríamos aplicar o método duas vezes para chegar ao resultado. O próximo exemplo exigirá isso.

Exemplo-2:

Calcular a primitiva geral da função $g(x) = e^x cosx$, sabendo que $(cosx)' = -senx$ e $(senx)' = cosx$.

$\int e^x cosxdx$ = $\int udv$ = $e^x senx$ - $\int e^x senxdx$, onde u = e^x e dv = cosxdx. Agora, vamos calcular $\int e^x senxdx$ por partes também, fazendo u = e^x e dv = senxdx. Procedendo desse modo obtemos: $\int e^x senxdx$ = - $e^x cosx$ + $\int e^x cosxdx$. Substituindo essa expressão na primeira igualdade chegamos ao resultado:

$$\int e^x cosxdx = \frac{1}{2}e^x(senx + cosx) + C.$$

Obs.: Compare a fórmula de integração por partes com a da somação por partes, que foi vista no capítulo 1. Perceba mais essa bela aproximação multifária!

Integração por substituição(Mudança de variável)

Considere as funções $f: [a, b] \to R$ e $g: [c, d] \to R$ tais que f seja contínua, g tenha derivada contínua e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt$.

Prova

Pelo TFC, f tem uma primitiva F : $[a, b] \to R$ e vale $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$. E pela Regra da Cadeia, temos que $(Fog)'(t) = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t)$, para todo t de [c, d]. Portanto, Fog: [c, d] $\to R$ é uma primitiva da função contínua h(t) = $(Fog)'(t) = f(g(t)).g'(t)$, e, por conseguinte, $\int_c^d f(g(t)).g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$, o que conclui a prova.

Na forma de integral indefinida se apresenta assim a fórmula de mudança de variável: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, onde *u = g(x).*

Exemplos:

A) $\int 2xsen(1 + x^2)dx$ = $\int sen(u)du$ = - cos(u) + C = - cos$(1 + x^2)$ + C, onde u = $1 + x^2$ e du = 2xdx.

B) $\int xe^{x^2}dx$ = $\int \frac{1}{2}e^u du = \frac{1}{2}e^u$ + C = $\frac{1}{2}e^{x^2}$ + C, onde u = x^2.

O leitor poderá praticar essas técnicas de integração com a ajuda do WolframAlpha(ou do GeoGebra), verificando o passo-a-passo desse software. Dois exemplos são dados a seguir. No primeiro, pedimos a integral indefinida da função real $f(x) = 3x^2 \log(5x)$; e no segundo pedimos a de $f(x) = 3^{2x}x^3$.

$$= 3\int x^2 \log(5x)\,dx$$

For the integrand $x^2 \log(5x)$, integrate by parts, $\int f\,dg = fg - \int g\,df$, where
$f = \log(5x), \quad dg = x^2\,dx,$
$df = \frac{1}{x}\,dx, \quad g = \frac{x^3}{3}$:

$$= x^3 \log(5x) - \int x^2\,dx$$

The integral of x^2 is $\frac{x^3}{3}$:

$$= x^3 \log(5x) - \frac{x^3}{3} + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= \frac{1}{3}x^3\,(3\log(5x) - 1) + \text{constant}$$

Basic Step-by-Step Solution

Approximate form

Take the integral:

$$\int 3^{2x}x^3\,dx$$

For the integrand $3^{2x}x^3$, integrate by parts, $\int f\,dg = fg - \int g\,df$, where
$f = x^3, \quad dg = 3^{2x}\,dx,$
$df = 3x^2\,dx, \quad g = \frac{3^{2x}}{2\log(3)}$:

$$= \frac{3^{2x}x^3}{2\log(3)} - \frac{3}{2\log(3)}\int 3^{2x}x^2\,dx$$

For the integrand $3^{2x}x^2$, integrate by parts, $\int f\,dg = fg - \int g\,df$, where
$f = x^2, \quad dg = 3^{2x}\,dx,$
$df = 2x\,dx, \quad g = \frac{3^{2x}}{2\log(3)}$:

$$= -\frac{3^{2x+1}x^2}{4\log^2(3)} + \frac{3^{2x}x^3}{2\log(3)} + \frac{3}{2\log^2(3)}\int 3^{2x}x\,dx$$

A continuação do passo-a-passo está na figura seguinte.

Basic Step-by-Step Solution

Approximate form

For the integrand $3^{2x}x$, integrate by parts, $\int f\,dg = fg - \int g\,df$, where
$f = x, \quad dg = 3^{2x}\,dx,$
$df = dx, \quad g = \frac{3^{2x}}{2\log(3)}$:

$$= \frac{3^{2x+1}x}{4\log^3(3)} - \frac{3^{2x+1}x^2}{4\log^2(3)} + \frac{3^{2x}x^3}{2\log(3)} - \frac{3}{4\log^3(3)}\int 3^{2x}\,dx$$

The integral of 3^{2x} is $\frac{3^{2x}}{2\log(3)}$:

$$= \frac{3^{2x}x^3}{2\log(3)} - \frac{3^{2x+1}x^2}{4\log^2(3)} - \frac{3^{2x+1}}{8\log^4(3)} + \frac{3^{2x+1}x}{4\log^3(3)} + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= \frac{9^x\left(x^3\log^3(9) - 3x^2\log^2(9) + 6x\log(9) - 6\right)}{\log^4(9)} + \text{constant}$$

Teorema do valor médio para integrais

Seja $f:[a,b] \to R$ uma função contínua. Então existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Obs.: O valor $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ é denominado de **valor médio** da função no intervalo $[a,b]$. Ele representa uma generalização da media aritmética. Falaremos mais sobre isso no último capítulo.

Prova

Pelo Teorema de Weierstrass temos que existem um valor máximo M e um valor mínimo *m* de f(x) em [a, b]. Ou seja, $m \leq f(x) \leq M$. Disso segue que $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. (1)

De (1) segue que $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$ e pelo teorema do valor intermediário existe um número c em [a, b] tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, o que equivale a $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

TABELA DE PRIMITIVAS

(1) $\int du = u + C$	(2) $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$
(3) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (α é constante $\neq -1$)	(4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
(5) $\int e^u du = e^u + C$	(6) $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$
(7) $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$	(8) $\int \operatorname{tg} u du = \ln\|\sec u\| + C$
(9) $\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln\|\operatorname{sen} u\| + C$	(10) $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln\|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u\| + C$
(11) $\int \sec u\, du = \ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\| + C$	(12) $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$
(13) $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$	(14) $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$
(15) $\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u du = -\operatorname{cosec} u + C$	(16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$
(17) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$	(18) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\left\|\frac{u}{a}\right\| + C$
(19) $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$	(20) $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$

Comentário

Na nossa avaliação não tem mais sentido gastar muito tempo de um curso de Cálculo Integral com questões numéricas repetidas. Muito menos memorizar uma lista grande de primitivas. Considerando o avanço da computação e a facilidade do uso de aplicativos gratuitos como WolframAlpha e Geogebra, deveríamos melhorar a proficiência dos nossos aprendentes no uso deles e aumentar outros tópicos, como comentamos antes.

NOTA(A aproximação "discreta" do Teorema Fundamental do Cálculo):

Perceba a aproximação de “forma” entre o Teorema Fundamental do Cálculo e o teorema fundamental da Somação apresentado no Capítulo-1:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_{n+1} - x_1 \iff \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Faça a analogia (aproximação) assim: $x_k = f(k)$ => $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = f(n+1) - f(1)$. E lembre-se da diferencial $dy = df(x) = f'(x)dx$ e $dx = \Delta x$. Assim temos a analogia:

somatório das diferenças ⇔integral da diferencial; intervalo de índices naturais ⇔intervalo de números reais.

Atualmente, com o uso universal do computador e seus algoritmos, adquiriram relevância as chamadas Equações de Diferenças, que são "primas" das equações diferenciais.E de um modo geral toda a chamada Matemática Discreta tornou-se importante com o avanço da computação. Pode-se assim dizer que o teorema da Somação é a versão discreta do teorema fundamental do cálculo. Uma espécie de "primitivação discreta". Para uma introdução ao estudo das Equações de Diferenças veja a referência [Saraiva, 2013].

Os dois principais criadores do Cálculo Integral e Diferencial são Newton e Leibniz. Na verdade, a criação ´do Cálculo é coletiva, envolve vários outros personagens, como Fermat, Euler, Lagrange, Cauchy e Riemann, bem como outras contribuições históricas mais antigas, como o método da exaustão criado pelos gregos Eudoxus, Arquimedes e outros.

Há muitos textos/vídeos sobre a História do Cálculo que estão disponíveis na internet. Também os livros de História da Matemática, que citamos nas referências bibliográficas, têm bastante informações sobre ela.

Extensão do conceito de integral(Integraís impróprias)

Podemos estender a definição de integral de funções quase limitadas para intervalos ilimitados e também para alguns tipos de funções ilimitadas definidas em intervalos de uma das formas: limitados $(a,b]$, $[a,b)$ ou $(a,b), \text{com } a < b$; e ilimitados $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty) = R$.

Primeiramente, vamos tratar do caso de intervalos limitados. Suponhamos que $f: (a,b] \to R$ seja integrável em $[a,x]$, com $x \in (a,b)$, mas ilimitada em qualquer intervalo $(x,b]$. Definimos a integral(imprópri**a)** de f em $[a,b]$, indicada pelo mesmo símbolo da integral de f em $[a,x]$, assim

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,dt$$

Desde que esse limite exista. Nesse caso diz-se outrossim que a integral(imprópria**)** converge.Todos os outros casos são definidos de forma análoga, sempre garantindo a existência dos limites envolvidos nas respectivas definições. Listamos, a seguir, as fórmulas dos outros casos de intervalos limitados.

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)\,dt\,,$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x \to a+} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x \to b-} \int_c^x f(t)\,dt, \qquad c \in (a,b).$$

Neste último caso pode acontecer de existir o limite da soma, mas não existirem os limites das parcelas. No caso de intervalos ilimitados, as funções podem ser também limitadas. As fórmulas análogas são as seguintes:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$

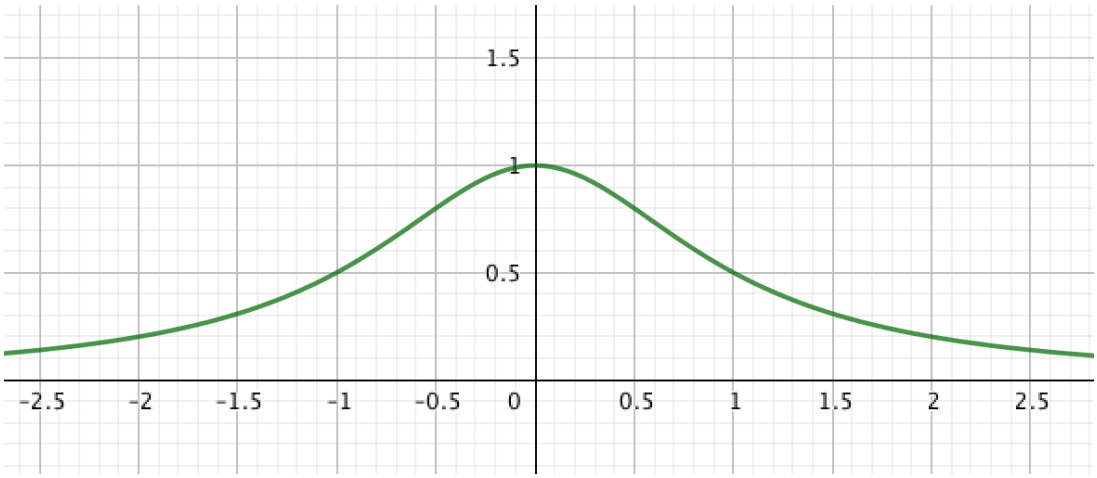
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

Um primeiro exemplo, com função limitada e intervalo ilimitado, é o da integral da função $f: R \to R$, definida por $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ em R. Sua integral pode ser calculada usando o TFC e sabendo que uma primitiva de f é a função F(t) = arctg (t) .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)\,dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt =$$

$$arctg(0) - \lim_{x \to -\infty} arctg(x) + \lim_{x \to +\infty} artg(x) - arctg(0) = 0 - (-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Observe o gráfico parcial dessa função a seguir.



Um segundo exemplo, é o da *função gama,* que é definida assim:

$$\Gamma: (0, +\infty) \to R, \text{ definida por } \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Para mostrarmos que essa integral converge, a decompomos na soma de duas integrais:

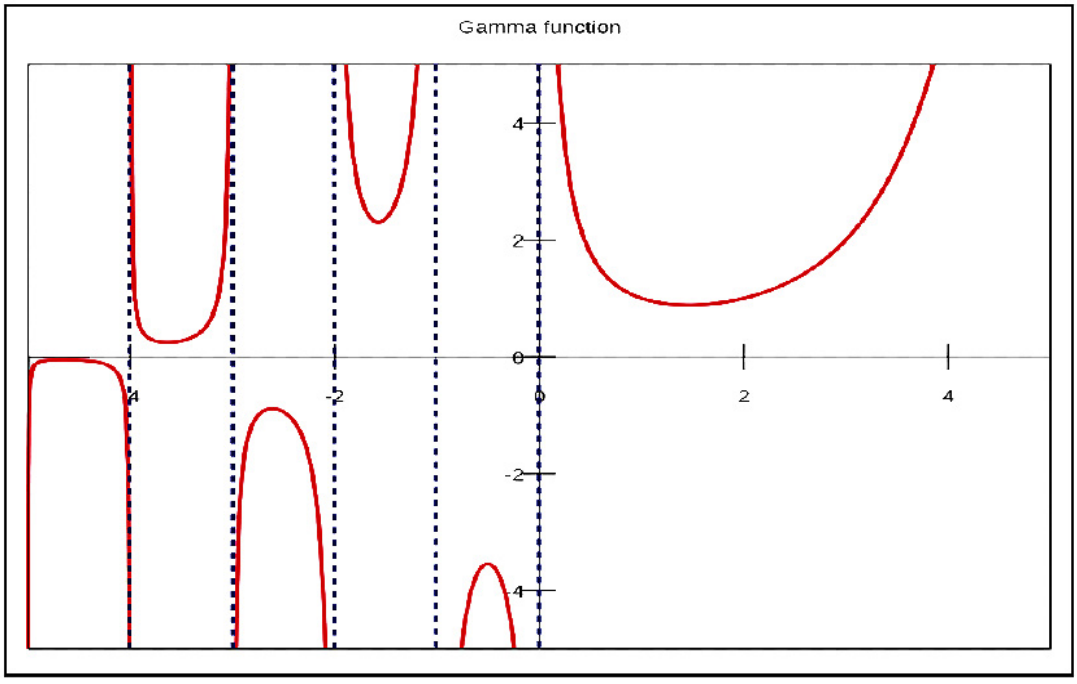
$$\Gamma(t) = \Gamma(t) = \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Essas duas integrais são convergentes, pois $e^{-x}x^{t-1} \leq 1/x^{1-t}$, para $t, x \in (0,1]$, e $e^{-x}x^{t-1} \leq \frac{1}{x^2}$, para $t \in [\,1, +\infty)$ e x suficientemente grande.

Observe que $e^{-x}x^{t-1} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^{t+1}}{e^x} \leq 1$ e que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = 0$. Portanto existe um k > 0 tal que $x > k \Rightarrow \frac{x^{t+1}}{e^x} \leq 1$.

A função gama é uma generalização da sequência(função) fatorial $a_n = n!$, para n natural. Verifique que $\Gamma(n+1) = n!$ e que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, usando integração por partes. Prova-se também que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, fazendo t = ½ e x = u^2 na fórmula anterior, obtendo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. Como veremos no capítulo sobre polinômios, no tópico sobre curva de Gauss, $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Logo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Obs.: A equação funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ permite estender a função gama para valores negativos reais não inteiros. Há muitos textos e vídeos disponíveis na Web sobre essa importante função. Vale a pena consultar alguns links. **Acesse o Código QR** .



Obs.: O limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = 0$ decorre do seguinte. Seja y = $e^{x/t}$. Então $x = t.\ln y$.

Disso segue que $x \to +\infty$ equivale a $y \to +\infty$. Logo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/t}} = \lim_{y\to+\infty} t\frac{\ln y}{y} = 0$, o que nos leva a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^t}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{x/t}}\right)^t = 0.$$

Análogos aos das séries numéricas temos, basicamente, três critérios de convergência das integrais impróprias.

Critérios de convergência das integrais impróprias

1) Sejam f e g funções integráveis em [a, x] para todo x > 0, 0 ≤ f ≤ g. Então,

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge;

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

2) Seja f uma função integrável em [a, x] para todo x > a . Então, a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge se $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge.

3) (Critério de Cauchy). $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista M tal que $x, y > M \Rightarrow \left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$.

Quando ocorre o segundo caso, dizemos que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é absolutamente convergente. Ao contrário, se essa integral converge e $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ diverge, dizemos que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é condicionalmente divergente.

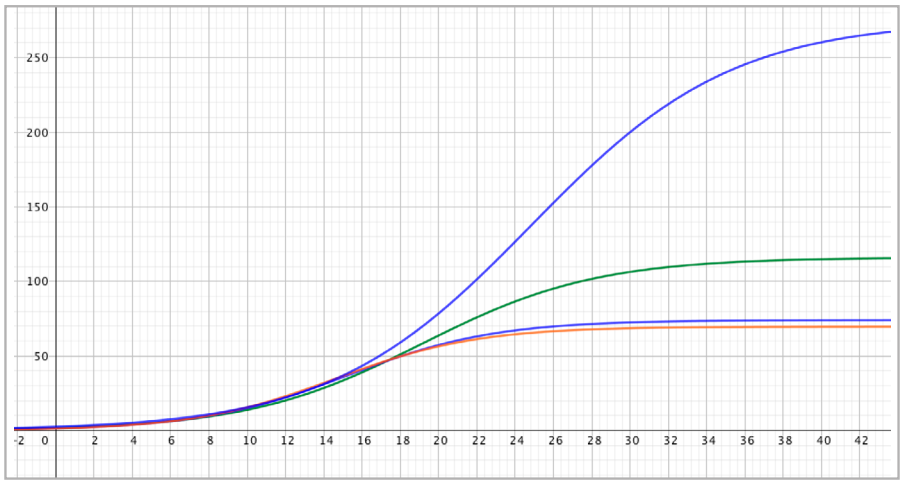
Esses critérios são válidos para os outros tipos de integrais impróprias.

COMPARANDO MODELOS NA COVID-19: EXPONENCIAL X LOGÍSTICA

Mostramos neste texto uma aplicação do método da regressão com o Geogebra aos dados oficiais sobre a incidência acumulada da COVID-19 no Brasil, no período de 23/03/20 a 30/04/20, com o objetivo de comparar dois modelos de função: o exponencial e o logístico. Desejamos verificar, mais precisamente, qual deles tem melhor aproximação com os dados da realidade em foco. A finalidade aqui é sobretudo pedagógica. Lembremos que as fórmulas gerais desses dois tipos de modelos são:

$y = ce^{kx}$ e $y = \frac{L}{1 + ae^{-kx}}$.

Observe que a função logística é obtida a partir da exponencial, mas ela é limitada superiormente($y \leq L$) e tem a forma de “S”, conforme ilustrado a seguir. Na figura estão esboçados os gráficos de quatro funções logísticas, as quais estão relacionadas aos dados aqui estudados.



Esse formato lembra o formato do gráfico da função hiperbólica f(x) = tgh(x). Aliás uma pode ser expressa em termos da outra. Esse formato a torna muito mais adequada para muitas aplicações, tais como nas redes neurais, como função de ativação, e no crescimento de populações. Para uma noção geral e sintética dessa função, veja o verbete função logística na Wikipédia. Para maior simplicidade, comparamos aqui apenas 4 pares de gráficos, com arredondamento do número de casos acumulados.

Adotamos o seguinte:

A) No eixo horizontal(tempo): 2 indica 23/03, 3 indica 25/03, ..., 21 indica 30/04.

B) No eixo vertical(N° de casos): 10 indica 10 000 casos, 20 indica 20000 casos, etc.

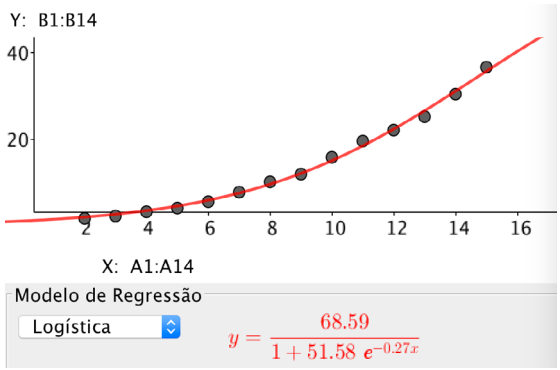
C) Ordem dos gráficos: 1º) até 15(18/04); 2º) até 17(22/04); 3º) até 19(26/04) e 4º) até 21(30/04).

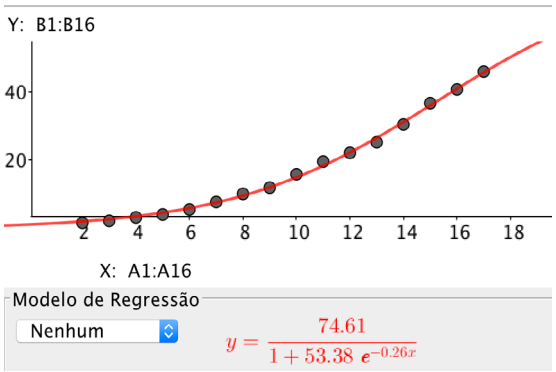
D) Agrupamos os quatro gráficos de cada modelo na ordem da esquerda para direita e de cima para baixo, ou seja, na forma a seguir.

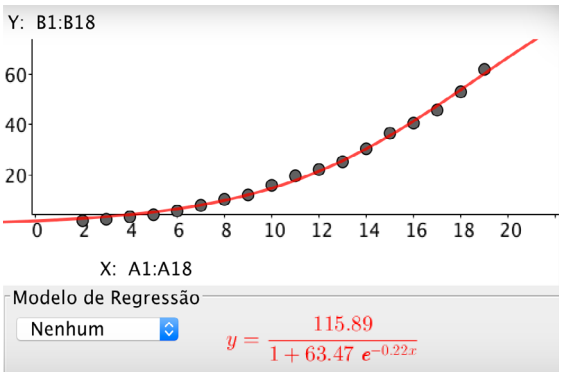
1º gráfico	2º gráfico
3º gráfico	4º gráfico

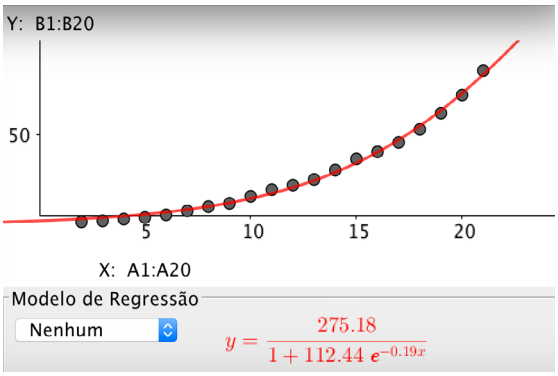
Percebemos, comparando os gráficos correspondentes dos dois modelos, o ajuste “mais fino” da curva logística com os pontos amostrais do gráfico. Praticamente, nos quatro gráficos, há uma coincidência dos pontos amostrais com a curva de regressão logística, o que não ocorre com os gráficos de regressão exponencial. Isso nos permite afirmar que o modelo logístico dá uma aproximação melhor da realidade dos dados do que o model0o exponencial.

As figuras à frente ilustram todos os oito gráficos.

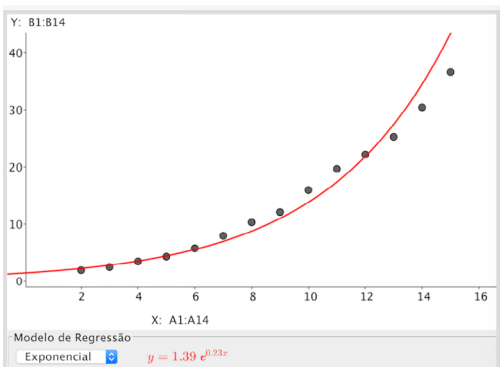


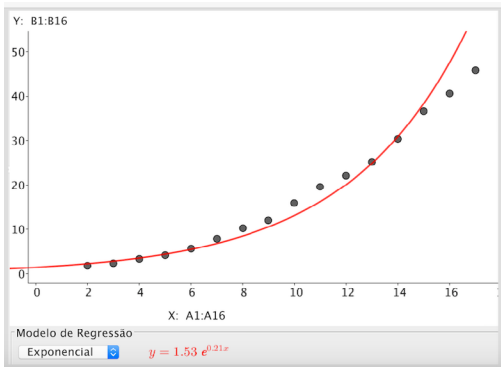


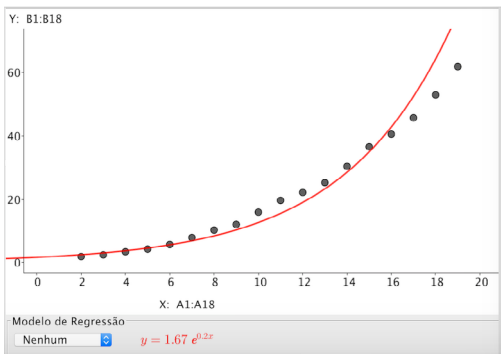


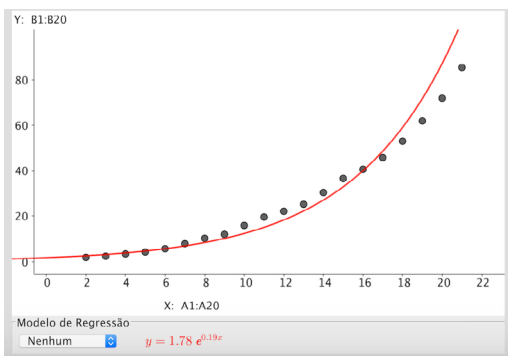


Obs.: Os gráficos dessas quatro funções logísticas estão esboçados, simultaneamente, na figura anterior, em um intervalo de tempo maior, para mostrar o formato em S deles.









É neste sentido que compreendemos a Matemática como uma "ciência de aproximação". Não é porque estamos utilizando matemática para explicar uma dada realidade que a explicação é exata. Ela é, de um modo geral, apenas uma aproximação da realidade estudada. O que podemos e devemos sempre buscar é aprimorarmos as "aproximações multifárias" dessa realidade em estudo. E quanto mais conhecermos essa realidade, mais chance temos de construir modelos matemáticos mais próximos dela. Isso provoca a inovação e criação de novos conteúdos em Matemática e outras ciências.

Esta visão nos coloca numa posição "mais aberta" para aprender sempre mais, tanto individualmente, como com os outros e com o mundo todo que estiver ao nosso alcance. Nos livra da acomodação de achar que já sabemos tudo e nos põe em marcha permanente à procura da verdade e da expansão progressiva de nosso conhecimento. Nos leva a uma caminhada que busca, com mais diálogo e sensibilidade fraterna, com mais tolerância com os que pensam de forma diferente, "construir uma sociedade livre, justa e solidária", "reduzir as desigualdades sociais e regionais" e "promover o bem de todos, sem preconceito", como prescreve o Art. 3º de nossa Constituição Federal.

Obs.: Esse texto sobre Covid-19 foi escrito em 01/05/20.

NOTA (Regressão)

As técnicas de Regressão se baseiam no conhecido **"método dos mínimos quadrados"**. Isso significa que se deve obter, dentro de uma família de curvas de um certo modelo, aquela que se aproxima melhor dos "pontos dados", de tal modo que o erro médio quadrático seja mínimo. Comumente, os padrões de curvas mais usados são: Linear, Polinomial, Exponencial, Logarítmica, senoidal e Logística. A dificuldade prática está na escolha do modelo. Mesmo que a conta seja muito precisa computacionalmente, a curva modelo pode ter uma aproximação muito ruim dos dados da situação real. No caso analisado acima, percebemos que a "curva logística" foi um modelo melhor do que o da "curva exponencial". No capítulo 3, apresentamos as bases teóricas desse método.

DRN-L153:

A) Seja $f(x) = b^x$, $0 < b \neq 1$. Então f deve satisfazer à condição $b^{x+2} = b^{x+1} + b^x$, que implica $b^2 = b + 1 \Leftrightarrow b^2 - b - 1 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos: $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois $b > 0$. Mas $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, logo $f(x) = \varphi^x$.

B) Sabemos que $\varphi^x = e^{ln\varphi\, x}$. Portanto, usando a regra da cadeia, obtemos $f'(x) = ln\varphi.\varphi^x$. Verifiquemos se f'(x) é função de Fibonacci, isto é, se $f'(x + 2) = f'(x + 1) + f'(x)$, para todo x real.

$F'(x + 2) = ln\varphi.\varphi^{x+2} = ln\varphi.\varphi^x.\varphi^2$ e $f'(x + 1) + f'(x) = ln\varphi.\varphi^{x+1} + ln\varphi.\varphi^x = ln\varphi.\varphi^x(\varphi + 1)$.

Mas $\varphi^2 = \varphi + 1$, o que conclui a prova.

C) Vamos usar indução infinita para provar:

(1) $f(x + n) = F_n.f(x + 1) + F_{n-1}.f(x)$, para todo x real e $n \geq 2$.

Por definição $f(x + 2) = f(x + 1) + f(x)$, para todo x real. Logo (1) vale para n = 2, pois $F_2 = F_1 = 1$.

Agora suponhamos que (1) seja válida para n = k. Devemos provar que (1) vale para n = k + 1.

Para n = k + 1, temos que $f(x + k + 1) = f[(x + 1) + k] = F_k.f(x + 2) + F_{k-1}.f(x + 1)$

$= F_k[f(x + 1) + f(x)] + F_{k-1}.f(x + 1)$

$= (F_k + F_{k-1})f(x + 1) + F_k.f(x)$

$= F_{k+1}.f(x + 1) + F_k.f(x)$.

Portanto, (1) é válida.

D) Indiquemos a condição dada por (2). Queremos que $g(x) = 1/\varphi^x$ satisfaça à (2). Temos que $g(x + 2) = \frac{1}{\varphi^{x+2}} = \frac{1}{\varphi^x}(\frac{1}{\varphi^2})$ e $- g(x + 1) + g(x) = - 1/\varphi^{x+1} + 1/\varphi^x = \frac{1}{\varphi^x}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi}\right) = \frac{1}{\varphi^x}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi^2-1}\right) = \frac{1}{\varphi^x}(\frac{1}{\varphi^2})$, pois $\varphi^2 = \varphi + 1$.

DRN-L154:

Temos que G = (1, 0). E da semelhança de triângulos AOF ←→ FOG, obtemos : AF/FG = OF/OG = OF, que implica $OF = \frac{b\sqrt{2}}{b\sqrt{2}} = \varphi$. Logo $F = (\varphi, \frac{\pi}{2})$. Agora podemos calcular c e k na função exponencial $\rho(\theta) = ce^{k\theta}$. De G = (1, 0) vem $\rho(0) = 1$, que equivale a *c = 1.* Por outro lado, de F = $(\varphi, \frac{\pi}{2})$ vem $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi$, que equivale a $e^{k\frac{\pi}{2}} = \varphi$. Disso segue que $k = \frac{2}{\pi} ln\, \varphi$. Portanto, a função exponencial procurada é $\rho(\theta) = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}$.

DRN-L155:

Perceba que $tgh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Reveja a QL – 152 sobre função de ativação.

A CAPACIDADE DE UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Do ponto de vista computacional é importante saber qual a "capacidade" que um sistema de numeração tem de representar números. Essa capacidade se caracteriza pela quantidade de números que cada sistema de numeração pode representar com uma dada quantidade de dígitos. Considere um sistema A de base b que representa k números com n dígitos e um sistema B de base c que representa p números com n dígitos. Se p > k, então dizemos que B tem capacidade maior do que A.

Para uma melhor compreensão, consideremos os 10 000 primeiros números inteiros não nulos: 0, 1, 2, 3, ..., 9999. Para representá-los no sistema decimal, são necessários 40 dígitos, 10 para cada ordem decimal. Ou seja, para se representar 10^4 números no sistema decimal precisamos de

40 dígitos. Por outro lado, com 40 dígitos podemos representar 2^{20} números, no sistema binário(2 dígitos para cada ordem binária). Comparando as capacidades desses dois sistemas de numeração, verificamos que o binário tem maior capacidade do que o decimal, pois $2^{20} > 2^{16} = 16^4 > 10^4$. Também verificamos que $2^{20} = 4^{10}$, o que nos leva a deduzir que os sistemas binário e quaternário têm capacidades iguais. Evidentemente, como o sistema binário é mais simples de ser implementado no computador, sua escolha deve ser a preferida. Com esses exemplos surge a pergunta natural: **qual o sistema de numeração de maior capacidade?**

Na busca inicial da resposta dessa pergunta, vamos supor que dispomos de 60 dígitos e desejamos comparar as capacidades dos sistemas de numeração cujas bases são divisores(diferentes de 1) positivos de 60: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 30 e 60. Seguindo o procedimento anterior, precisamos comparar os seguintes números:

$$2^{30},\ 3^{20},\ 4^{15},\ 5^{12},\ 6^{10},\ 10^6,\ 12^5,\ 15^4,\ 20^3,\ 30^2 \text{ e } 60^1.$$

É claro que $3^{20} = 9^{10} > 8^{10} = 2^{30} = 4^{15}$. **Logo o sistema de base 3 tem capacidade maior do que a do binário, que é igual à do quaternário**. Comparando-se os outros verifica-se a seguinte ordenação:

$$3^{20} > 2^{30} = 4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^6 > 12^5 > 15^4 > 20^3 > 30^2 > 60^1.$$

Em relação a essa lista de sistemas de numeração, podemos afirmar que o de maior capacidade é o de base 3. Mas precisamos dar uma resposta geral à pergunta feita. Perceba que nos exemplos listados as capacidades foram calculadas pelas potências da forma $x^{\frac{n}{x}}$: $2^{60/2}$, $3^{60/3}$, $4^{60/4}$, etc, em que n = 60 é o número de dígitos disponíveis e x é a base do sistema. Para o caso geral, vamos considerar *n* dígitos para uma base genérica *x* de um sistema de numeração. Nesse sistema genérico teremos n/x ordens de base x. E a quantidade de números que podemos representar com os *n* dígitos é dada por $x^{\frac{n}{x}}$.

Para avaliarmos melhor a quantidade $x^{\frac{n}{x}}$, vamos interpretá-la como uma função real contínua de variável *x* positiva, definida por $f(x) = x^{\frac{n}{x}}$. Agora precisamos determinar o valor de *x*, para o qual essa função tem valor máximo. Se esse valor não for inteiro, então encontraremos o inteiro mais próximo dele, que será a base procurada. Como já vimos antes, o inteiro mais próximo de um número real *y* é dado por [y + ½], em que [z] representa a parte inteira de z.

Sabemos que $e^{lnx} = x$. Então $f(x) = x^{\frac{n}{x}} = (e^{lnx})^{\frac{n}{x}} = e^{\frac{n}{x}lnx}$.

Derivando *f* , com a ajuda da regra da cadeia e da regra do produto, obtemos:

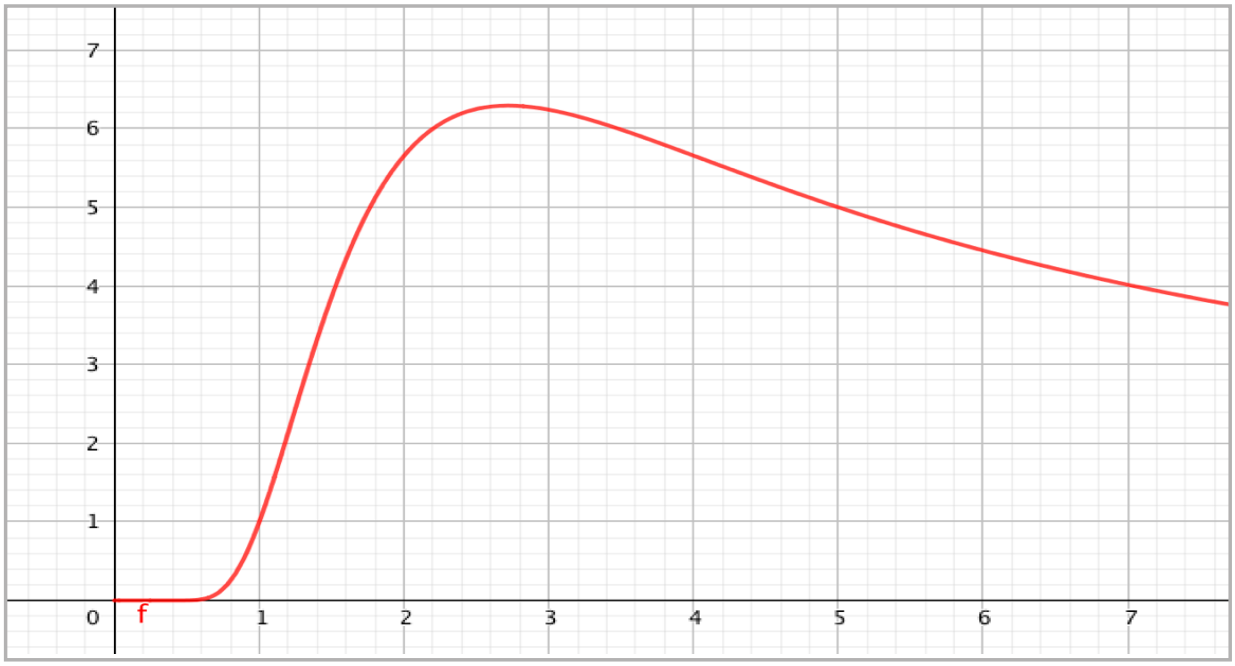
$$f'(x) = x^{\frac{n}{x}}\left(\frac{n}{x}.lnx\right)' = x^{\frac{n}{x}}\left[-\frac{n}{x^2}.lnx + \frac{n}{x^2}\right] = nx^{\frac{n}{x}-2}(1 - lnx).$$

Fazendo $f'(x) = 0$, teremos: $lnx = 1 \Leftrightarrow x = e \cong 2{,}718$.

E verificamos que $x < e \Rightarrow f'(x) > 0$ e $x > e \Rightarrow f'(x) < 0$.

Assim, $x = e$ é o ponto no qual $f(x)$ tem valor máximo. E portanto, a base inteira procurada é $[e + \frac{1}{2}] = 3$.

A figura a seguir ilustra o gráfico da função $f(x) = x^{\frac{n}{x}}$.



Concluímos, pois, que **o sistema de numeração de maior capacidade é o de base 3.**

Outra prova usando só sequências

É possível provarmos que o sistema de base 3 é o que tem maior capacidade sem usarmos derivadas. Para isso, basta usarmos sequências adequadas. Mais uma vez vemos a relevância das sequências na organização da Matemática. Considere as sequências monótonas usadas na definição do número *e:* $a_n = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n!$ e $b_n = (1 + 1/n)^n = 1 + 1 + (1 - 1/n)/2! + (1 - 1/n)(1 - 2/n)/3! + \ldots + (1 - 1/n)\,(1 - 2/n)\ldots(1 - (n-1)/n)/n!$. Perceba que a_n é crescente e limitada(por 3, conforme mostramos anteriormente com o critério de comparação) e que b_n é crescente também, mas $b_n < a_n$.

Logo $(1 + 1/n)^n < 3$, para todo n. Por outro lado, a *sequência* $c_n = n^{1/n}$ *é decrescente a partir do terceiro termo*, pois $n^{1/n} > (n + 1)^{1/(n+1)}$ é equivalente a $n^{n+1} > (n+1)^n\, n^{1/n}$, que por sua vez equivale a $n > (1 + 1/n)^n$, para n maior ou igual a 3, já que $(1 + 1/n)^n < 3$, para todo n. Como a *sequência* $c_n = n^{1/n}$ *é decrescente a partir do terceiro termo*, então a sequência $n^{p/n}$ também é decrescente a partir do terceiro termo, para todo p natural, em virtude da relação de ordem para números positivos: se $a < b$, então $a^p < b^p$, para p natural. Conclui-se assim que 3 é a base do sistema de maior capacidade.

CAPÍTULO III

BASES DA TRIGONOMETRIA, ESPAÇOS VETORIAIS E APROXIMAÇÕES

BREVE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

A palavra trigonometria deriva das palavras gregas "trigonon"(triângulo) e "metron"(medida). Ela surge do estudo das medidas das partes(lados e ângulos) de um triângulo e de suas relações. Sua origem, segundo os estudos históricos mais recentes, se deu com os **antigos egípcios e babilônios, que conheciam** teoremas sobre as razões dos lados de triângulos semelhantes. A primeira tabela trigonométrica foi compilada por Hiparco (180–125 a.C.), que é agora conhecido como o “pai da trigonometria”.

Nas obras de Euclides já existiam teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas. Erastóstenes de Cirene (276 -196 a.C.), contemporâneo de Arquimedes (287-212 a. C.) e Aristarco (310-230 a. C.) produziram a mais famosa medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

Porém, a mais influente e significativa obra da antiguidade, relacionada com a trigonometria, foi a **Syntaxis matematica**, obra escrita por Ptolomeu que viveu no século II. Depois, na Arábia, o chamaram **Almagesto**, por designação da língua, e a partir de então a obra é conhecida por esse nome. A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia.

No século XV, o matemático e astrônomo Purbach(1423-1461) retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viéte no século XVI e teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal.

No século XVIII, com a contribuição de vários matemáticos, com destaque para Leonardo Euler, surge a trigonometria moderna. Dele veio a famosa “fórmula de Euler”

$e^{it} = cost + isent$, que tem como caso especial a fórmula

$e^{i\pi} + 1 = 0$, que foi considerada por Richard Feynman “a fórmula mais notável em matemática”.

Pela importância de Leonardo Euler em vários ramos da Matemática, vale a pena saber um pouco de sua vida e obra. Consulte a Wikipédia sobre isso.

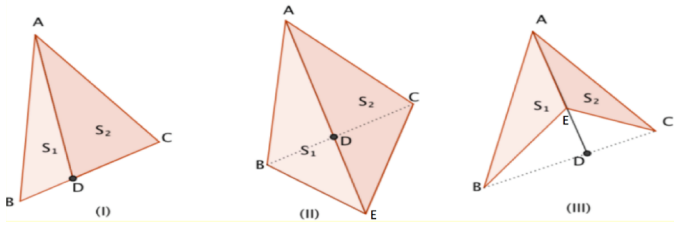
Para maiores detalhes sobre a história da Trigonometria veja as referências [Boyer, 1974], [Eves, 1995], **Acesse o Código QR(I) e o Código QR(II)** . Outras fontes interessantes estão disponíveis via Web.

QR (II) QR (I)

TEOREMA DO LADO COMUM (TLC)

Para cada uma das três situações descritas pelas figuras a seguir, em que S_1 e S_2 indicam as áreas de dois triângulos que têm um lado em comum e estão no mesmo plano, vale a proporção:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BD}{DC}$$



Corolário:

Nas situações (II) e (III) do TLC, valem as proporções:

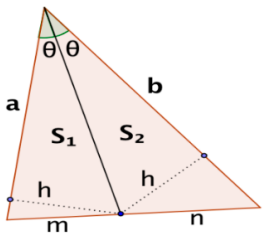
$$\frac{(ABC)}{(BEC)} = \frac{AD}{DE} \quad \text{e} \quad \frac{(ABC)}{(BEC)} = \frac{AD}{ED}.$$

NOTA:

Este teorema pode ser provado, procedendo-se como segue. Prova-se a primeira proporção com a fórmula usual da área do triângulo. Depois combina a primeira com as propriedades das proporções para obter as outras duas. O nome do teorema e a sua formulação são por nossa conta. Nosso interesse maior nele vem de uma experiência com turmas de 9º ano do EF do Colégio CEV, no ano de 2014. Muitos problemas interessantes, bem como teoremas conhecidos (Teorema da Bissetriz interna, Teorema Fundamental da Semelhança, T. de Tales, T. de Ceva, T. de Menelau, Teorema de Steiner e outros) da Geometria Plana, podem ser resolvidos ou provados, de modo mais simples, com seu uso. Este teorema e suas implicações se encaixam naquilo que coloquei na introdução sobre o incentivo ao estudo e à pesquisa em e com a Matemática Intermediária.

Teorema da bissetriz interna

"A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo separa o lado oposto em segmentos, cujos comprimentos são proporcionais aos comprimentos dos lados adjacentes."



PROVA:

Pelo TLC temos: $S_1 / S_2 = m/n$ (*)

Como $S_1 = ah/2$ e $S_2 = bh/2$, então $S_1 / S_2 = a/b$ (**)

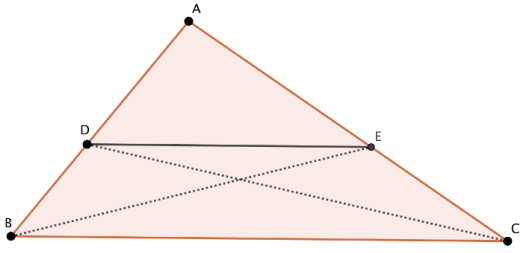
Por (*) e (**) obtemos: $a/b = m/n \Leftrightarrow$ **m/a = n/b**.

Teorema fundamental da semelhança(ou da proporcionalidade)

Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.

PROVA:

Seja ABC um triângulo qualquer. Por um ponto D de AB traça-se uma paralela ao lado BC, conforme ilustra a figura a seguir. Assim temos DE // BC. Queremos provar que AB/AD = AC/AE. Tracemos com linha pontilhada as diagonais do trapézio BDEC.



Usando o TLC(teorema do lado comum) podemos escrever (BDE)/(ADE) = BD/AD e (CDE)/(ADE) = CE/AE. (1)

Mas BDE e CDE têm bases iguais e alturas iguais, logo (BDE) = (CDE). Combinando esse resultado com (1) obtemos BD/AD = CE/AE. Disso segue BD/AD + 1 = CE/AE + 1, que equivale a AB/AD = AC/AE, como queríamos provar.

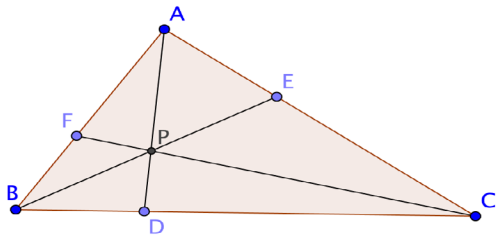
O recíproco desse teorema também é verdadeiro:

Se uma reta intersecta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a eles dois, então ela é paralela ao terceiro lado. Prove isso.

Usando o Teorema Fundamental da Semelhança como um lema, podemos facilmente provar o **Teorema de Tales**: “Se três paralelas são cortadas por duas transversais, então os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais.” A prova fica como exercício.

QT-1. Use o Teorema do Lado comum, na forma (I), para provar o seguinte Teorema: “As diagonais de um trapézio se intersectam num ponto tal que os comprimentos dos segmentos determinados em uma diagonal são proporcionais aos comprimentos dos segmentos determinados na outra diagonal.”

TEOREMA DE CEVA



"Se as cevianas AD, BE e CF, de um triângulo ABC, são concorrentes em um ponto P, então $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$"

PROVA:

Pelo TLC obtemos:

(BPC)/(BPA) = CE/EA

(APC)/(BPC) = AF/FB

(BPA)/(APC) = BD/DC.

Multiplicando, membro a membro, essas igualdades, chegamos em:

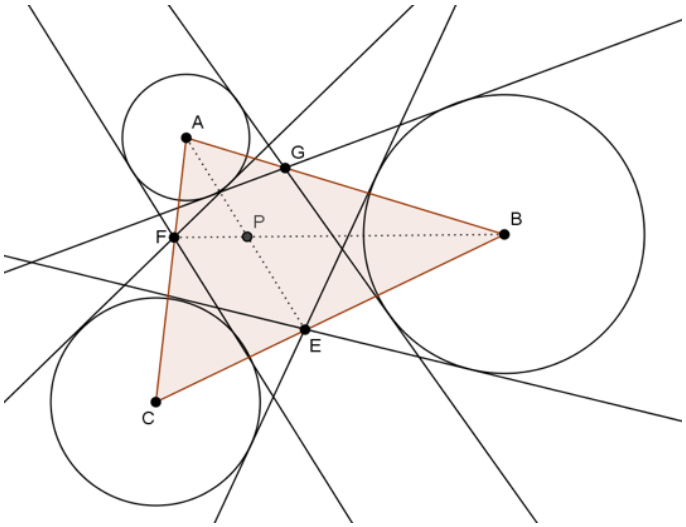
$$1=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\Leftrightarrow\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

O recíproco do Teorema de Ceva também é válido.

QT-2. Usando o recíproco do Teorema de Ceva prove que as três cevianas de um triângulo ABC, que ligam seus vértices aos pontos de tangência do seu incírculo, são concorrentes em um ponto P.

Um outro problema para você aplicar o recíproco do teorema de Ceva:

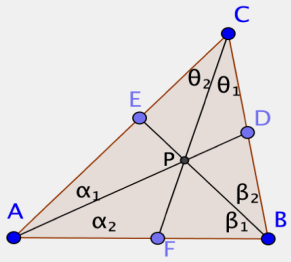
QT-3. São dadas três circunferências, que não se intersectam, de centros A, B e C, em um mesmo plano, como ilustra a figura a seguir. As retas tangentes internas a cada par de circunferências se intersectam nos pontos indicados por E, F e G. No triângulo ABC as duas cevianas, AE e BF, se intersectam em P. A ceviana CG passa também por P? Justifique sua resposta.



NOTA (Forma trigonométrica do teorema de Ceva)

Considere o triângulo ABC na figura a seguir, onde as três cevianas concorrentes em P determinam os seis ângulos indicados. Então vale a igualdade:

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2}\cdot\frac{\text{sen}\beta_1}{\text{sen}\beta_2}\cdot\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2}=1.$$



Uma formulação mais completa do teorema de Ceva, incluindo as duas formas mostradas acima e o seu recíproco, é a seguinte:

Teorema de Ceva:

"Sejam AD, BE e CF as três cevianas do triângulo ABC, conforme ilustrado na figura acima. As seguintes afirmações são equivalentes:

I) AD, BE e CF são concorrentes em um mesmo ponto P;

II) $\left(\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{DB}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)=1$;

III) $\left(\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\alpha_2}\right)\left(\frac{\text{sen}\beta_1}{\text{sen}\beta_2}\right)\left(\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2}\right)=1.$"

QT-4. [Canadá 1998] Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 40°$ e $\angle ABC = 60°$. Sejam D e E pontos dos lados AC e AB, respectivamente, tais que $\angle CBD = 40°$ e $\angle BCE = 70°$. Os segmentos BD e CE se intersectam em F. Mostrar que AF é perpendicular a BC.

QT-5. [JNCF] Na Assembleia Legislativa, de um certo Estado do Brasil, é apresentada a proposta de criação de um novo município. No estudo topográfico dele verificou-se que suas fronteiras formam, aproximadamente, um trapézio cujos lados paralelos satisfazem a condição: um tem o dobro do comprimento do outro. Traçando-se as diagonais dele, o município fica dividido em quatro regiões triangulares. Na fronteira de duas delas não estão os lados paralelos do trapézio.

Se uma dessas duas regiões tem área igual a 20 km², qual a área do novo município?

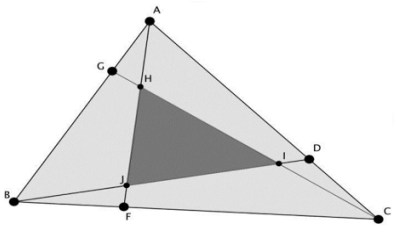
A) 90 km². **B)** 80 km². **C)** 85 km². **D)** 95 km². **E)** 100 km².

QT-6. [JNCF] Num mapa, com escala de 1:10 000, os pontos A, B e C são vértices de uma região triangular ABC. Por um ponto P do interior dessa região traçam-se duas linhas retas: uma passando por B que intersecta AC em D e outra passando por C que intersecta AB em E. Sabe-se que CD tem ¼ da medida de AC e que AE tem 2/3 da medida de AB.

Qual a razão entre a área de ABC e a do triângulo BPC?

A) 36. **B)** 9. **C)** 6. **D)** 16. **E)** 4.

QT-7. [JNCF] Um Arquiteto está elaborando o projeto de construção de um jardim suspenso triangular, no interior de uma praça triangular, de vértices A, B e C. Para isso, ele traça as linhas retas BD, CG e AF, conforme mostra a figura a seguir. A área da praça é 91dam^2, em que dam = decâmetro.



Se BF/FC = CD/DA = AG/GB = 1/3, então qual o valor da área, em dam^2, do jardim suspenso HIJ?

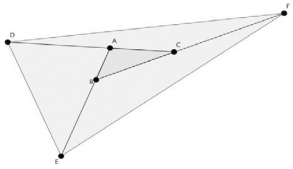
A) 52. **B)** 63. **C)** 117. **D)** 21. **E)** 28.

▶ **Resp.:** (E).

QT-8. [JNCF] Um arquiteto desenhando em sua prancheta um projeto, faz o prolongamento dos lados de um triângulo ABC de área S, da seguinte forma: AB no sentido de B até E, BC no sentido de C até F; e CA no sentido de A até D, conforme ilustrado na figura.

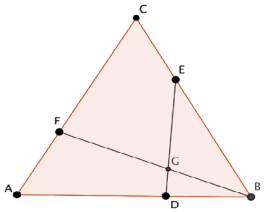
O arquiteto precisa satisfazer a duas condições: $\frac{BE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{AD}{CA}$ = k e a área do novo triângulo deve ser igual a 19S.

Qual o valor de k que satisfaz essas condições?



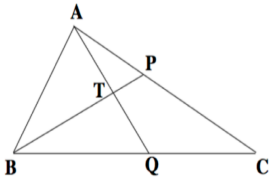
▶ **Resp.:** k = 2.

QT-9. (OBM-2014, 2ª FASE, NÍVEL II) Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero e BD = CE = AF = AB/3. Calcular EG/GD.



QT-10. (IME – 2004/2005) Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura.

Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



Teorema de Steiner

Seja *ABC,* como mostrado na figura, um triângulo qualquer, em que são traçadas três cevianas, *AF, BD* e *CG,* determinando o triângulo *IJH,* cuja área é **T**. Se **S** é a área de *ABC* e as razões *u, v e w,* em que os lados estão divididos pelos pontos *D, F e G,* são como indicadas na figura, então o valor de **T/S** é dado por

$$1-\left[\frac{u}{1+u+uv}+\frac{v}{1+v+vw}+\frac{w}{1+w+wu}\right].$$

Prova do Teorema de Steiner

Temos que: S = (ABC) = T + (BIC) + (AHC) + (AJB).

Logo 1 = (ABC) /(ABC) = T/S + (BIC)/S + (AHC)/S + (AJB)/S .

Designando S_1 = (BIC), S_2 = (AHC) e S_3 = (AJB), obtemos:

T/S = 1 – [S_1/S + S_2/S + S_3/S]. (*)

Pelo Teorema do lado comum, TLC, obtemos:

$S/S_1 = S_1/S_1 + (ABI)/S_1 + (AIC)/S_1 = 1 + 1/u + v = (1 + u + uv)/u.$

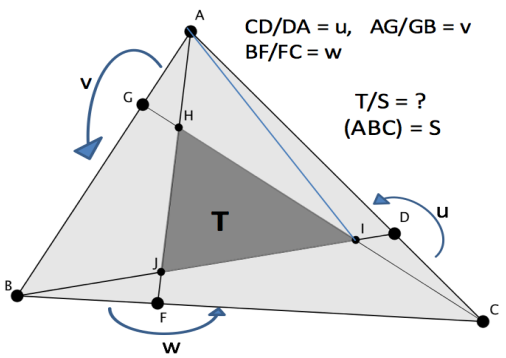
De modo análogo obtemos:

$S/S_2 = (1 + v + vw)/v$ e

$S/S_3 = (1 + w + wu)/w.$

Usando os inversos desses valores em (*), vem:

$$T/S = 1 - \left[\frac{u}{1+u+uv} + \frac{v}{1+v+vw} + \frac{w}{1+w+wu}\right].$$



QT-11. Um bom exercício de fatoração consiste em mostrar que

$$1-\left[\frac{u}{1+u+uv}+\frac{v}{1+v+vw}+\frac{w}{1+w+wu}\right]=\frac{(1-uvw)^2}{(1+u+uv)(1+v+vw)(1+w+wu)}.$$

QT-12. Agora observe o numerador dessa última expressão e deduza o Teorema de Ceva. Veja que assim, esse Teorema se reduz a um caso particular do Teorema de Steiner.

QT-13. Um caso especial do Teorema de Steiner que pode ser resolvido de modo mais simples, sem precisar passar pelo caso geral anterior, é quando u = v = w = k. Nesse caso verifique que

$$T/S = \frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 + k + 1} = \frac{(1 - k^3)^2}{(k^2 + k + 1)^3}.$$

A) Troque k por 1/k. O que acontece?

B) Interprete isso geometricamente.

C) Qual o valor de k tal que T/S seja igual a 1/10?

D) Considere a sequência definida por $b_k = \frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 + k + 1}$. Qual o valor de k tal que b_k = 27/37 ? O número 7/8 é termo dessa sequência? Justifique sua resposta.

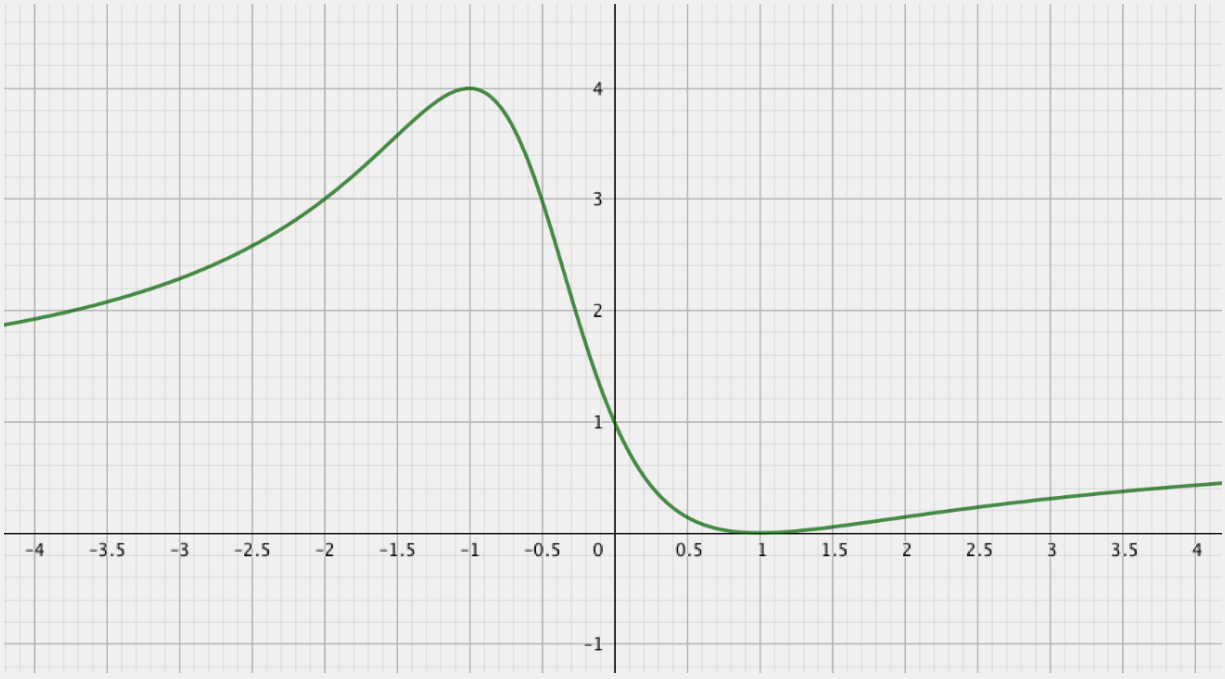
NOTA:

Inspirados na questão QT-13, encontramos um exemplo de função real f que tem a propriedade f(x) = f(1/x), para todo x real diferente de zero:

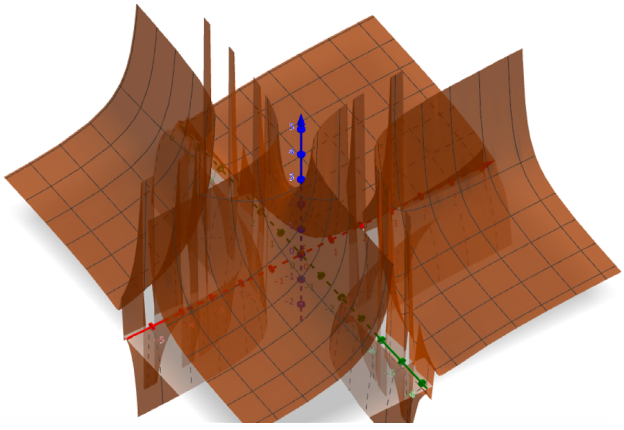
f: R^* → R definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Pode se verificar que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, o valor máximo é $f(-1) = 4$ e o valor mínimo é $f(1) = 0$.

O gráfico de f está esboçado na figura a seguir.



Agora, pensando com a ideia de modelo, vemos que essa função real, para x > 0, é um modelo aproximado da situação geométrica proposta na questão QT-13. No caso geral do teorema de Steiner, a função modeladora é uma função de três variáveis(u, v e w). Logo não podemos apresentar seu gráfico, já que teria de ser esboçado em um espaço de 4 dimensões. Isso nos leva a perceber a necessidade de desenvolvermos métodos não gráficos, puramente analíticos, para estudar melhor essas funções. Veremos um pouco disso no capítulo final. Porém, podemos ainda supor uma variante da situação geral em que u = v. Neste caso, o gráfico é possível ser esboçado(em 3D) com a ajuda do Geogebra, conforme ilustrado a seguir. Pondo u = v = x e w = y, poderíamos descrever a função pela lei $f(x,y) = \frac{(1-x^2y)^2}{(1+x+x^2)(1+x+xy)(1+y+xy)}$.

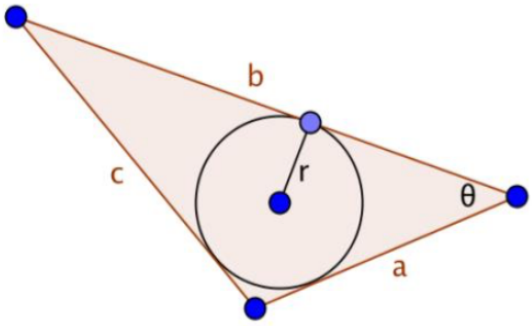


QT-14. Usando seis cortes retilíneos, faça uma partição de uma região triangular arbitrária, de tal modo que com as partes resultantes possam ser montados sete triângulos congruentes, como em um quebra-cabeça.

FÓRMULAS DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Sem dúvida, a fórmula da área de um triângulo ABC mais conhecida é S = bh/2, em que b é a medida da base BC e h é a altura relativa a essa base. Essa fórmula é válida, independente da base escolhida. Por isso ela pode ser adotada como definição da área de qualquer triângulo. É o que já admitimos desde o início deste capítulo. Isso permitiu colocar o TLC(teorema do lado comum), a partir do qual se pode deduzir de forma simples o teorema fundamental da semelhança e o teorema de Tales, entre outros. É importante registrar aqui que o V postulado de Euclides, o famoso postulado das paralelas, pode ser substituído por uma noção de área com a definição referida anteriormente. Para uma maior compreensão da construção de uma teoria da área em geometria plana, veja a referência [Moise, 1990]. Nós apresentaremos, mais à frente, a área como uma medida, nos mesmos moldes que o fizemos com o comprimento na reta. Essa idéia é mais ampla e unificadora dentro da Matemática.

Outras fórmulas da área do triângulo que podem ser deduzidas usando novos conceitos e a definição anterior são as seguintes:



I) S = $\frac{1}{2}$a.b.sen θ

II) S = p.r

III) S = $\frac{abc}{4R}$

IV) S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Hierão)

p = semi-perímetro, r = raio do incírculo e R = raio do circuncírculo.

A área S de um triângulo ABC, de lados a, b e c, pode também ser expressa em função dos raios r_a, r_b, r_c e r das circunferências exinscritas e da inscrita, assim: S = $\sqrt{r.r_a r_b r_c}$.

E essa fórmula pode ser obtida, facilmente, a partir das conhecidas relações

S = $r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = p\,r$ e da fórmula de Hierão, verificando que $S^4 = r_a(p-a).\, r_b(p-b).\, r_c(p-c).\, P\, r = r.r_a r_b r_c.S^2$.

Por outro lado, usando essas mesmas relações, podemos deduzir uma relação surpreendente:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Observe que $r_b + r_c = \frac{aS}{(p-c)(p-b)}$ e $r_a - r = \frac{aS}{p(p-a)}$.

Obs.: Veremos, em questões posteriores, outras fórmulas da área de um triângulo, tais como as seguintes:

S = $\frac{R^2}{2}[sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)]$,

S = R^2(senA.senB.senC).

Um resultado interessante, que pode ser usado em outros momentos, é o seguinte:

"Dentre todos os triângulos ABC de mesma base AB e de mesmo perímetro 2p, o de maior área é o isósceles."

Para provar isso, usaremos MA ≥ MG e a fórmula de Hierão. Façamos AB = c, AC = b e BC = a. Pela fórmula de Hierão S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Como c e 2p são fixos, então podemos colocar $p(p-c)=k$. Logo S = $\sqrt{k}.\sqrt{(p-a)(p-b)}$. Por MA ≥ MG temos que $2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq p-a+p-b$ e a igualdade só ocorre se $p-a=p-b$, o que implica $a=b$. Portanto, S é máxima se ABC é isósceles.

Outro resultado que tem aproximação com esse é o seguinte:

> "Dentre todos os triângulos ABC com dois lados de medidas fixas, o de área máxima é o triângulo retângulo cujos catetos são esses lados fixos."

Podemos provar essa proposição aplicando a fórmula S = $\frac{1}{2}$a.b.sen θ da área de um triângulo.

Considerando que a e b são fixos, temos que S é máxima quando sen $\theta = 1$, o que implica ABC ser um triângulo retângulo com os catetos medindo a e b.

Essas duas proposições podem ser usadas para a resolução do famoso **problema isoperimétrico**, de que falaremos mais à frente.

QT-15. Demonstre as fórmulas (I), (II) e (III) da área de um triângulo, apresentadas anteriormente. Mostre também que 4R = $\frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

QT-16. Demonstrar que para a área S de um triângulo de lados a, b e c é válida a seguinte desigualdade:

$$S \leq \frac{(a+b+c)^2}{16}.$$

Mostre também que $\frac{a+b+c}{r} \geq 8$.

QT-17. Prove que para um triângulo ABC, de lados a, b e c, é válida a seguinte desigualdade:

a + b + c ≥ $6\sqrt{3}\cdot r$, em que r é o raio do incírculo de ABC.

Obs.: Perceba que a desigualdade desta questão implica a + b + c > 10r, o que significa dizer que o perímetro de todo triângulo é maior do que 10 vezes o seu raio interno (ou inraio). Podemos afimar que $\left[\frac{a+b+c}{r}\right] = 10?$

[x] é o maior inteiro que não supera x.

LEI DOS SENOS

Em um triângulo qualquer ABC vale a relação: $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\theta} = 2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita e a, b e c são as medidas dos lados opostos aos ângulos internos de medidas $\alpha, \beta \; e \; \theta$, respectivamente.

LEI DOS COSSENOS

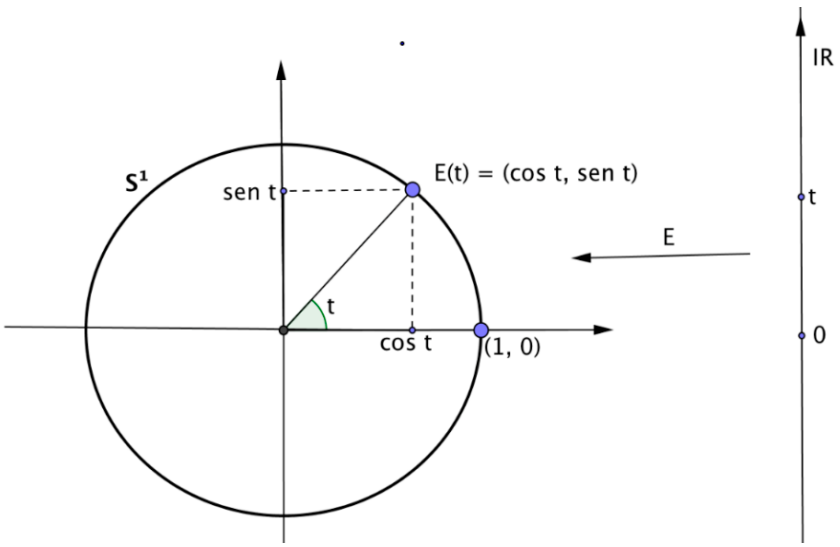
Em um triângulo qualquer ABC vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$, em que a, b e c são as medidas dos lados e Â é a medida do ângulo interno oposto ao lado de medida a.

NOTA:

Em um triângulo qualquer ABC vale, também, a relação:

Lei das projeções: c = a.cosC + b.cosB.

A FUNÇÃO DE EULER E: IR → S^1



Intuitivamente, a função de Euler "enrola" o semieixo real positivo, preservando seu comprimento, no sentido anti-horário, sobre o círculo de raio 1, S^1, a partir do ponto (1,0). Dessa forma, se um arco orientado assim, mede **t** a partir desse ponto inicial, então o seu ponto extremo é E(t). De modo análogo se faz com o semieixo real negativo no sentido horário. Evidentemente, a cada volta completa, o mesmo ponto de S^1 é extremo do arco construído com esse procedimento. Considerando que o comprimento de S^1 é 2π, então E é periódica de período 2π. Ou seja, a função E: R → S^1 estabelece uma correspondência unívoca e ordenada entre os pontos de R e os de S^1, de tal modo que para todo intervalo $I_k = [\,2k\pi, 2(k+1)\pi\,)$ de R, com k inteiro, E: $I_k \to S^1$ seja bijetiva, e para cada x ∈ I_k se tenha que o comprimento do arco correspondente seja igual a x $- 2k\pi$. Após essa construção, define-se E(t) = (cos t, sen t). E assim as funções trigonométricas fundamentais f(t) = sen t e g(t) = cos t, ficam bem definidas em R e em consonância com o que vimos antes sobre elas. Com elas definimos as outras conhecidas:

$$\text{tg}(t) = \frac{sen(t)}{\cos(t)},\ \text{cotg}(t) = \frac{\cos(t)}{sen(t)},\ \text{sec}(t) = \frac{1}{\cos(t)} \text{ e } \text{cossec}(t) = \frac{1}{sen(t)}$$

RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

$sen^2x + cos^2x = 1$, para todo x real.

FÓRMULAS DA SOMA DE DOIS ARCOS

A) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - sen\alpha\ sen\beta$

B) $\text{sen}(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos\beta + sen\beta \cos\alpha$

C) $\text{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta}$

D) $\text{cotg}(\alpha + \beta) = \dfrac{cotg\alpha\ cotg\beta - 1}{cotg\alpha + cotg\beta}$

Consequências dessas fórmulas(I):

I-1) $cos(\pi - x) = -\cos x$ e $sen(\pi - x) = sen\ x$; $tg(\pi - x) = -tg\ x$.

I-2) $cos(\pi + x) = -\cos x$ e $sen(\pi + x) = -sen\ x$; $tg(\pi + x) = tg\ x$.

I-3) $cos(\pi/2 - x) = sen\ x$ e $sen(\pi/2 - x) = \cos x$; $tg(\pi/2 - x) = cotg\ x$.

I-4) $cos(\pi/2 + x) = -sen\ x$ e $sen(\pi/2 + x) = \cos x$.

I-5) $cos(2\pi - x) = \cos x$ e $sen(2\pi - x) = -sen\ x$.

I-6) $cos(2\pi + x) = \cos x$ e $sen(2\pi + x) = sen\ x$.

I-7) $cos(x + 2\pi k) = \cos x$ e $sen(x + 2\pi k) = sen\ x, k \in Z$.

I-8) $cos(x - 2k\pi) = \cos x$ e $sen(x - 2k\pi) = sen\ x, k \in Z$.

I-9) $cos(x + (2k+1)\pi) = -\cos x$ e $sen(x + (2k+1)\pi) = -sen\ x, k \in Z$

Consequências dessas fórmulas(II):

II-1) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos x = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

II-1) $\Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 + \cos x \\ 2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x \end{cases} . \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+cosx}{2}} \\ sen\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-cosx}{2}} \end{cases} .$

II-2) $cosx = \dfrac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Obs(1): $tg^2(\frac{x}{2})$. $Cos^2(\frac{x}{2}) = sen^2(\frac{x}{2}) = 1 - cos^2(\frac{x}{2}) \Rightarrow cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$.

II-3) sen2x = 2senx.cosx sen x = 2sen(x/2)cos(x/2).

II-4) tg2x = $\frac{2tgx}{1-tg^2x} \Rightarrow tgx = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1-tg^2(\frac{x}{2})} \Rightarrow$ senx = $\frac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} \Rightarrow$ sen2x = $\frac{2tgx}{1+tg^2x}$.

Obs(2).: sen x = tgx.cosx.

II-5) $1-\cos x = \frac{2\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ e $\frac{1-\cos x}{\cos x} = \frac{2\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

II-6) cotg2x = $\frac{cotg^2x - 1}{2cotg\ x}$.

II-7) $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\text{senx}} = \frac{\text{senx}}{1+\cos x}$.

II-8) $sen3x = 3senx - 4sen^3x$.

II-9) $cos3x = 4cos^3x - 3cosx$.

II-10) $\text{tg3x} = \frac{3\text{tgx} - \text{tg}^3\text{x}}{1-3\text{tg}^2\text{x}}$.

II-11) $\text{sen}^2\text{x} = \frac{\text{tg}^2\text{x}}{1+\text{tg}^2\text{x}}$ e $\cos^2 \text{x} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\text{x}}$.

II-12) $sen^2x = \frac{1}{1+cotg^2(x)}$ e $cos^2x = \frac{cotg^2(x)}{1+cotg^2(x)}$.

Consequências dessas fórmulas(III):

Transformações Soma-Produto:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\pm\operatorname{tg} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).$$

NOTA(1):

Em um triângulo qualquer ABC vale, também, a relação:

Lei das Tangentes: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}$.

Para provar essa fórmula basta usar a lei dos senos para obter $\frac{a-b}{a+b} = \frac{senA - senB}{senA + senB}$ e em seguida usar transformação soma-produto.

NOTA(2):

2sen(2k)º.sen1º = cos(2k – 1)º - cos(2k + 1)º.

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

1) $sen\, a = sen\, b \Longrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \quad ou \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}, k \in Z. \Longrightarrow a = (-1)^k b + k\pi, \quad k \in Z\,.$

2) $\cos a = \cos b \Longrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \quad ou \\ a = -b + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow a = \pm b + 2k\pi, \quad k \in Z.$

3) $tg\, a = tg\, b \Longrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \quad ou \\ a = \pi + b + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow a = b + k\pi, \quad k \in Z.$

Verifique que o sistema de equações formado por (1) e (2) tem como solução geral a seguinte:

$$a = b + 2k\pi, \qquad k \in Z.$$

Escreva a solução geral de cada uma das seguintes equações trigonométricas:

$$\text{sen}(2x) = ½;\ \ \text{sen}(3x/2) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \cos(3x) = -1/2;\cos(2x/3) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

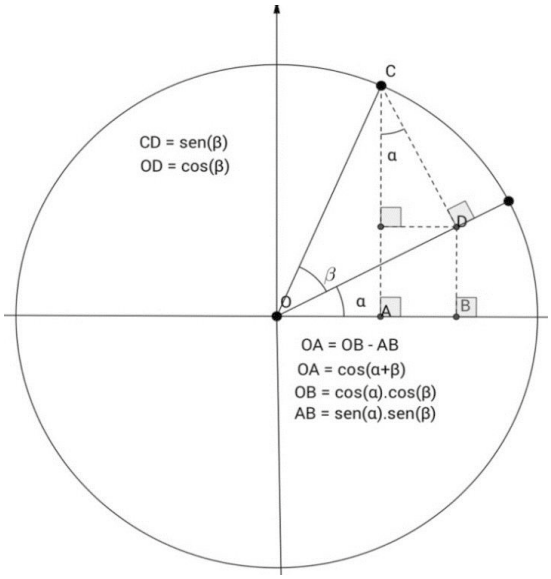
$$\text{senx} + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2};\ \ g(2x) = \sqrt{3}\ ;\ \ tg(x/2) = 1/\sqrt{3}\ .$$

Escreva a solução geral de cada uma das seguintes inequações trigonométricas:

$$\text{senx} > ½;\ \ \text{sen}(2x - \frac{\pi}{7}) \geq 0;\ \ \cos(2x/3) < 0;\ \ tg(2x + \frac{\pi}{3}) < -1;\ \ \text{senx} \geq \cos x.$$

QT-18. Com a ajuda da figura a seguir deduza a fórmula (A) da soma de dois arcos. Verifique que cos(π/2 + t) = – sen(t). E use esta última identidade para provar (B).

Depois, dividindo, membro a membro, (A) por (B), obtenha (C). Por último prove (D).



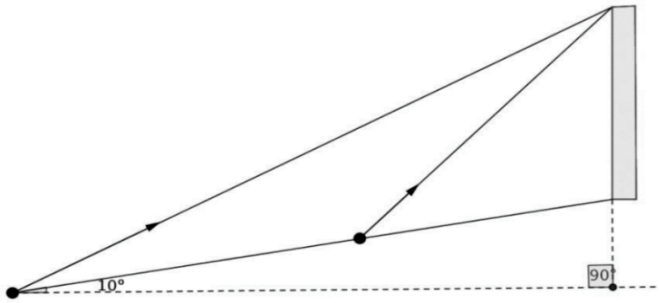
QT-19. (Relação de Stewart). Usando a lei dos cossenos demonstre a seguinte propriedade:

Se ABC é um triângulo e D é um ponto do lado AB, então vale a seguinte relação:

$b^2y + c^2x – z^2a = axy$, em que a = BC, b = AC, c = AB, x = CD, y = DB e z = AD.

QT-20. Prove a fórmula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ da área de um triângulo, usando o teorema dos cossenos.

QT-21. [JNCF] O prédio de um hospital foi construído sobre um terreno plano. Sabe-se que cada andar dele tem 2m de altura. Uma rampa de 10º de elevação lhe dá acesso, conforme ilustra a figura. Observando-se o topo do edifício a partir de dois pontos da rampa, verificam-se que as medidas dos dois ângulos de elevação, em relação ao terreno, são de 20º e 30º, respectivamente.



Se a distância entre os dois pontos de observação do topo do hospital mede 100m, então qual o número de andares dele? (Dado: $sen(10º) = 0{,}17$)

A) 12. **B)** 14. **C)** 17. **D)** 24. **E)** 34.

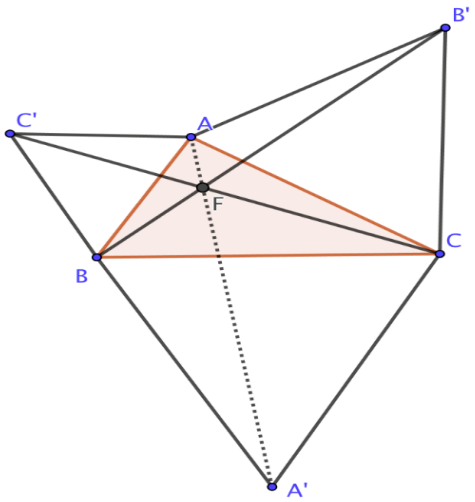
QT-22. (IMO, 1961). Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo com área (ABC), então prove que $4\sqrt{3}\,(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$.

QT-23. Seja (AB**C)** a área de um triângulo ABC e seja F o ponto de Fermat desse triângulo. Prove que

$$4\sqrt{3}\,(ABC) \leq (AF + BF + CF)^2 .$$

NOTA:

Seja ABC um triângulo com os ângulos internos iguais ou menores do que 120º. Definimos o **ponto de Fermat** de ABC como o ponto F tal que os ângulos ∢APB, ∢BPC e ∢CPA tenham medidas iguais a 120º. Ele pode ser obtido construindo-se triângulos equiláteros sobre os três lados de ABC e traçando-se os segmentos que unem o vértice externo de cada um desses triângulos ao vértice oposto de ABC, conforme mostra a figura a seguir. Perceba que uma rotação de 60º em torno de A leva o triângulo AC'C no triângulo ABB'. Então $\measuredangle BFC' = 60º$ e CC' = BB'. Segue disso e dos triângulos equiláteros que os quadriláteros AFBC', AFCB' e A'CFB são cíclicos.

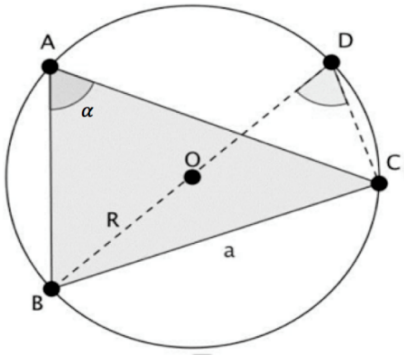


QT-24. **(IME-1989/1990).** Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90º, calcule a razão entre os lados.

QT-25. **A)** Use uma fórmula da área de um triângulo para provar a lei dos senos na forma

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\theta}.$$

B) Use a figura a seguir para mostrar que $\frac{a}{sen\alpha}$ = 2R.



QT-26. (**Estonia, 1995**). Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo; e sejam α, β e γ os ângulos opostos a esses lados. Prove que se o raio do incírculo desse triângulo é r, então

$$a \text{ sen } \alpha + b \text{ sen } \beta + c \text{ sen } \gamma \geq 9r.$$

QT-27. Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo. Então demonstre que vale a seguinte desigualdade: (a + b –c)(b + c – a)(c + a –b) ≤ abc.

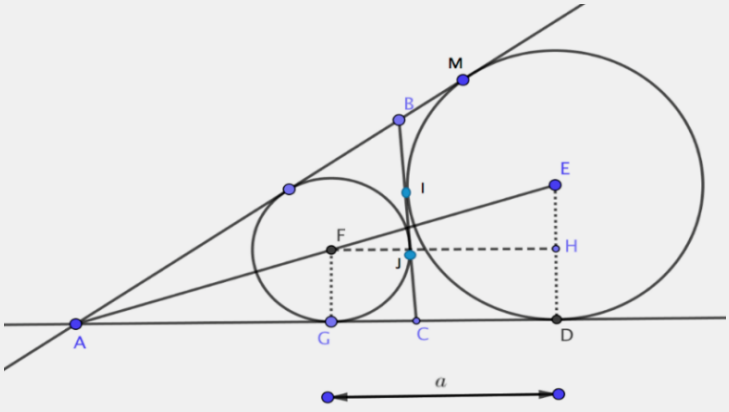
QT-28. Sejam R e r os raios do circuncírculo e do incírculo, respectivamente, de um triângulo ABC. Então prove que R ≥ 2r.

NOTA:

Pode se provar as seguintes desigualdades relacionadas aos raios das circunferências exinscritas e inscrita de um triângulo ABC: $r.r_a \leq \frac{a^2}{4}$, $r.r_b \leq \frac{b^2}{4}$ e $r.r_c \leq \frac{c^2}{4}$. A partir delas pode-se deduzir a desigualdade R ≥ 2r. Basta multiplicar as três desigualdades para se obter $r^2\, r.r_a.r_b.r_c \leq a^2b^2c^2$ /64 = $(4SR)^2/64$. Disso segue $r^2S^2 \leq S^2R^2/4$, o que nos leva a r/R ≤ ½.

A desigualdade $r.r_a \leq \frac{a^2}{4}$ pode ser provada a partir da figura a seguir, em que F é o incentro de ABC, E é o exincentro relativo ao vértice A e BC = a. Usando a mudança de variáveis a = x + z, b = y + z e c = x + y obtemos GD = a. E como $r + r_a \leq$ EF, então $(r + r_a)^2 \leq a^2 + (r_a - r)^2$, o que nos leva a $r.r_a \leq \frac{a^2}{4}$.

E, de maneira análoga, deduzimos as outras duas desigualdades.



QT-29. Demonstrar que para um triângulo arbitrário ABC é válida a igualdade

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cdot\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot\cos C=3,$$ em que a, b e c são as medidas dos lados de ABC.

QT-30. (**IME – 2003/2004**). Calcule sen (x + y) em função de a e b, sabendo que o produto ab ≠ 0, que

senx + seny = a e que cosx + cosy = b.

QT-31. (**IME-1990/1991**). Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Mostre que

sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senA.senB.senC.

QT-32. (**IME-1989/1990**). Obtenha a expressão para tg(3α) em função de tg α = x.

▶ **Resp.:** tg(3 α) = $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

QT-33. **(ITA-2013).** Se cos (2x) = ½, então um possível valor de $\frac{cotgx - 1}{cossec\,(x-\pi) - \sec(\pi - x)}$ é

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B)** 1. **C)** $\sqrt{2}$. **D)** $\sqrt{3}$. **E)** 2.

▶ **Resp.:** (A).

QT-34. (**ITA-2002**). Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $\text{sen}x = \frac{\text{sen}y + \text{sen}z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

QT-35. (**ITA-2011**).

A) Calcule $\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

B) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen(\frac{\pi}{10})\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

QT-36. (**IME – 1993**). Sabendo que A, B e C são os ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade a seguir. sen A + sen B + sen C = 4cos(A/2).cos(B/2).cos(C/2) .

QT-37. (**IME-1990**). Mostre que, se num triângulo ABC vale a relação:

$\frac{\cos(B - C)}{\text{sen}A + \text{sen}(C - B)} = \text{tg}B,$ então, o triângulo é retângulo com ângulo A.

QT-38. (**ITA-2004**). Prove que, se os ângulos internos $\alpha, \beta \; e \; \gamma$ de um triângulo satisfazem a equação sen(3α) + sen(3β) + sen (3γ) = 0, então, pelo menos um dos três ângulos α, β ou γ é igual a 60º .

QT-39. Para um triângulo ABC, qual é o valor inteiro mínimo que pode assumir a expressão

$$\frac{3\text{cotg C} + 2\text{cotg B} + \text{cotg } A}{cossec\ C} \; ?$$

QT-40. Se A, B e C são os ângulos internos de um triângulo acutângulo, ache o mínimo valor da seguinte expressão $\text{tg}^2A + \text{tg}^2B + \text{tg}^2C$.

QT-41. Prove que, para números reais positivos, vale a desigualdade:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

QT-42. (**IME-2002/2003**). Resolva a equação tgα + tg(2α) = 2 tg(3), sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

QT-43. (**IME-1988/1989**). Mostre que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade $sen\ 4A$ + sen 4B + sen 4C = 0, então o triângulo é retângulo.

QT-44. (**IME-1987/1988**). Mostre que num triângulo ABC

$$cotg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{senB + senC}{cosB + cosC}.$$

QT-45. (**IME-1986/1987**). Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos aos ângulos A, B, C respectivamente, e de perímetro 2p, mostre que

$$a = \frac{2p\ sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right).\cos\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-T(1)

DRN-T1:

Faça uma figura ilustrativa e indique as áreas dos triângulos por S_1, S_2 e S.

DRN-T3:

Trace, de modo conveniente, os raios dos círculos. A seguir, use semelhança de triângulos para provar que $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$.

Resolução:

$AA_1G \sim BB_1G \Rightarrow r_1/r_2 = AG/GB$

$BB_2E \sim CC_2E \Rightarrow r_2/r_3 = BE/EC$

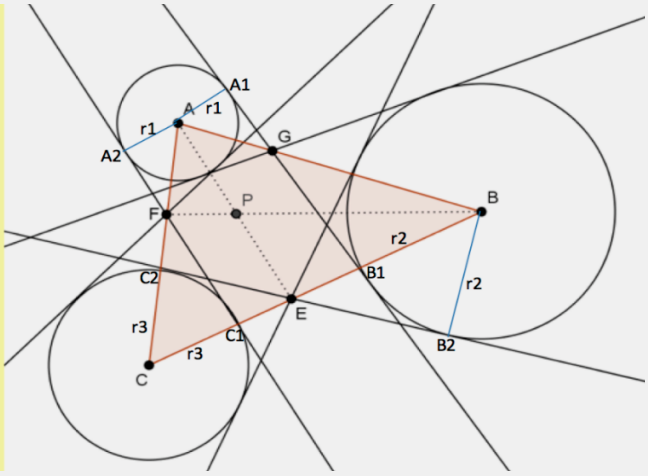
$CC_1F \sim AA_2F \Rightarrow r_3/r_1 = CF/FA$

Multiplicando as igualdades, membro a membro, obtemos:

$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$

Usando o recíproco do T. de Ceva concluimos:

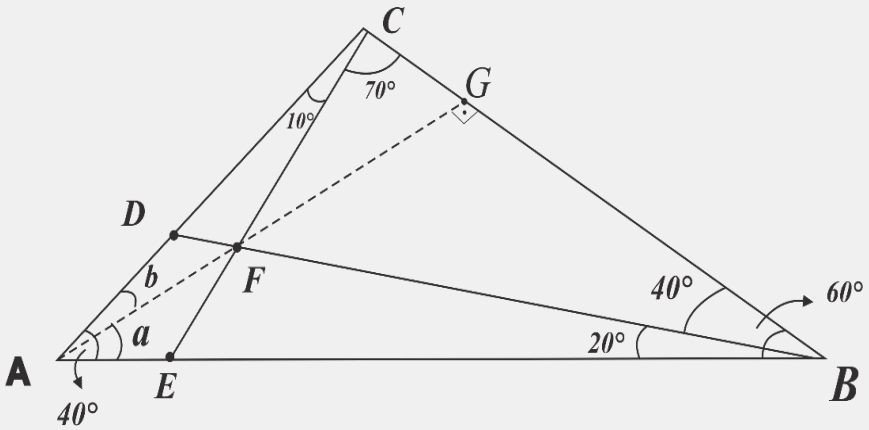
CG passa por P.



DRN-T4:

Vamos construir a figura representativa dos dados da questão. Também nela vamos incluir a ceviana AG que é perpendicular, por construção, a BC. Deveremos provar, ao final, que F pertence a AG para concluir a resolução.

Eis a figura:



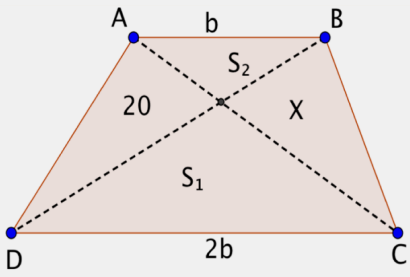
Pelo ΔABG temos que a = 90° - 60° = 30° e, por conseguinte, b = 40° - 30° = 10°. Calculemos o produto:

P = $\frac{sen\ 10°}{sen\ 30°} \cdot \frac{sen\ 20°}{sen\ 40°} \cdot \frac{sen\ 70°}{sen\ 10°}$ Se P = 1, então pelo Teorema de Ceva na forma Trigonométrica, na sua forma forte, que inclui a sua recíproca, teremos provado que F é o ponto de concorrência das três cevianas, o que implica AF ⊥ BC. Mostremos, pois.

P = $\frac{sen\ 10°}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{sen\ 20°}{2sen\ 20°\ .\ cos 20°} \cdot \frac{cos\ 20°}{sen\ 10°}$ = 1. Observe que usamos

$$sen\ 70° = \cos(90° - 70°) = \cos 20°\ e\ sen\ 40° = 2sen20°\ .\ cos20°.$$

DRN-T5:



$S_2 + 20 = S_2 + X$

$\therefore X = 20.$

Usando o TLC obtemos:

$\frac{S_2}{20} = \frac{20}{S_1} \Leftrightarrow S_1 . S_2 = 400.$ **(1)**

E aplicando semelhança de triângulos:

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{2b}{b}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow S_1 = 4S_2$ **(2)**

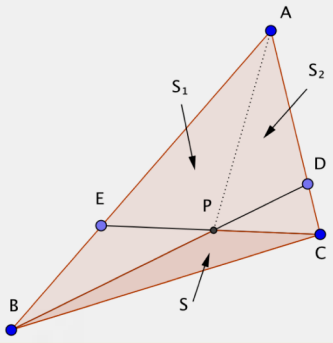
Por (1) e (2) temos:

$S_2 = 10\ \ e\ \ S_1 = 40$

Logo (ABCD) = 20 + 20 + 10 + 40

$\therefore$ (ABCD) = **90 km²**

DRN-T6:



Vamos usar o TLC. Conforme a figura (ABC) = S + S_1 + S_2 . Disso se deduz que

$\frac{(ABC)}{S} = \frac{S+S_1+S_2}{S}$ = 1 + S_1/S + S_2/S .

Usando TLC na forma (III) obtemos:

$\frac{S_1}{S} = \frac{AD}{DC} = 3$ e $\frac{S_2}{S} = \frac{AE}{EB} = 2.$

Logo $\frac{(ABC)}{S}$ = 1 + 3 + 2 = 6 $\therefore$ $\frac{(ABC)}{S}$ = 6

DRN-T9:

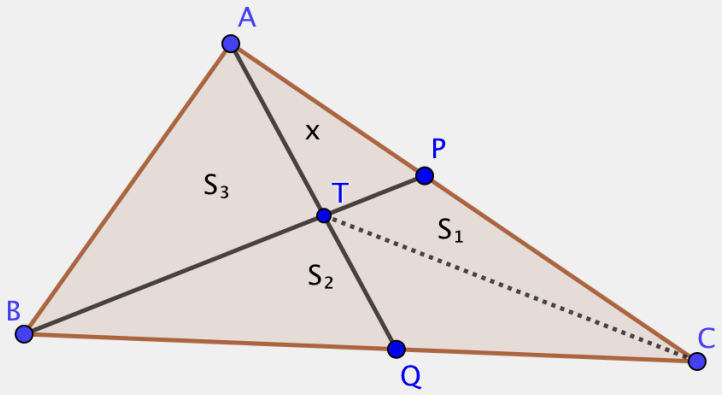
Use o TLC com as linhas auxiliares AG e BG. Em seguida use letras para indicar áreas de alguns triângulos e alguns segmentos. O resultado deve ser 4. Compare essa resolução com outra dada para esta questão no portal da OBM/OBMEP. Também, usando o TLC, a questão pode ser resolvida com as linhas auxiliares FD e FE.

DRN-T10:

Use TLC para resolver esta questão. Não se esqueça de indicar as áreas de alguns triângulos por letras convenientes.

Resolução:

Inicialmente traçamos o segmento CT e designamos as seguintes áreas: (ATP) = x, (PTC) = S_1, (BTC) = S_2 e (ABT) = S_3.



Agora podemos usar o TLC(Teorema do lado comum) três vezes assim:

$x/S_1 = q \Rightarrow$ **$S_1 = x/q$;**

$S_3/(x + S_1) = r \Rightarrow S_3 = r(x + S_1) = rx(q + 1)/q \Leftrightarrow$ **$S_3 = rx(q + 1)/q$;**

$S_3/S_2 = q \Rightarrow S_2 = S_3/q = rx(q + 1)/q^2 \Leftrightarrow$ **$S_2 = rx(q + 1)/q^2$.**

Mas $S = x + S_1 + S_2 + S_3$, então substituindo os valor es anteriores, obtemos:

$q^2S = xq^2 + xq + xrq(q + 1) + xr(q + 1) = x[q^2 + q + qr(q + 1) + r(q + 1)]$, que implica

$x = \dfrac{q^2 S}{(1+q)(q+qr+r)}$.

DRN-T13:

A) Temos que: S = (ABC) = T + (BIC) + (AHC) + (AJB).

Logo 1 = (ABC) /(ABC) = T/S + (BIC)/S + (AHC)/S + (AJB)/S .

Designando S_1 = (BIC), S_2 = (AHC) e S_3 = (AJB), obtemos:

$T/S = 1 - [S_1/S + S_2/S + S_3/S]$. (*)

Pelo Teorema do lado comum, TLC, tendo que $S = S_1$ + (ABI) + (AIC) obtemos:

$S/S_1 = S_1/S_1 + (ABI)/S_1 + (AIC)/S_1 = 1 + 1/u + v = (1 + u + u^2)/u$.

Logo $S_1/S = \dfrac{u}{1+u+u^2} = \dfrac{k}{1+k+k^2}$

Em virtude de u = v = w = k, temos que $S_2/S = S_3/S = S_1/S$.

Usando isso em (*), obtemos: $T/S = 1 - \frac{3k}{1+k+k^2} = \frac{1-2k+k^2}{1+k+k^2}$.

Ou seja **T/S =** $\frac{k^2-2k+1}{k^2+k+1}$.

B) A expressão $\frac{k^2-2k+1}{k^2+k+1}$ não se altera. Geometricamente significa que invertemos a ordem da razão em que se divide cada lado do triângulo. Por exemplo, no lugar de CD/DA = u, colocamos DA/CD = 1/u.

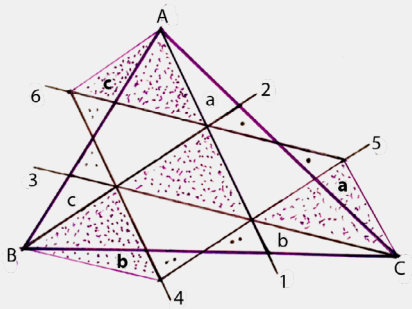
C) Temos que $\frac{k^2-2k+1}{k^2+k+1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 9k^2 - 21k + 9 = 0$. Resolvendo esta equação, encontramos: $k = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$. Observe que uma raiz é o inverso da outra.

D) Temos que $\frac{k^2-2k+1}{k^2+k+1}$ = 27/37 $10k^2 - 101k + 10 = 0$. Resolvendo esta equação, encontramos k = 10 ou k = 1/10. Mas k é natural, logo k = 10. A segunda pergunta deste item implica na equação $k^2 - 23k + 1 = 0$, que não tem raiz inteira. Como k é inteiro(natural), então 7/8 não é termo da sequência (b_k).

DRN-T14:

Use o resultado acima buscando fazer os cortes de tal maneira que um dos sete 268rctg268âneo referidos no enunciado seja o triângulo central.

A figura a seguir apresenta a solução. Nela estão numerados os seis cortes retilíneos, que são paralelos aos lados do triângulo central. As letras a, b, c e os pontos, colocados no interior dos pequenos triângulos, indicam os pares congruentes.



DRN-T16:

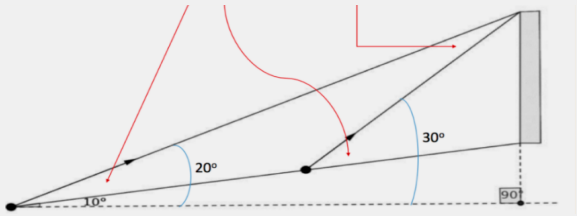
Adequar a fórmula de Hierão para usar MA ≥ MG.

DRN-T17:

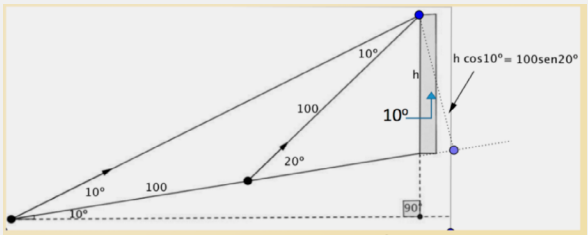
Com a fórmula de Hierão prove que $S \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

DRN-T21:

Quanto medem estes ângulos?



E agora o que devemos fazer na figura para avançar no rumo da solução?



Como ***sen2x = 2senx cosx***, então sen20° = 2sen10° cos10°.
Logo h cos10° = 100(2sen10° cos10°) => h = 200 sen10° = 200 x 0,17 = 34.

h = 34 m ⇔ nº de andares = **17.**

DRN-T22:

Construa um triângulo equilátero a partir de um dos lados e use a lei dos cossenos. Outro modo de resolver é usar o resultado da QT-17. Um terceiro caminho é partir da fórmula de Hierão para chegar em S ≤ $\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$ e em seguida aplicar, adequadamente, a conhecida desigualdade $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Observe que a desigualdade dessa questão pode ser apresentada de outra forma:

S ≤ $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$, em que S = (ABC).

DRN-L24:

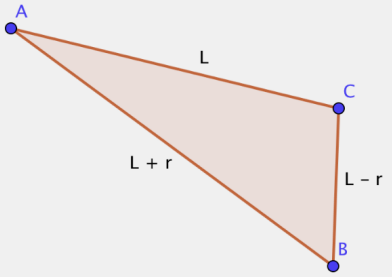
Seja r a razão da PA crescente: $(\ell - r, \ell, \ell + r)$. Considerando os ângulos (A, B, C) na ordem crescente, com C = 90º + A, temos que B = 180º - (90º + 2ª) = 90º - 2ª. Usando a lei dos cossenos, encontramos:

$(\ell - r)^2 = \ell^2 + (\ell + r)^2 - 2\,\ell(\ell + r)cosA$

$\ell^2 = (\ell - r)^2 + (\ell + r)^2 - 2(\ell - r)(\ell + r)\cos(90º - 2ª)$

$(\ell + r)^2 = \ell^2 + (\ell - r)^2 - 2\ell(\ell - r)\cos(90º + A)$.

Temos que $cos(90º - 2ª) = sen(2ª)$, $cos(90º + A) = -\,senA$ e $sen(2ª) = 2senAcosA$.



Das três equações e dessas identidades obtemos:

$$\frac{\ell^2 + 2r^2}{2(\ell^2 - r^2)} = 2\frac{4r - \ell}{2(\ell - r)}\frac{4r + \ell}{2(\ell + r)}.$$

Disso segue $\ell^2 + 2r^2 = 16r^2 - \ell^2$, que nos dá $r = \frac{\ell\sqrt{7}}{7}$.

DRN-T26:

Use área e MA ≥ MG.

DRN-T27:

Faça uma mudança adequada de variáveis para obter uma desigualdade equivalente já conhecida. Reconheça que essa desigualdade é um caso especial da desigualdade de Schur. (Veja Nota após QF-117).

DRN-T28:

Use QT-27 combinada com fórmulas da área do triângulo. Outro caminho(bem curto):

Seja D o circuncírculo do triângulo cujos vértices são os pontos médios de ABC. Então, por semelhança, seu raio é r_d = R/2. Por outro lado D intersecta os três lados de ABC. Mas isso implica que R/2 ≥ r, o que conclui a demonstração.

Para perceber melhor isso, desloque D até seu centro coincidir com o incentro de ABC, caso já não coincida. Se r_d < r, então D não intersecta os lados de ABC, o que é absurdo.

DRN-T29:

Aplicar a lei dos senos, desenvolver e simplificar.

DRN-T30:

Use transformação soma-produto.

▶ **Resp.:** sen(x + y) = $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

DRN-T31

Seja M = sen (2A) + sen (2B) + sen (2C). Usando transformação soma – produto obtemos :
M = 2 sen (A + B) . cos (A – B) + sen(2C). Como C = π - (A + B), então senC = sen(A + B)
Logo: M = 2sen C . cos(A – B) + 2senC·cosC
= 2sen C (cos (A – B) + cos C)
= 2sen C [cos (A – B) – cos (A + B)]
= 2sen C [2sen A . sen B]
= 4sen C . sen A . sen B
= 4sen A . sen B . sen C.

DRN-T34:

Use transformação soma-produto.

DRN-T35:

Usar relações de arco duplo. E no item b usar também, de modo adequado, a multiplicação e divisão pelo mesmo fator.

▶ **Resp.: A)** 0 e **B)** ¼.

DRN-T36:

Tentar provar que é uma identidade trigonométrica.

DRN-T37:

Usar transformação soma-produto para chegar em cotgC = tgB.

DRN-T38:

Usar transformação soma-produto para chegar em $4sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)cos\ \frac{3\alpha}{2}\ cos\ \frac{3\beta}{2} = 0.$

DRN-T39:

Transforme essa expressão na forma $\frac{2sen(B+C)}{senB}+\frac{sen(A+C)}{senA}$. Simplifique um pouco mais e use MA ≥ MG para concluir que o valor inteiro mínimo é 3.

DRN-T40:

Por ser ABC um triângulo acutângulo, os valores tgA, tgB e tgC são positivos, o que permite aplicarmos as desigualdades MQ ≥ MA e MA ≥ MG. Usando MQ ≥ MA podemos afirmar: $(tgA + tgB + tgC)^2 \leq 3(tg^2A + tg^2B + tg^2C)$. (1)

Mas (1) é equivalente a $(tgA + tgB + tgC)^3/(tgA + tgB + tgC) \leq 3(tg^2A + tg^2B + tg^2C)$. (2)

E usando MA ≥ MG podemos afirmar que $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC}$. Aplicando este resultado em (2) obtemos: $27(tgA.tgB.tgC)/(tgA + tgB + tgC) \leq 3(tg^2A + tg^2B + tg^2C)$. (3)

E como A, B e C são ângulos agudos, vale a identidade tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC.

Logo de (3) segue que $9 \leq tg^2A + tg^2B + tg^2C$.

Precisamos agora saber se 9 é, de fato, o valor mínimo de $tg^2A + tg^2B + tg^2C$. Para isso, usaremos a condição de igualdade da desigualdade MA ≥ MG. Ou seja, MA = MG se, e só se tgA = tgB = tgC. Isso implica que A = B = C = 60°, que nos leva a $tgA = tgB = tgC = \sqrt{3}$ e por conseguinte $tg^2A + tg^2B + tg^2C = 9$. Conclusão: o valor mínimo de $tg^2A + tg^2B + tg^2C$ é 9, que ocorre quando ABC é equilátero.

DRN-T41:

Usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

DRN-T42:

A equação dada é equivalente a

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\text{sen}3\alpha}{\cos 3\alpha} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\alpha\cdot\cos 2\alpha+\text{sen}2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\frac{2sen\,3\alpha}{\cos 3\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{sen3\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\frac{2sen\,3\alpha}{\cos 3\alpha} \quad (2)$$

A) Se $sen\ 3\alpha = 0$, então $\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{3}$, pois $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Por outro lado, esses valores de α não anulam os denominadores $\cos\alpha$. $\cos 2\alpha$ e $\cos 3\alpha$.

B) Se $sen\ 3\alpha \neq 0$, então: $\cos 3\alpha. = 2\cos\alpha.\cos 2\alpha$.

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - sen\alpha\cdot sen\,2\alpha = 2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha + sen\alpha\cdot sen\ 2\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha-\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$$

Concluímos, assim, que as únicas soluções são: $\left\{\begin{matrix}\alpha=0,\\ \alpha=\frac{\pi}{3}.\end{matrix}\right\}$

DRN-T43:

Use transformações soma-produto e fórmulas de arco-duplo.

Observe que sen 4A = - sen 4(B + C).

DRN-T44:

Como A + B + C = π, então $\frac{A}{2} = \frac{\pi-(B+C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{B+C}{2}\right)$.

Logo $cotg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]}{sen\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]} = \frac{sen\left(\frac{B+C}{2}\right)}{cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$ (I)

Por outro lado, temos:

$\frac{senB+senC}{cosB+cosC} = \frac{2sen\left(\frac{B+C}{2}\right).cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2cos\left(\frac{B+C}{2}\right).cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{B+C}{2}\right)}{cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$ (II)

Por (I) e (II) concluímos:

$cotg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{senB+senC}{cosB+cosC}$.

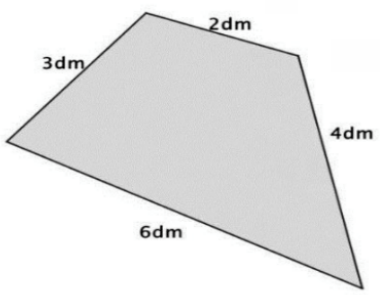
DRN-T45:

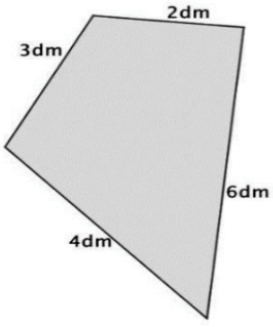
Use a lei dos senos para obter: a = $\frac{2p\ senA}{senA + senB + senC}$ e, depois, faça transformações para o arco metade.

SOBRE CERTAS PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS

Considere o seguinte problema:

QT-46. **[JNCF]** Um técnico de uma fábrica de vidro cortou várias peças, em formato de quadrilátero convexo, para serem usadas em portas de madeira. Todas as peças cortadas tinham seus lados medindo os seguintes valores: 2 dm, 3 dm, 4dm e 6 dm. A figura representa duas peças, mas não se tem informação precisa sobre os ângulos delas.





Quaisquer que sejam os ângulos possíveis de corte adotados, o maior valor da área, em dm^2, que qualquer uma das peças pode ter em uma de suas faces, está entre

A) 9 e 11.

B) 11 e 13.

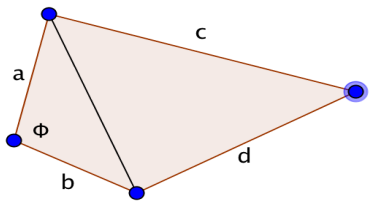
C) 13 e 18.

D) 18 e 24.

E) 24 e 36.

A situação descrita na questão nos coloca o seguinte desafio:

Se todos os quadriláteros construídos têm os lados com as mesmas medidas (a, b, c e d), embora com ângulos internos diferentes, qual a propriedade que eles devem possuir para ter a maior área?



A propriedade mais relevante para essa questão é a seguinte: **entre todos os quadriláteros com os lados medindo a, b, c e d, os de maior área são aqueles que podem ser inscritos em um círculo.**

E em todo quadrilátero inscritível a soma de dois ângulos opostos é 180^o .

Usando a figura anterior e o fato de $sen(\emptyset) = sen(180° - \emptyset)$ obtemos que a área do quadrilátero inscritível é dada por

$$S = \frac{1}{2}(ab.sen\phi + cd.sen\phi)$$

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)sen\phi \ .$$

Agora, podemos aplicar a lei dos cossenos, nos dois triângulos, para a mesma diagonal, lembrando que $\cos(180^o - ø) = -\cos ø$ e obter:

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 2ab.cosø = c^2 + d^2 + 2cd.cosø}. \ (1)$$

Substituindo em (1) os valores a = 2, b = 3, c = 4 e d = 6, chega-se em cosø = -13/20 e senø $\cong 0{,}76$.

Então **S** = $1/2\ (ab + cd)sen\phi \cong$ ½(6 + 24)0,76 = **11,4**.

Logo a resposta é **B**.

Outras questões associadas com essa surgem:

→ Sempre existe um quadrilátero inscritível entre todos os quadriláteros com os lados medindo a, b, c e d?

→ Como se justifica isso?

→ Pode-se garantir, a menos de congruência, a unicidade desse quadrilátero cíclico?

A **condição de existência** de um quadrilátero convexo inscritível, pode se justificar como se argumenta a seguir.

Pela desigualdade triangular a + b + c > d, b + c + d > a, c + d + a > b e d + a + b > c.

Disso segue que a + b > /d – c/ e /a – b/ < c + d. Elevando ao quadrado ambos os membros de cada uma dessas desigualdades e juntando os termos de mesmo grau em um só membro, obtemos:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 > -2(ab + cd) \text{ e } a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2(ab + cd).$$

Disso segue que $-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} < 1$.

Logo existe $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$. Observe que isso equivale a (1).

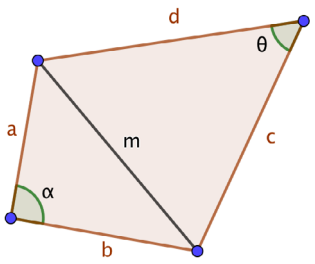
Por outro lado, a **unicidade**, a menos de congruência, não ocorre sempre. Basta inverter a ordem de dois vértices, de uma mesma diagonal, de um dos triângulos componentes do quadrilátero cíclico para perceber isso. Noutros termos, basta fazer uma reflexão de um dos triângulos componentes, em relação à mediatriz da diagonal, que é lado desse triângulo. Por outro lado, se a ordem dos lados for fixada, então a unicidade, a menos de congruência, é garantida.

QT-47. Por que o quadrilátero inscritível é o de maior área?

Dica-1: Um caminho para a resposta é encontrar a expressão da área de um quadrilátero convexo em função dos seus lados e da soma de dois ângulos opostos.

Dica-2: Outro caminho, bem mais curto, é usar a propriedade de que “o círculo é a figura plana de maior área entre todas aquelas que têm o mesmo perímetro”.

Seguindo a dica-1, você deve proceder de modo análogo ao que foi feito para se obter a área S = 11,4 na resolução da questão anterior. Só que agora tem que trabalhar com dois ângulos α e θ, usando $\alpha + \theta = 2\phi$, conforme indica a figura a seguir.



Consideremos a figura acima. Então a área do quadrilátero é dada por

$S = \frac{1}{2}(ab.sen\alpha + cd.sen\theta)$. Disso segue $4S = 2(ab.sen\alpha + cd.sen\theta)$. (1)

Agora, podemos aplicar a lei dos cossenos, nos dois triângulos, para a mesma diagonal m, e obter:

$a^2 + b^2 - 2ab.cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd.cos\theta$, que equivale a

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab.cos\alpha - 2cd.cos\theta$ (2)

Elevando ao quadrado os membros das igualdades (1) e (2) e adicionando-as em seguida, membro a membro, obtemos:

$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd.cos(\alpha + \theta)$.

Mas $cos(2\phi) = 2cos^2\phi - 1$ e fazendo $\alpha + \theta = 2\phi$, temos que

$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd.(2cos^2\phi - 1)$.

Disso segue

$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 - 16abcd.cos^2\phi \Leftrightarrow$

$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd.cos^2\phi \Leftrightarrow$

$16S^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - b^2 - a^2 + c^2 + d^2) - 16abcd.cos^2\phi$

$\Leftrightarrow 16S^2 = [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2] - 16abcd.\ cos^2\phi$

$\Leftrightarrow 16S^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) - 16abcd.cos^2\phi$

$\Leftrightarrow 16S^2 = (2p - 2d)(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) - 16abcd.cos^2\phi$,

onde $2p = a + b + c + d$. Dessa última igualdade concluímos que

(*) $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd.cos^2(\phi)$.

O valor máximo de S ocorre quando $\phi = 90$, o que equivale a $\alpha + \theta = 2\phi = 180°$. Mas isso significa que ***o quadrilátero é inscritível*** e que neste caso sua área será dada por:

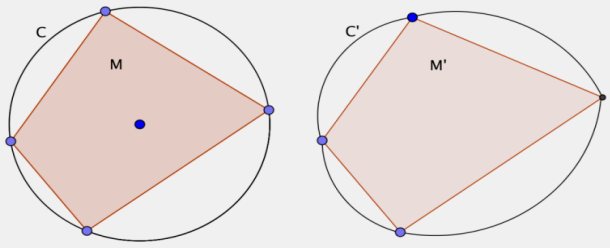
$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) \Leftrightarrow \mathbf{S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$, que é a fórmula de *Brahmagupta*.

NOTA:

No caso especial de um quadrilátero circunscritível, temos a propriedade de a + c = b + d, que implica p = a + c = b + d. Isso combinado com (*) nos leva a **S =** $\sqrt{\mathbf{abcd}}.sen\phi$.

E se o quadrilátero for inscritível e circunscritível teremos que **S =** $\sqrt{\mathbf{abcd}}$.

Em relação à dica-2, podemos proceder da forma argumentada a seguir.



Considere as figuras anteriores. Na figura da esquerda temos um círculo C circunscrito a um quadrilátero convexo M. Recortemos, no círculo C, os segmentos circulares adjacentes ao quadrilátero inscrito M. A seguir unamos esses segmentos aos lados correspondentes do quadrilátero não inscritível M', formando uma região plana C'. Os perímetros de C e C' são iguais por construção. Logo se S e S' são suas áreas respectivas, então temos que **S ≥ S**', pois o círculo é a figura plana de maior área entre todas aquelas que têm o mesmo perímetro.

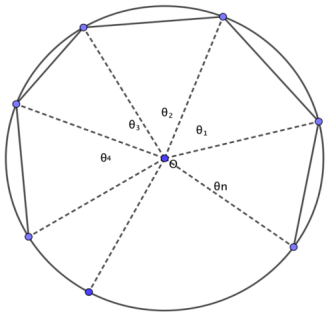
E como os segmentos circulares sobre os lados de M' são de mesma área que os seus correspondentes de M, então cocluimos que **área(M) ≥ área(M').**

Esse problema pode ser generalizado para um polígono convexo de n lados, inscrito em uma circunferência C. O procedimento da demonstração é análogo ao mostrado anteriormente para o quadrilátero.

POLÍGONO INSCRITO DE ÁREA MÁXIMA

Um outro problema muito interessante relacionado com esse anterior é o de **determinar o polígono convexo de n lados, inscrito em uma circunferência, que tem área máxima**. A resposta é **o polígono regular de n lados**, inscrito na mesma. Justificaremos, a seguir.

Suponhamos que o polígono convexo inscrito P tenha o centro O do círculo L em seu interior e que ao traçar os raios de O para os vértices de P, particione P em n triângulos, conforme a figura a seguir, determinando os ângulos centrais θ_i.



Se R é o raio de L, então a área do polígono inscrito P é

$$S = \frac{R^2}{2}(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 + \ldots + \text{sen}\theta_n).$$

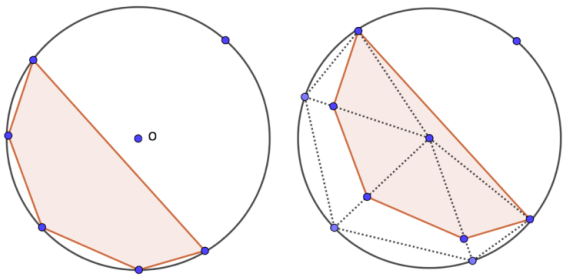
Para que S seja máxima, a soma $sen\theta_1 + sen\theta_2 + \ldots + sen\theta_n$ deve ser máxima. Aplicando a desigualdade MQ ≥ MA, entre as médias quadrática e aritmética, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 + \ldots + \text{sen}\,\theta_n}{n} \leq \sqrt{\frac{sen^2\theta_1 + sen^2\theta_2 + \cdots + sen^2\theta_n}{n}},$$

em que a igualdade só ocorre quando $sen\theta_1 = sen\theta_2 = \ldots = sen\theta_n$. Uma solução para essas igualdades é $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 2\pi/n$. Logo o polígono convexo inscrito regular de n lados tem área máxima.

Caso o centro O não esteja no interior do polígono P, podemos fazer uma translação adequada do mesmo para que isso seja possível, mantendo P dentro de L, já que nesse caso P estaria contido em um dos semicírculos de L e, por conseguinte, o seu maior lado seria menor do que um diâmetro de L, conforme ilustrado na figura a seguir.

Observe ainda, que nesse caso poderíamos incluir o interior de P em um novo polígono convexo P', com o mesmo número de lados e inscrito em L, recaindo no caso anterior.



Para provar a unicidade da solução, a menos de congruência, suponhamos que exista uma solução com um par de ângulos $(\theta_k\ ,\ \theta_i)$ suplementares, com $\theta_k > \theta_i$. Então o triângulo isósceles AOC de lados radiais e ângulo central θ_k tem altura h < R em relação a um desses lados que está contido no diâmetro AB. Logo o triângulo retângulo ABC tem área menor do que a do triângulo isósceles de altura R e base AB, o que nos leva a concluir que o polígono convexo inscrito P', de mesmo número de lados, n – 2, tem área maior do que a de P, o que contradiz a hipótese de P ter área máxima.

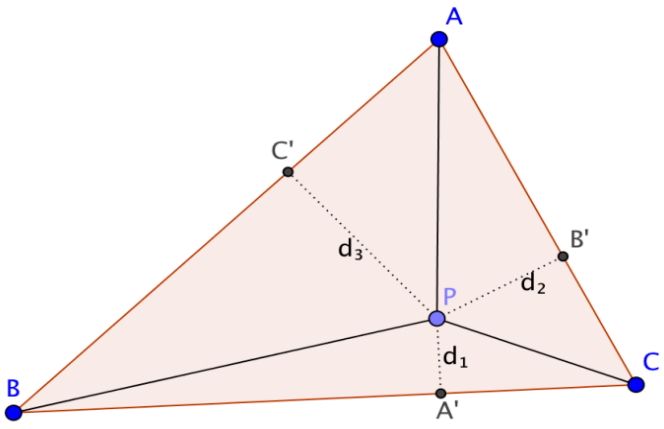
Também, de modo análogo, podemos provar a seguinte propriedade: De todos os polígonos convexos de n lados, inscritos em um círculo, o de maior perímetro é o polígono regular de n lados. Para isso basta verificar, inicialmente, que o perímetro Pm do polígono convexo de n lados pode ser expresso assim:

$$Pm = 2R[\text{sen}(\theta_1/2) + \text{sen}(\theta_2/2) + \ldots + sen(\theta_n/2)].$$

A seguir usar MQ ≥ MA para concluir a demonstração.

DESIGUALDADE DE ERDÖS-MORDELL

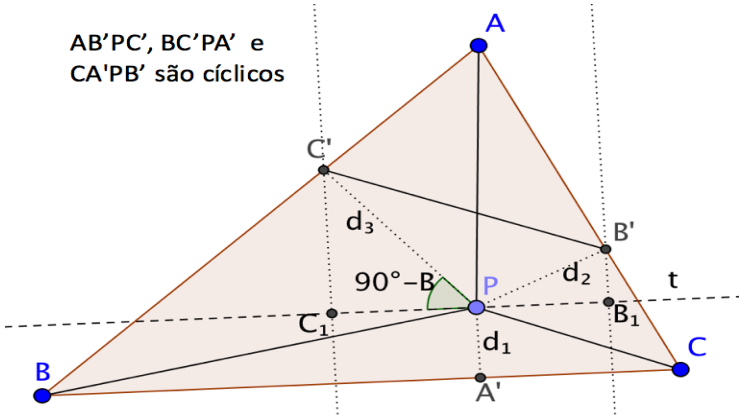
Seja ABC um triângulo qualquer. Se P é um ponto de seu interior, então vale a seguinte desigualdade: AP + BP + CP ≥ 2($d_1 + d_2 + d_3$),em que d_1, d_2 e d_3 são as distâncias de P aos lados BC, AC e AB, respectivamente. E a igualdade só ocorre quando ABC é equilátero e P é seu baricentro.



PROVA:

Considere a figura ilustrativa a seguir. Como o quadrilátero AB'PC' é cíclico, em virtude dos ângulos B' e C' serem retos, então pela lei dos senos temos que

$$\frac{C'B'}{\text{sen}A} = 2R = AP \Rightarrow \mathbf{C'B' = AP\ sen A}.$$



A projeção ortogonal de C'B' sobre a reta t // BC é dada por

$$C_1B_1 = d_3\cos(90^\circ - \mathbf{B}) + d_2\cos(90^\circ - \mathbf{C}) = d_3 \text{sen}B + d_2 \text{sen}C.$$

Logo $AP\ \text{sen}A \geq d_3\text{sen}B + d_2\text{sen}C \Leftrightarrow AP \geq d_3\left(\frac{senB}{senA}\right) + d_2\left(\frac{senC}{senA}\right)$ (I).

Fazendo de modo análogo com BP e CP, obtemos:

$$BP \geq d_1\left(\frac{senC}{senB}\right) + d_3\left(\frac{senA}{senB}\right) \quad \text{(II)}$$

$$CP \geq d_2\left(\frac{senA}{senC}\right) + d_1\left(\frac{senB}{senC}\right) \quad \text{(III)}.$$

Adicionando, membro a membro, (I), (II) e (III), obtemos:

$$AP + BP + CP \geq d_1\left(\frac{senC}{senB} + \frac{senB}{senC}\right) + d_2\left(\frac{senC}{senA} + \frac{senA}{senC}\right) + d_3\left(\frac{senB}{senA} + \frac{senA}{senB}\right),$$

o que nos leva, usando MA ≥ MG, na forma $x + 1/x \geq 2$, ao resultado desejado:

$$\mathbf{AP + BP + CP \geq 2(d_1 + d_2 + d_3).}$$

Obs.:

Justifique a igualdade usando a condição MA = MG ⇔ senB = senC = senA. Como os pares de ângulos não podem ser suplementares então ABC é equilátero. Mas Isso implica por (I), (II) e (III) que $AP = d_3 + d_2$, $BP = d_1 + d_3$ e $CP = d_2 + d_1$, o que nos leva a AA´, BB´e CC´ serem alturas de ABC. Logo P é o ortocentro, que também é o circuncentro, de ABC.

NOTA (Aplicações):

Na prática, a desigualdade de Erdős-Mordell é usada em áreas como engenharia, geodésia, otimização e física. Por exemplo:

Ao posicionar antenas de transmissão, podemos usar essa desigualdade para economizar material e garantir uma boa cobertura.

Na geodésia, ela ajuda a determinar a posição de marcos geodésicos ou de estações de GPS.

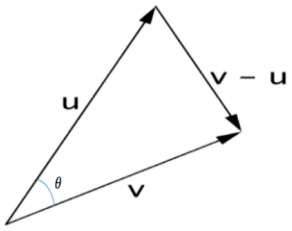
Em sistemas de comunicação sem fio, otimizamos a localização de antenas.

Na física, aplicamos essa desigualdade ao estudar órbitas de satélites.

Em robótica, a desigualdade pode ser aplicada para otimizar a localização de sensores em robôs móveis. Isso ajuda a melhorar a percepção do ambiente e a eficiência das tarefas realizadas pelo robô.

A LEI DOS COSSENOS E A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Considere os vetores u e v e sua diferença v – u, como ilustra a figura a seguir.



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo obtemos**:**

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta. \quad (1)$$

Por outro lado, o produto interno de dois vetores u e v é dado por u.v = $a_1b_1 + a_2b_2$, em que u = (a_1 , a_2) e v = (b_1 , b_2). Às vezes, indicamos o produto u.v por <u, v>.

Logo (v – u).(v – u) = ($b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$).($b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$) = $(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = |v-u|^2$

= $b_1^2 + a_1^2 - 2\,a_1b_1 + b_2^2 + a_2^2 - 2\,a_2b_2$

= $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

= $|u|^2 + |v|^2$ – 2 u.v.

Logo $|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2$ – 2 u.v. (2)

Comparando as igualdades (1) e (2) encontramos: $u.v = |u||v|\cos(\theta)$ => $u.v \leq |u||v|$, implica $|u.v|^2 \leq |u|^2|v|^2$, que é a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz.**

Ela pode ser escrita para os vetores u e v do plano assim: $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2).(b_1^2 + b_2^2)$

A igualdade só ocorre quando u e v são paralelos, o que equivale a $a_1/b_1 = a_2/b_2$.

E pode ser generalizada para $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

Nesse caso os vetores u e v têm n coordenadas ou componentes: u = (a_1, a_2, ..., a_n) e v = (b_1, b_2, ..., b_n).

NOTA:

Observe que na fórmula $u.v = |u||v|\cos(\theta)$, se $\cos(\theta) = 0$, os vetores são perpendiculares e $u.v = 0$. Ou seja, dois vetores não nulos são perpendiculares quando seu produto interno é nulo.

Considere a desigualdade de Cauchy-Schwarz com apenas dois termos:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2).(b_1^2 + b_2^2).$$

Denotemos por M_1 e M_2, o primeiro e o segundo membros dessa desigualdade, respectivamente.

Qual o significado geométrico da diferença $M_2 - M_1$?

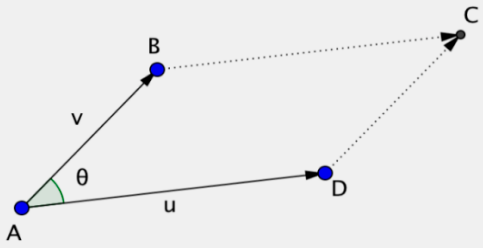
Sejam u e v como indicados acima. Então $|u.v|^2 \leq |u|^2|v|^2$ e $M_2 - M_1 = |u|^2|v|^2 - |u.v|^2$. Mas $u.v = |u||v|\cos(\theta)$, então

$$M_2 - M_1 = |u|^2|v|^2 - \left||u||v|\cos(\theta)\right|^2 =$$

$$= |u|^2|v|^2(1 - \cos^2(\theta))$$

$$= |u|^2|v|^2\text{sen}^2(\theta).$$

E como a área do paralelogramo ABCD é dada por $S = |u||v|sen(\theta)$, então temos que $M_2 - M_1 = S^2$.



Portanto, a diferença $M_2 - M_1$ significa, geometricamente, S^2, que é o quadrado da área do paralelogramo ABCD, determinado pelos vetores u e v.

Disso se deduz que a igualdade só ocorre, na desigualdade de Cauchy-Schwarz, se S = 0, o que equivale a afirmar que u e v têm a mesma direção.

Uma desigualdade muito conhecida que decorre dessa desigualdade é a **desigualdade triangular**: $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Para provar isso basta verificar que

$$|v + u|^2 = (v + u).(v + u) = |u|^2 + |v|^2 + 2\,u.v \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u| + |v|)^2 .$$

Uma consequência da desigualdade triangular é a seguinte:

$||u| - |v|| \leq |u - v|$. Para provar isso faça u = v + (u – v) e v = u + (v – u).

Outra consequência dela é $|u - v| \leq |u| + |v|$.

Considere o problema:

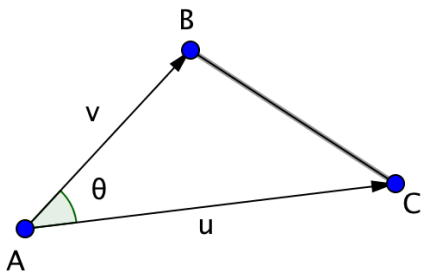
Os vértices de um triângulo ABC têm as seguintes coordenadas no espaço:

A = (1, 1, 2), B = (0, -2, 1) e C = (-1, -1, -1).

Qual o valor de $tg^2(\hat{A})$?

Resolução:

Considere a figura ilustrativa a seguir, em que v = B – A = (-1, -3, -1) e u = C – A = (-2, -2, -3).



Então, temos: u.v = 2 + 6 + 3 = 11, $|v| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$ e $|u| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$. Com isso vem

$$cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{11}{\sqrt{11}\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{11}{17}} \Rightarrow cos^2\theta = \frac{11}{17} \Rightarrow sen^2\theta = \frac{6}{17}.$$

Logo $tg^2(\hat{A}) = \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{6}{11}$.

NOTA:

A **projeção ortogonal(escalar)** u_v de um vetor u na direção de outro vetor v, com o qual forma um ângulo θ, é dada por $u_v = |u|.cos\,\theta = |u|.\frac{u.v}{|u||v|} = \frac{u.v}{|v|}$. A projeção ortogonal **vetorial** é dada por $\mathbf{u_v} = u_v . \ v/|v| = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$ ou, usando a outra notação $u_v = \frac{<u,v>}{|v|^2} v$.

Uma demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz, usando a desigualdade MA ≥ MG, apresentamos a seguir

Pela desigualdade MA ≥ MG podemos afirmar:

$$\frac{a_1^2}{\sum a_i^2} + \frac{b_1^2}{\sum b_i^2} \geq \frac{2a_1b_1}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}},$$

$$\frac{a_2^2}{\sum a_i^2} + \frac{b_2^2}{\sum b_i^2} \geq \frac{2a_2b_2}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n^2}{\sum a_i^2} + \frac{b_n^2}{\sum b_i^2} \geq \frac{2a_nb_n}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}}.$$

Somando, membro a membro, as desigualdades anteriores, obtemos:

$$2 \geq \sum \frac{2a_ib_i}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}, \text{ que é equivalente a } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2.$$

Por MA ≥ MG deduzimos que a igualdade só ocorre quando, para todo

$i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \frac{b_i^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$, o que é equivalente a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Essa demonstração reforça a relevância que se deve dar para a desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica: MA ≥ MG. E também evidencia porque podemos, muitas vezes, com certa facilidade, usar MA ≥ MG para resolver questões que comumente são resolvidas pela aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

PRODUTO VETORIAL OU PRODUTO EXTERNO

Seja OXYZ um sistema ortogonal de eixos do Espaço. E seja B = {u, v, w} uma base deste Espaço, onde u =(a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2) e w = (a_3, b_3, c_3) estão expressos em relação à base canônica do sistema OXYX. Se o determinante

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ é positivo, então dizemos que a base B é uma base positiva.

E se este determinante é negativo, então dizemos que a base B é uma base negativa. Verifique que se (i, j, k) é a base canônica, então (j, i, k) é uma base negativa.

Definição

Fixemos no espaço uma base ortonormal positiva (e_1, e_2, e_3). Sejam u = (a_1, b_1, c_1), e v = (a_2, b_2, c_2) vetores expressos nesta base. Denominamos de **produto vetorial** de u por v ao vetor.

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_3$$

Este produto pode ser interpretado como o “determinante formal”.

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Com a ajuda desta representação e das propriedades dos determinantes podemos provar as propriedades listadas a seguir.

Propriedades do produto vetorial

Sejam **u, v** e **w** vetores do espaço.

I) $u \wedge v = -(v \wedge u)$

II) $(u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w)$ e $u \wedge (v + w) = (u \wedge v) + (u \wedge w)$

III) $(tu) \wedge v = u \wedge (tv) = t(u \wedge v)$, onde $t \in R$

IV) $(u \wedge v) \cdot w = \det [u, v, w]$

OBS: Este produto $(u \wedge B) . w$ é chamado de produto misto do terno (u, v w) e se representa também por [u, v w].

V) $u \wedge v$ é ortogonal a u e a v.

VI) $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow$ u e v são colineares. (u e v não nulos).

VII) Se u e v são números colineares, então $\{u, v, u \wedge v\}$ é uma base positiva e $\{u, v, v \wedge u\}$ é uma base negativa.

OBS: $\det [u, v, u \wedge v] = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0$, em virtude e de IV.

VIII) $|u \wedge v|^2 = /u/^2 / v/^2 - (u \cdot v)^2$ (identidade de Lagrange).

IX) Se u e v são não nulos e se θ é a medida do ângulo de u e v, então $/u \wedge v/ = /u/ / v/ \operatorname{sen}\theta$.

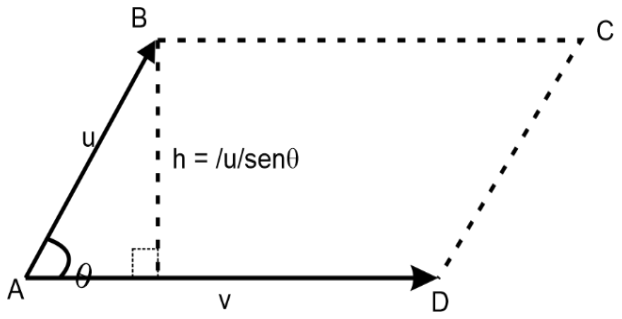
OBS: Use VIII para obter IX.

X) O produto vetorial não é associativo, isto é, $v \wedge (v \wedge w)$ pode ser diferente de $(u \wedge v) \wedge w$.

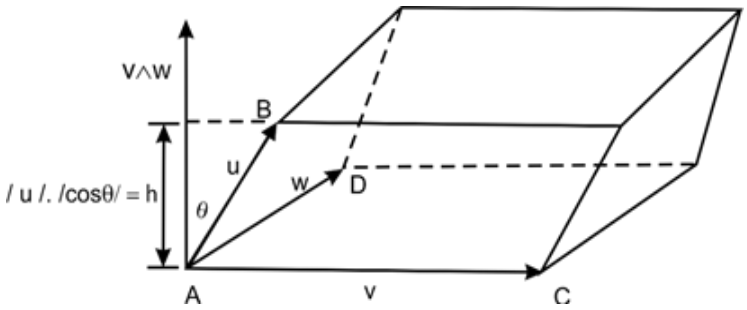
XI) $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$.

OBS: Esta propriedade XI exprime o que se denomina de duplo produto vetorial .

XII) Se ABCD é um paralelogramo e $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AD}$, então $/u \wedge v/$ é a área de ABCD (vide figura a seguir).



XIII) Se $\overline{AB}, \overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são arestas de um paralelepípedo e $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$, então o produto misto $u \cdot (v \wedge w)$ tem módulo igual ao volume deste parelelepipedo. (Vide figura a seguir)



Outras propriedades que você poderá verificar:

1) $|u \wedge v| \leq |u|^2 \, |v|^2$.

2) Se u, v, w e k são vetores do Espaço(R^3), então

A) [u, v, w] = [u, v + su + tw, w], em que s e t são números reais;

B) $|[u, v, w]| \leq |u||v||w|$;

C) [u, v, w + k] = [u, v, w] + [u, v, k];

D) $(u \wedge v).w = v.(u \wedge w)$.

3) Se u, v, w, x, y, z são vetores do Espaço(R^3), então

$$[u, v, w] \,.\, [x, y, z] = \begin{vmatrix} u.x & u.y & u.z \\ v.x & v.y & v.z \\ w.x & w.y & w.z \end{vmatrix}.$$

Determinante de Gramm e volume de um paralelepípedo

Um resultado interessante, decorrente de (3), é o seguinte:

Se as coordenadas dos vetores u, v e w do Espaço(R^3) são inteiras, então

$\begin{vmatrix} u.u & u.v & u.w \\ v.u & v.v & v.w \\ w.u & w.v & w.w \end{vmatrix}$ é um quadrado perfeito. Por outro lado, nem sempre $\begin{vmatrix} u.u & u.v \\ v.u & v.v \end{vmatrix}$ é um quadrado perfeito, se u e v têm coordenadas inteiras. Verifique.

Comumente, se denomina de determinante de Gramm dos vetores u e v ao determinante

$$D = \begin{vmatrix} u.u & u.v \\ v.u & v.v \end{vmatrix}.$$

Veja que $D = |u|^2 \, |v|^2 - |u.v|^2$ coincide ser a diferença entre os dois membros da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que geometricamente é o quadrado da área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v. E pela identidade de Lagrange $D = |u \wedge v|^2$. Verifique ainda que considerando os vetores u e v de R^2 como as linhas de uma matriz M, deduz-se que $\det(M.M^t) = D$, que equivale a $(\det M)^2 = D$. Portanto, a área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v é igual a $|det\ M|$. Do mesmo modo vale para u, v e w em R^3: $\begin{vmatrix} u.u & u.v & u.w \\ v.u & v.v & v.w \\ w.u & w.v & w.w \end{vmatrix} = \det(MM^t) = (\det M)^2$. Nesse caso $|det\ M|$ representa o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w, conforme a propriedade XIII do produto vetorial.

Uma propriedade interessante relacionada com esses resultados é a seguinte: Seja M uma matriz quadrada de ordem 3 e X um vetor(coluna) de R^3. Então, a aplicação linear F: $R^3 \rightarrow R^3$, definida por F(X) = MX satisfaz à condição Vol[F(B)] = Vol[B]. $|det\ M|$, em que B é um paralelepípedo de R^3. Noutras palavras uma transformação linear F multiplica volumes pelo fator $|det\ M|$, em que M é a matriz de F. Trocando a ordem de 3 para 2 e R^3 por R^2, vale a mesma regra, com área no lugar de volume. Esta propriedade pode ser generalizada para aplicações lineares de R^n em R^n. Mais à frente, no último capítulo, usaremos isso para dedução de novos resultados sobre aplicações não lineares de várias variáveis.

Observe que se detM = 0, então Vol[F(B)] = 0. Então as transformações lineares de matrizes inversíveis é que de fato interessam quando se trata de alterações de volumes ou áreas. Se M é uma matriz diagonal, então fica fácil de verificar essa propriedade dos volumes. Vejamos isso para uma matriz 2 x 2: M = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Temos para os vetores u = (x, y) e v = (x', y') : F(u) = (ax, by) , F(v) = (ax', by') , D = $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & xx'+yy' \\ xx'+yy' & (x')^2+(y')^2 \end{vmatrix}$ e detM = ab. A área de B é $\sqrt{D}$. Calculemos a área de F(B).

$$D_F = \begin{vmatrix} F(u).F(u) & F(u).F(v) \\ F(v).F(u) & F(v).F(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2x^2+b^2x^2 & a^2xx'+b^2yy' \\ a^2xx'+b^2yy' & a^2(x')^2+b^2(y')^2 \end{vmatrix} = a^2b^2[x^2(y')^2+x^2(x')^2-2xyx'y'] = a^2b^2.D.$$

Donde F(B) = $ab\sqrt{D} = \sqrt{D}|det\ M|$.

Este último resultado vale para outros tipos de regiões B do espaço R^3, tais como bola esférica, prismas, pirâmides e muitas outras. E no caso de R^2, vale para regiões como discos, polígonos, setores circulares, elipses, etc. Portanto, com essa propriedade mais geral podemos responder a questões da forma:

1) Qual o volume V da imagem de uma bola esférica de raio 3, dada pela aplicação linear F: $R^3 \rightarrow R^3$, definida por F(X) = MX, em que M = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$?
Resposta: V = $36\pi.|det\ M| = 108\pi.$

2) Calcule a área da região do plano delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Escolha a aplicação linear F: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que F(X) = MX, com M = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e X = (x, y). A imagem da circunferência C definida por $x^2+y^2=1$ é a elipse dada, pois F(x, y) = (ax, by) = (x', y') => x = x'/a e y = y'/b. Logo a área procurada é $\pi|det\ M| = \pi ab$. De modo análogo, pode-se mostrar que o volume V de uma região do espaço(R^3) delimitada por um elipsoide de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ é V = $\frac{4}{3}\pi abc$. Neste caso, o elipsoide é a imagem da esfera de equação $x^2+y^2+z^2=1$ pela aplicação F(X) = MX, com $M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ e X = (x, y, z). Qual seria a imagem de um triângulo ABC por essa aplicação F?

3) Se M é uma matriz inversível 2 x 2, então a aplicação linear F: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por F(X) = MX goza das propriedades: A imagem de um segmento de reta AB é o segmento de reta CD, em que F(A) = C e F(B) = D; a imagem de retas paralelas são retas paralelas. Em consequência disso, a imagem de um paralelogramo é um paralelogramo e de um triângulo é um triângulo também. Verifique essas propriedades para o caso específico em que M é uma matriz diagonal inversível. Para facilitar a verificação(prova) da primeira propriedade, use a definição de segmento de reta AB do plano R^2, na forma: AB = { X ∈ R^2; X = (1 – t)A + tB, com t ∈ [0, 1] }.

Bases de R^2 E R^3

Se $v_1,..., v_n$ são vetores e $a_1,... a_n$, são números reais, então o vetor dado por $v = a_1v_1 + ...+ a_nv_n$ é denominado de **combinação linear** de $v_1,..., v_n$.

Teorema 1:

Se dois vetores **u** e **v** de um plano são não colineares, então todo vetor **w** desse plano pode ser expresso, de modo único, como combinação linear dos outros dois.

Prova:

Escolhemos no plano um sistema ortogonal OXY, tal que u = OA, onde A pertence ao semi-eixo positivo de OX. Então podemos escrever: u = (a, 0) e v = (b, C). Seja w = (m, n) um vetor qualquer do plano. Queremos obter números reais tais que w = xu + yv , isto é

$$(I)\begin{cases} xa + yb = m \\ yc = n \end{cases}$$

Como u e v são não colineares, então, a e c são diferentes de 0. Com isto podemos obter, a partir da segunda equação do Sistema (I) que y = $\frac{n}{c}$. E substituindo este valor de y na primeira equação, deduzimos que

$$x = \frac{\left(m - \frac{nb}{c}\right)}{a}.$$

Logo os números x e y existem e são únicos.

Teorema 2:

Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não coplanares, isto é, nenhum deles é combinação linear dos outros dois. Então todo vetor *w* do Espaço se expressa, de modo único, como uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

Prova:

Escolhamos no Espaço um sistema ortogonal de eixos OXYZ tal que v_1 = OA, em que A pertence ao semi-eixo positivo de OX e v_2 = OB, em que B pertence ao plano XY, mas não pertence a OX, e v_3 = OC, com C não pertencente ao plano XY. Então, podemos escrever $v_1 = (a_1, 0, 0)$, $v_2 = (b_1, b_2, 0)$ e $v_3 = (c_1, c_2, c_3)$. Como estes vetores são não coplanares, deduzimos que a_1, b_2 e c_3 são diferentes de zero.

Seja w = (m, n , k) um vetor qualquer do Espaço. Desejamos mostrar que existem números reais, x, y,z tais que $w = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$, o que equivale a dizer:

$$(I)\begin{cases} xa_1 + yb_1 + zc_1 = m \\ yb_2 + zc_2 = n \\ zc_3 = k \end{cases}$$

Da terceira equação do sistema (I) obtemos: $z = \frac{k}{c_3}$. Substituindo este valor na segunda esquação de (I) obtemos:

$$y = \frac{\left(n - \frac{kc_2}{c_3}\right)}{b_2}.$$

E finalmente, substituindo os valores de x e y na primeira equação de (I) obtemos o valor correspondente de x. Portanto, o terno (x, y, z) existe e é único.

Denomina-se de **base** do plano (R^2) a todo conjunto ordenado $\{v_1, v_2\}$ de dois vetores não colineares do referido plano. Denomina-se **base** do espaço (R^3) a todo conjunto ordenado $\{v_1, v_2, v_3\}$ de três vetores não coplanares do mesmo. Se os vetores de uma base (de R^2 ou de R^3) são ortogonais dois a dois, então dizemos que a base é **ortogonal**. Se além disso, os vetores da base são unitários, então dizemos que a base é **ortonormal**. E finalmente, se a base é ortonormal e seus vetores têm, respectivamente, a direção e o sentido de cada um dos eixos do sistema ortogonal OXYZ (ou OXY no caso plano), então dizemos que ela é base canônica do Espaço (ou do plano). Comumente, indicamos as bases canônicas do plano e do espaço por (i, j} e {i, j, k}, respectivamente.

Se $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do Espaço e $v = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$, então dizemos que (x, y, z) são as coordenadas do vetor v em relação à base B. Do mesmo modo, se $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base do plano e $v = x \cdot v_1 + y \cdot v_2$, então dizemos que (x, y) são as coordenadas de v em relação à base V.

Se mudamos de base no plano ou no espaço o que ocorre com as coordenadas dos vetores? Vejamos. Sejam $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases do espaço(R^3). Um vetor X do espaço tem as coordenadas $X_B = (x, y, z)$ na base B e $X_{B'} = (x', y', z')$ na base B'. Isso significa que $X_B = xv_1 + yv_2 + zv_3$ e $X_{B'} = x'w_1 + y'w_2 + z'w_3$. Vamos agora expressar os vetores da base B' na base B. Temos pois, que $w_1 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$, $w_2 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ e $w_3 = d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3$. Substituindo essas expressões em $X_{B'}$ obtemos

$X_{B'} = (x'b_1 + y'c_1 + z'd_1)v_1 + (x'b_2 + y'c_2 + z'd_2)v_2 + (x'b_3 + y'c_3 + z'd_3)v_3 = xv_1 + yv_2 + zv_3 = X_B$. Disso segue que $x = x'b_1 + y'c_1 + z'd_1$, $y = x'b_2 + y'c_2 + z'd_2$ e $z = x'b_3 + y'c_3 + z'd_3$. Mas isso equivale a

$$X_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = MX_{B'}.$$

A matriz M é a **matriz de transição** da base B' para a base B. E a inversa de M é a matriz de transição da base B para a base B'. Se a base B é a canônica, então fica bem mais simples determinar a matriz de transição para outra base.

Algumas questões com valores numéricos estão na lista deste capítulo.

Os conceitos acima foram dados de forma bem intuitivas. A seguir, vamos generalizar esses conceitos para espaços vetoriais mais abstratos.

ESPAÇOS VETORIAIS E FUNÇÕES

Dado um conjunto de n vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, se nenhum deles é uma combinação linear dos outros vetores, então dizemos que eles são linearmente independentes (L.I.). Caso contrário, dizemos que eles são linearmente dependentes (L.D.). Se qualquer vetor de um espaço vetorial V pode ser expresso como uma combinação linear de um conjunto B $\subset V$ de vetores L.I., então dizemos que B é uma **Base** desse espaço vetorial. Dizemos que um espaço vetorial é de dimensão finita , quando sua Base é um conjunto finito. E nesse caso a dimensão do espaço é o número de elementos de qualquer uma de suas bases. Por exemplo, o espaço euclidiano R^3 tem dimensão 3, pois toda base de R^3 tem 3 elementos. Mas o que é precisamente um Espaço Vetorial?

Seja V um conjunto não vazio de objetos que os chamaremos de **vetores**. Definamos em V duas operações: adição de vetores e multiplicação por um escalar. Chamaremos de escalar a qualquer número real ou complexo. Os escalares possuem as propriedades de um corpo. Dizemos que V é um **Espaço Vetorial** se essas duas operações satisfazem às propriedades listadas a seguir, em que **u, v, w** ∈ V e a, b são escalares.

1. Se **u** e **v** são objetos em V, então **u + v** é um objeto em V.
2. **u + v = v + u**
3. **u + (v + w) = (u + v) + w**
4. Existe um objeto **0** em **V**, denominado **vetor nulo** de V, ou **vetor zero**, tal que **0 + u = u + 0 = u**, com qualquer **u** em V.
5. Dado qualquer **u** em V, existe algum objeto **-u**, denominado **negativo** de **u**, tal que **u + (-u) = (-u) + u = 0.**
6. Se a for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então a**u** é um objeto em V.
7. a(**u + v**) = a**u** + av
8. (a + b)**u** = a**u** + b**u**
9. a(b**u**) = (ab)**u**
10. 1**u** = **u**

Perceba que essas propriedades são apenas generalizações das propriedades bem conhecidas dos vetores do plano(R^2) e do espaço euclidiano (R^3). Quando os escalares de um espaço vetorial V são números reais, então dizemos que V é um espaço vetorial real. E se os escalares forem complexos, então V é um espaço vetorial complexo. Também podemos falar em espaço vetorial racional se os escalares forem racionais. Todo espaço vetorial tem uma base. Esta proposição é um teorema fundamental. Sua demonstração pode ser encontrada em [Grossman, 1991]. Um subconjunto S de V é chamado de Subespaço de V, quando tem a seguinte propriedade: se $x, y \in V$, então $(ax + y) \in V$, para todo escalar a. Todo subespaço é um espaço vetorial.

Uma série de vídeos sobre Espaços Vetoriais, com apresentações didaticamente bem elaboradas, dotadas de boas transições e Aproximações Multifárias, você pode acessar no **Código QR**. O último vídeo, o de nº 15, apresenta a visão dos Espaços Vetoriais generalizados que brevemente abordamos aqui. Um excelente livro de Álgebra Linear, que inclui muitas aplicações, é a referência [Anton, 2012].

Outras referências são [Grossman,1991], [Carlen, 2009], [Gel'fand, 1989] e [Halmos, 1978].

Se V e W são espaços vetoriais, uma função $T: V \rightarrow W$ é chamada de **Transformação Linear** de V em W, quando ela tem a seguinte propriedade: $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$, para todos $x, y \in V$ e escalares a e b. O conjunto imagem de T, $T(V)$, é um subespaço de W. Para mostrar isso, basta verificar que dados dois elementos quaisquer de $T(V)$, $T(x)$ e $T(y)$, temos que $aT(x) + T(y) = T(ax) + T(y) = T(ax + y) \in V$, para qualquer escalar a. Observe que $T(0) = 0$, pois, $T(0) = T(0x) = 0T(x) = 0$. O conjunto $N_c(T)$ dos vetores de V tais que $T(x) = 0$ é chamado de núcleo de T. Verifique que $N_c(T)$ é um subespaço de V.

O conjunto L(V, W) de todas as transformações lineares de V em W é um espaço vetorial quando dotado das operações de adição e multiplicação por escalar: (T + S)(x) = S(x) + T(x) e (aT)(x) = $aT(x)$. Prova-se em Álgebra Linear, que toda transformação linear tem uma representação matricial da forma T(v) = Av, onde A é uma matriz m x n, v é um vetor(matriz coluna) qualquer de V, m é a dimensão de W e n é a dimensão de V. Essa representação matricial depende das bases dos espaços V e W. Quando elas não forem explicitadas, admitiremos que são as bases canônicas dos espaços respectivos. Por exemplo, a transformação linear T(x, y) = (2x – 3y, x + 5y), de R^2 em R^2, pode ser representada por T(v) = Av, em que A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e v = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, na base canônica de R^2. Observe que T(1, 0) = (2, 1) e T(0, 1) = (- 3, 5) que são os vetores coluna de A. Agora, desejamos obter a matriz de T em relação à base B = {(1, 2), (0, -1)}. Calculemos T(1, 2) e T(0, -1): T(1, 2) = (- 4, 11) e T(0, - 1) = (3, - 5). Falta expressar esses vetores na base B. Resolvendo os sistemas, obtemos (- 4, -19) e (3, 11) que são os vetores coluna de $[A]_B$. Ou seja, $[A]_B$ = $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -19 & 11 \end{bmatrix}$. Perceba ainda que a matriz de transição da base canônica para a base B é P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e que $[A]_B = PAP^{-1}$. Essa última relação é uma propriedade geral de toda transformação linear de V em V, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita. Veremos, no próximo capítulo, que essa condição define matrizes semelhantes. Ou seja, matrizes que representam a mesma transformação linear são semelhantes. Mais um exemplo, que deverá ser completado pelo leitor. Considere os subespaços vetoriais P_n e P_{n+1} formados, respectivamente, pela funções polinomiais de grau até n e de grau até n + 1. Suas bases canônicas são respectivamente: {1, x, ..., x^{n-1} } e {1, x, ..., x^n}. Seja $F: P_n \rightarrow P_{n+1}$ a transformação linear definida por $F(p) = \int_0^x (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) dt$, em que p = $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Encontre a matriz de F em relação às bases canônicas de P_n e P_{n+1}. Ela tem uma forma "quase" diagonal.

No capítulo anterior, afirmamos que o conjunto das funções escadas $f : [a, b] \rightarrow R$ formam um espaço vetorial quando munido das operações de soma de funções $f + g$ e multiplicação por escalar(a) real af. Isso é suficiente, porque ele é fechado em relação a essa duas operações e é subconjunto de um espaço vetorial mais amplo que é o das funções limitadas em $[a, b]$. Como o conjunto das funções limitadas $f : [a, b] \rightarrow R$ está contido no espaço vetorial de todas as funções reais definidas em $[a, b]$ e possui propriedade análoga, então ele é também um subespaço vetorial desse último.

Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real de E em R, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real |x|, chamado de norma de x, satisfazendo às seguintes condições:

I) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

II) $|\alpha x| = |\alpha||x|,\ \alpha \in R;$

III) $|x + y| \leq |x| + |y|,\ x, y \in E.$

Entenda a norma como uma generalização do módulo de um vetor. Um espaço vetorial E dotado de uma norma é denominado de espaço vetorial normado. Um exemplo de espaço vetorial normado é R^n dotado da norma euclidiana $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$. Outras normas muito usadas em R^n são $|x|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e $|x|'' = max|x_i|$. Todas as três satisfazem às condições (I), (II) e (III).

Por meio da norma, introduzimos, usualmente, num Espaço Vetorial Euclidiano $V = R^n$, uma **função distância** d: V x V → R, que é definida por $d(u, v) = |u - v|$, para todos u, v ∈ V. Três propriedades são características dessa função :

(1) d(u, v) ≥ 0 e d(u, v) = 0 ⇔ u = v, para todos u, v ∈ V;

(2) d(u, v) = d(v, u), para todos u, v ∈ V;

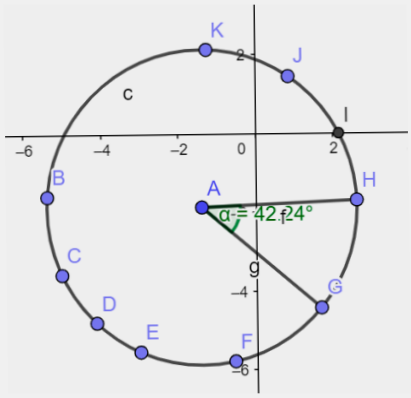
(3) d(u, w) ≤ d(u, v) + d(v, w), para todos u, v, w ∈ V (desigualdade triangular).

Se V é um espaço vetorial e existe uma função d: V x V → R que satisfaz às três propriedades descritas acima, então dizemos que d é uma **métrica** e que V é um **Espaço Métrico**. No capítulo 4 falaremos do **Disco de Poincaré**, onde será definida uma distância de forma bem diferente da usual.

NOTA(Espaços Métricos arbitrários)

No estudo geral de Espaços Métricos, se V é apenas um conjunto dotado de uma métrica(distância) então ele é chamado de **espaço métrico**. Os elementos de V podem ser números, pontos, vetores, funções, matrizes, etc. Normalmente, nos referimos aos elementos de um Espaço Métrico como **pontos**. Nesse caso, a métrica é dada pela função distância definida da forma acima, mas considerando os elementos como pontos genéricos. Por exemplo, o intervalo [a, b] de R, com a métrica usual de R é um espaço métrico, embora não seja um espaço vetorial. Um exemplo de espaço métrico finito: considere o conjunto V de 10 pontos distintos de uma circunferência de raio r e centro em A em um plano cartesiano, dotado da métrica dada pelo valor absoluto da medida em radianos do arco central determinado por dois pontos quaisquer de V.

Mais à frente, comentaremos sobre espaços métricos finitos relacionados com a geometria das redes e grafos, que têm múltiplias aplicações no mundo atual. Veja, a seguir, a figura ilustrativa do segundo exemplo.



Sequências em espaços vetoriais

Uma sequência de pontos em R^n , indicada por (a_k), é definida de modo análogo a uma sequência de números reais: é uma aplicação de N em R^n , que associa a cada número natural k um ponto a_k de R^n. Na prática usamos também $(a_1, a_2, ..., a_k, ...)$. Diz-se que uma sequência (a_k) é limitada quando existe um real c tal que $|a_k| \leq c$ para todo $k \in N$. Observe que $a_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$. E por conseguinte, todas as sequências das coordenadas são também limitadas. Vale a recíproca também.

Dizemos que um ponto $a \in R^n$ é o limite de uma sequência (a_k) quando, para todo $\varepsilon > 0$, temos um $k_0 \in N$ tal que $k > k_0 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$. Ou seja, $\lim a_k = a$ se, e somente se, $\lim |a_k - a| = 0$. Uma sequência que tem limite diz-se que é convergente. De modo análogo ao que fizemos em R, define-se sequência de Cauchy em R^n. Em palavras mais comuns, isso significa que se n cresce a distância entre os termos da sequência diminui. Propriedades análogas às das sequências em R valem para as sequências em R^n, como a unicidade do limite e o teorema de Bolzano-Weierstrass: “Toda sequência limitada em R^n tem uma subsequência convergente.” Com isso podemos definir conjunto compacto de modo análogo ao que fizemos em R. Dizemos, pois, que um conjunto $D \subset R^n$ é compacto quando toda sequência (x_k) em D tem uma subsequência convergente em D. Essa definição vale também para os espaços métricos em geral.

Diz-se que um Espaço Métrico M é **completo**, quando toda sequência de Cauchy de pontos de M é convergente em M. É o caso de R e dos espaços euclidianos R^n, com as métricas usuais. Já os espaços métricos Q e Q^n , com as métricas usuais, não são completos.

Um subconjunto D de M é **denso** em M quando todo ponto de M é limite de uma sequência de pontos de D. Quando um espaço métrico tem um subconjunto denso enumerável, então ele é denominado de **Espaço Separável**. Os espaços métricos R e R^n são separáveis, pois Q é denso em R e Q^n é denso em R^n. Quando o espaço vetorial, munido de um produto interno, é completo em relação

à norma definida por esse produto interno, ele é denominado de **Espaço de Hilbert**. Os espaços euclidianos R^n, munidos do produto interno usual e da norma euclidiana decorrente, são exemplos desses espaços. De modo mais preciso e formal, quando falamos de produto interno em um espaço vetorial real V, estamos supondo a definição dada a seguir.

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função $\langle , \rangle$: V x V $\rightarrow R$, que associa a cada par ordenado de vetores x, $y \in$ V um número real $\langle x , y \rangle$, chamado o produto interno de x por y, satisfazendo às seguintes condições:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $z \in V$;
3. $\langle kx, y \rangle = k\langle x, y \rangle$, $k \in R$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A partir do produto interno define-se a norma $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, que é chamada de norma proveniente ou decorrente do produto interno. A chamada norma euclidiana de R^n, que vimos anteriormente, ela é proveniente do produto interno usual $\langle x, y \rangle = x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + \cdots + x_n . y_n$ que implica $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Em um espaço vetorial com produto interno valem a desigualdade de Cauchy-Shwarz e a desigualdade triangular, isto é, $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ e $|x + y| \leq |x| + |y|$. E dizemos que dois vetores x e y são ortogonais quando $\langle x, y \rangle = 0$. Também se verifica a conhecida lei do paralelogramo: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$, que decorre diretamente da norma $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ e da definição de produto interno. Observe que $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. O nome dela provém da interpretação geométrica dada no plano R^2 dotado da norma euclidiana: a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos seus lados. Verifique também a validade do Teorema de Pitágoras $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, quando x e y são ortogonais. Observe que a função F : V → R definida pelo produto interno F(x) = $\langle x, b \rangle$, em que b é um vetor fixo de V e $x \in V$, é uma transformação linear.

Prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se y for nulo a desigualdade é satisfeita. Suponhamos, pois y não nulo. Temos $\langle x - ky, x - ky \rangle = |x|^2 - 2k\langle x, y \rangle + k^2|y|^2 \geq 0$. Fazendo B = $\langle x, y \rangle$ e C = $|y|^2$ obtemos $|x|^2 - 2kB + k^2C \geq 0$. Como B e C são números reais e C > 0, então podemos colocar k = B/C para obter $C|x|^2 - 2B^2 + B^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y|^2|x|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$.

Outra prova da Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Sejam u e v vetores unitários de um dado espaço vetorial real com produto interno. Então $|u| = |v| = 1$. Por outro lado, $|u - v|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \langle u - v , u - v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2\langle u, v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 \geq 2\langle u, v \rangle \Leftrightarrow 2 \geq 2\langle u, v \rangle$, o que equivale a $\langle u, v \rangle \leq 1$. (*)

Agora sejam u, v vetores não nulos. Observe que se u ou v for nulo, vale a desigualdade $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \geq |\langle x, y\rangle|$.

Como u/$|\boldsymbol{u}|$ e v/$|\boldsymbol{v}|$ são unitários, então usando (*) obtemos (u/$|\boldsymbol{u}|$) . (v/$|\boldsymbol{v}|$) ≤ 1, que é equivalente a $\langle u, v\rangle \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. E se trocarmos u por – u, teremos - $\langle u, v\rangle \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. Logo $|\langle u, v\rangle| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$.

Prova da desigualdade triangular

$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2\langle x, y\rangle$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $|\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2|x||y| = (|y|^2 + |x|^2)^2$.

Logo $|x + y|^2 \leq (|y|^2 + |x|^2)^2$, que equivale a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Espaço ℓ^2

Um exemplo de espaço de Hilbert que tem dimensão infinita é o espaço das sequências de quadrado somável . Ele é formado por todas as sequências (x_k) de números reais tais que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty$, com o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k . y_k$ e a norma decorrente dele $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$, que é uma generalização “natural” da norma euclidiana. Comumente esse espaço é denotado por ℓ^2. Exemplos de sequências que pertencem a esse espaço: A) as sequências que têm um número finito de termos não nulos como (1, 4, 15, 35, 40, 0,0, 0 , ...) ; B) as progressões geométricas infinitas de razão q tal que $|q| < 1$ como (1, ½, ¼, 1/8,...,1/2^n, ...); a sequência (1, ½, 1/3, ¼,...,1/n,...). Por outro lado a sequência (1, $1/\sqrt{2}$,$1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{4}$, ...,$1/\sqrt{n}$,...) não pertence a ℓ^2, pois a série harmônica não é convergente, como mostramos no capítulo 1.

Além de ser um espaço de Hilbert, ℓ^2 também é um espaço separável, pois ele tem o subconjunto enumerável denso, que é formado pelas sequências de ℓ^2 com todos os termos racionais, sendo quase todos iguais a zero, com exceção de um número finito deles. Uma descrição mais detalhada e acessível do espaço ℓ^2, como espaço de Hilbert, você encontra no capítulo 7 da referência [Lima, 2005].

Mais à frente, no último capítulo, veremos uma bela relação entre séries de Fourier e espaços de Hilbert similares ao espaço ℓ^2,

Sobre a vida e obra do grande matemático David Hilbert(1862-1943) você pode encontrar boas informações na Wikipédia, em outros links disponíveis na web ou dialogando com uma IA generativa.

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Os conceitos relacionados à continuidade de funções $f: D \subset R^n \to R$ são análogos aos de funções $f: D \subset R \to R$, em que D é um conjunto aberto de R. Em R^n definimos uma **bola aberta** B ⊂ Rⁿ, com centro em P e raio r, assim: B = { X ∈ Rⁿ ; $|X - P|$ < r }. E se B = { X ∈ Rⁿ ; $|X - P| \leq$ r }, dizemos que B é uma **bola fechada** de Rⁿ. Perceba que em uma bola fechada B, toda sequência de pontos (X_n) que converge em R^n tem limite L ∈ B. Isso se deve ao fato de que lim $|X_n - P| = |L - P| \leq$ r.

Um conjunto $D \subset R^n$ é **fechado** em R^n quando toda sequência de pontos de D que converge em R^n tem limite em D. Por outro lado, um $D \subset R^n$ é **aberto** em Rⁿ quando seu complementar Rⁿ – D é fechado em Rⁿ. Observe que toda bola fechada de Rⁿ é um conjunto fechado, assim como toda bola aberta é um conjunto aberto. Rⁿ é fechado, pois toda sequência convergente de pontos dele tem limite nele. Logo o seu complementar, ∅, é aberto. Mas isso implica que R^n também é aberto, o que , por sua vez, implica que ∅ é fechado. Portanto, R^n e ∅ são fechados e abertos simultaneamente. Perceba que um conjunto aberto é uma generalização de uma bola aberta e um conjunto fechado é uma generalização de uma bola fechada. E evidentemente uma bola aberta em Rⁿ é uma generalização de um intervalo aberto em R. Um resultado interessante que pode ser provado em Rⁿ, é: “a interseção de um número finito de abertos é um aberto; e a união de um número infinito(ou finito) de abertos é um aberto também; a interseção infinita(ou finita) de fechados é um fechado e a união finita de fechados é um fechado.”

Naturalmente, surge a indagação: e a interseção de um número infinito de abertos é também um aberto? Pense na seguinte situação: seja $B_k(a)$ uma bola aberta de raio 1/k, k natural, com centro em a. Então $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k(a) = \{a\}$, que é fechado.

Uma função f : D ⊂ Rⁿ → R é dita **contínua** em um ponto a de D se, e somente se, para toda sequência de pontos a_k ∈ D com lim $a_k = a$, tem-se lim f(a_k) = f(a). Dizemos que f : D ⊂ Rⁿ → R é contínua em D, quando f é contínua em todos os pontos de D. Verifica-se que a soma, o produto e o quociente(denominador não nulo) de funções contínuas são contínuas. Todas as funções constantes são contínuas. E toda função linear f : Rⁿ → R é contínua. De um modo geral, uma função linear de Rⁿ em R tem a sua lei na forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$, em que $k_1, \ldots, k_n$ são constantes reais. É uma generalização natural da função linear f : R → R dada por f(x) = kx. O limite de uma função f : D ⊂ Rⁿ → R em um ponto de acumulação a de D define-se de modo análogo ao que fizemos com funções de R → R.

Uma propriedade que generaliza a sua análoga para funções de uma variável real é a seguinte:

“Toda função contínua f : D ⊂ Rⁿ → R, definida no compacto D, atinge seus valores máximo e mínimo em pontos de D.” Essa propriedade é comumente chamada de **teorema de Weierstrass.** Ele foi demonstrado no capítulo 2 para o caso de D ⊂ R. Esse teorema vale para Espaços Métricos em geral. Sua demonstração pode ser feita com a mesma argumentação que foi feita para o caso real. Vejamo-la.

Prova do Teorema de Weierstrass:

Devemos provar que o conjunto K $\subset R$ das imagens de f é compacto, isto é, que toda sequência (y_n) de pontos de K tem uma subsequência que converge em K. Como $f: D \to$ K é sobrejetiva, então podemos escolher uma sequência (x_n) em D tal que $f(x_n) = y_n$. Como D é compacto, então existe uma subsequência (z_m) de (x_n) que tem limite z em D. Mas f é contínua em D, logo $f(z)$ é limite da sequência $f(z_m)$ em K. Concluímos, assim, que K é compacto em R e por conseguinte, tem máximo e mínimo.

Define-se em um espaço métrico M a distância entre dois subconjuntos não vazios X e Y, assim:

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y); x \in X \; e \; y \in Y\}.$$

Decorre dessa definição que $d(X,X) = 0$ e $d(X,Y) = d(Y,X)$. Também é claro que se X $\cap Y \neq \emptyset$, então $d(X,Y) = 0$. E a recíproca dessa afirmativa é verdadeira? Pense em intervalos abertos disjuntos. Qual a distância entre Z e R – Q no espaço métrico R?

Derivada parcial de uma função de D $\subset$ R^n em R

Considere a função f : R^2 → R, definida por f(x,y) = x^2 + y^2 + 3. Se considerarmos y constante, então f se comportará como se fosse uma função apenas da variável x: g(x) = x^2 + y^2 + 3. Assim teríamos a função derivada g'(x) = 2x. De modo análogo, se considerarmos x constante, então podemos considerar f como uma função apenas de y, h(x) = x^2 + y^2 + 3, cuja derivada é dada por h'(x) = 2y. Esses tipos especiais de derivadas relacionadas com a função f de várias variáveis é que chamaremos de derivadas parciais de f.

Ou seja, de um modo geral, denominamos de **derivada parcial** de uma função f: R^2 → R em um ponto (x, y) de R^2 em relação a x, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, à derivada "usual" de f em relação x, considerando y constante. E , de modo análogo, define-se $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. No caso anterior, temos pois $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ = 2x e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$.

De um modo mais formal, seja $f: D \subset R^2 \to R$ uma função definida no aberto D. Então definimos as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0) de D como segue.

Derivada parcial de f em relação x no ponto (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0};$$

Derivada parcial de f em relação y no ponto (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

É fácil perceber que este conceito pode ser generalizado para funções de n variáveis reais. Por exemplo, considere a função g : R^3 → R, definida por g(x, y, z) = x^3 - 4y^2 + 2z^4 + 3. Temos, pois, que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ = 3x^2, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -8y$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 8z^3$.

A derivada parcial de uma função de várias variáveis reais goza de propriedades análogas às principais propriedades das derivadas de uma função de uma variável, tais como as regras das derivadas da soma, do produto e do quociente.

Vimos antes, que um ponto crítico de uma função real de uma variável é um ponto em que a derivada é nula. No caso de uma função de várias variáveis f : R^n → R dizemos que um ponto P é **ponto crítico** de f quando todas as derivadas parciais de f são iguais a 0 em P. Por exemplo, vamos determinar os pontos críticos da função definida por f(x, y z) = $x^4 + y^2 + 3z^2$. Igualando as deridas parciais a 0, obtemos: x = 0, y = 0 e z = 0. Logo, o único ponto crítico de f em R^3 é (0, 0, 0).

E o que seria a derivada de uma função f : D ⊂ R^2 → R, sendo D um aberto em R^2 ?

A Derivada de uma função F: R^2 → R^2

Considere uma função F de R^2 em R^2 , definida por $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Dizemos que F é diferenciável em um ponto $P = (a,b)$ se existe uma transformação linear J: R^2 → R^2 tal que

$$\lim_{H\to 0} \frac{F(P+H) - F(P) - J(H)}{|H|} = 0,\ H \in R^2.$$

A transformação linear J é única e é denominada a derivada de F em P. Essa transformação linear na base canônica de R^2 é representada pela chamada matriz jacobiana de F, que tem a forma:

$$J = J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, a jacobiana da função $F(x,y) = (x^2y,\ y^3x)$ é $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$. No ponto P = $(1,2)$, temos $J_F(1,\ 2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$. A derivada de F é a transformação linear J(x, y) = (4x + y, 8x + 12y).

Essa definição pode ser generalizada para funções **F: R^m → R^n.**

No caso particular da pergunta feita antes, referente a uma função f : D ⊂ f: R^2 → R, está claro agora o que significa. A derivada de f é a transformação linear J de R^2 → R definida pela jacobiana $J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, que pode ser vista como um vetor. Exemplo: Se f(x, y) = $2xy^2$, então $J_f(x,y) =$ ($2y^2$, 4xy). No ponto P = (2, 1) teremos $J_f(2,1) =$ (2, 8). Neste ponto a derivada é a transformação linear J de R^2 → R , definida por J(x, y) = 2x + 8y.

Como medimos volumes em R^n?

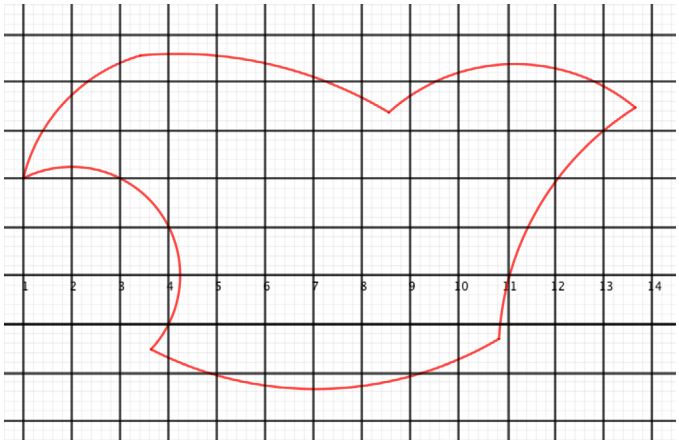
Para facilitar a compreensão, suponhamos que n = 2. Seguindo o modelo que construímos para o comprimento em R vamos construir uma medida(de área) para R^2.

Suponhamos que L é uma σ-álgebra de subconjuntos X de R^2 em que definimos uma medida μ com as duas propriedades seguintes.

P1. Se X é um retângulo definido por um dos produtos cartesianos [a, b] x [c, d] ou (a, b) x (c, d) de R^2, então sua medida(área) é dada pelo produto (b – a).(d – c).

P2. Se X não satisfaz à P1, então $\mu(X) = \inf \mu\{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$, onde os E_n são retângulos abertos(ou fechados) disjuntos(ou quase disjuntos) dois a dois e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ representa a união de qualquer sequência de E_n, que seja uma cobertura(enumerável) de X, isto é, $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

A figura a seguir ilustra duas coberturas de uma região fechada do plano R^2, uma feita com quadrados maiores e outra com quadrados menores. Essas coberturas retratam as “boas” coberturas que nossas crianças fazem usando o papel quadriculado para medir a área de uma “região curva” do plano. Elas são “boas”, porque seus quadradros só se intersectam nas arestas, não têm pontos interiores comuns, são quase disjuntos.



De maneira análoga, definimos o volume em R^3. O trabalho aqui de adequação é o de trocar quadrados por cubos e retângulos por blocos retangulares. E no caso geral de R^n definimos um cubo aberto como o produto cartesiano de n intervalos abertos limitados e de mesmo comprimento.

Uma medida construída dessa forma é uma medida de Lebesgue. E a $\sigma - algebra$ associada é chamada de $\sigma - algebra\ de\ Lebesgue.$

Decorre dessa construção da família L que todo conjunto $E \subset R^n$, pertencente a L, tem **medida(de Lebesgue) nula** quando $\inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} m(Q_i)\} = 0$, o que equivale a dizer que existe uma sequência de cubos abertos (Q_i) que cobrem E e $\sum_{i=1}^{+\infty} m(Q_i) < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Por exemplo, um conjunto enumerável de pontos de R^n tem medida nula. Também conjuntos, como as fronteiras(união de suas faces) de cubos, têm medida nula para $n \geq 3$. Perceba que essa formalização está em total sintonia com a nossa intuição sobre ponto, reta, plano e espaço tridimensional da geometria euclidiana tradicional, onde aprendemos que ponto tem comprimento(medida) nulo, segmento de reta tem área(medida) nula e face de um cubo tem volume(medida) nulo.

COMPRIMENTO DE UM ARCO E CURVA PARAMETRIZADA

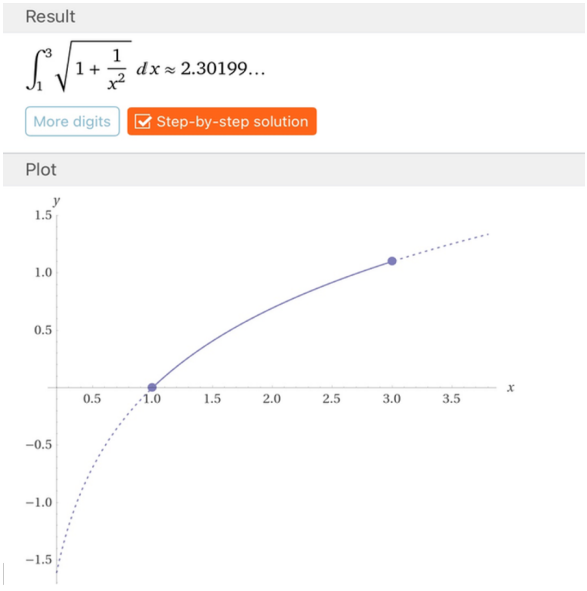
Seja $f:[a,b]\to R$ uma função contínua que tem derivada contínua em $[a,b]$. Tomemos uma partição regular P de $[a,b]$ dada por $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$; e seja g a função poligonal associada a P. Então o comprimento da poligonal, gráfico de g, é dado por $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$, que é a soma dos comprimentos de todos os segmentos dessa poligonal. Essa soma é uma aproximação do comprimento de arco do gráfico de f. Usando o teorema do valor médio de Lagrange temos que $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(w_i)(\Delta x_i)$. Substituindo isso no somatório teremos $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f'(w_i))^2(\Delta x_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i$. Pelo teorema da aproximação poligonal existe o limite $\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i$, pois a função $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ é contínua em $[a,b]$. Logo podemos definir o comprimento de arco s do gráfico de f no intervalo $[a,b]$ como

$$s=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Em muitas situações é conveniente "parametrizarmos" uma curva do plano (R^2) por uma função de um intervalo real em R^2. Por exemplo, a função g(t) = (t, t^2) de R em R^2 parametriza a curva "parábola" que é gráfico da função quadrática f(x) = x^2 de R em R. É comum se chamar a função g de curva parametrizada e o conjunto imagem de g de traço da curva g. O que fizemos acima sobre o comprimento de arco foi adotar a variável independente x como parâmetro da curva parametrizada. É uma espécie de "parametrização natural" de uma curva que seja gráfico de uma função y = f(x). Basta definir a função g(x) = (x, f(x)) como a curva parametrizada. Normalmente vai acontecer de termos a parametrização na forma g(t) = (x(t), y(t)). Nesta forma, se g é derivável e tem derivada contínua g'(t) = (x'(t), y'(t)) não nula, então o comprimento de arco dela fica assim:

$s=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'(v_i)]^2+[y'(w_i)]^2}\,\Delta t_i=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{|g'(t)|}\,dt$, onde $|g'(t)|$ é o módulo do vetor que representa a derivada de g.

Por definição, a derivada de uma função g : D $\subset R\to R^2$, definida por g(t) = (x(t), y(t),) é g'(t) = (x'(t), y'(t)), que representa o vetor tangente ou vetor velocidade da curva parametrizada g no ponto (x(t), y(t)). Por exemplo, o vetor velocidade da curva g(t) = (t, t^2) é g'(t) = (1, 2t) e seu módulo é $|g'(t)|=\sqrt{|1+4t^2|}$. Em t = 1 temos g'(1) = (1, 2). Esse conceito se generaliza para funções do tipo g : D $\subset R\to R^n$. Como a integral de comprimento de arco tem raiz quadrada, normalmente sua expressão em termos de funções elementares, através de uma forma fechada, é rara. Isso mostra porque precisamos focar e destacar os métodos e teorias de aproximação em Matemática e outras ciências. Você pode operar com esses conceitos usando WolframAlpha ou Geogebra. Veja um exemplo com o WolframAlpha, em que é feito o cálculo do comprimento do arco da curva logarítmica natural no intervalo [1, 3].



QT-48. Prove que se a_1, a_2, a_3, ..., a_n são números reais positivos e se b_1, b_2, b_3, ..., b_n é uma reordenação de a_1, a_2, a_3, ..., a_n, então vale a desigualdade: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$.

QT-49. Provar que para todo triângulo retângulo se cumpre a desigualdade $h \leq (1 + \sqrt{2})r$, em que h é a altura relativa à hipotenusa e r é o raio do incírculo.

QT-50. Uma caixa de água em forma de um paralelepípedo reto-retângulo foi projetada para um condomínio fechado de centenas de casas, em Teresina. As dimensões, em metros, dessa caixa se expressavam por 1/x, 4/y e 9/z, em que x + y + z = 1. Além disso, a soma dessas dimensões tinha valor mínimo. Qual a capacidade dessa caixa?

QT-51. (**Romenia, 2007**). Sejam a, b e c números reais positivos tais que $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1$. Prove que $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

QT-52. Seja M um ponto do interior do retângulo ABCD de área S. Demonstrar que $S \leq AM.CM + BM.DM$.

QT-53. (**Irã, 2007**). Se a, b e c são três números reais diferentes, prove que $\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1$.

QT-54. Demonstrar que para quaisquer números reais x, y, z, vale a desigualdade

$$-\frac{3}{2} \leq \text{senx.cosy} + \text{seny.cosz} + \text{senz.cosx} \leq \frac{3}{2}.$$

QT-55. (**IMO – 1981**) Seja P um ponto do interior de um triângulo ABC. Sejam D, E e F os pés das perpendiculares de P aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Achar o ponto P que minimiza a soma

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

QT-56. Resolver a equação sen x + 2sen(2x) = 3 + sen(3x).

TEOREMA DE PTOLOMEU

Seja ABCD um quadrilátero inscritível. Então vale a seguinte igualdade:

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

PROVA:

Considere a figura a seguir. Em virtude de ABCD ser inscritível temos que A + C = B + D = π. Logo cosC = - cosA e cosB = - cosD. Devemos provar que: m.n = a.c + b.d. Usando o teorema dos cossenos podemos afirmar:

$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad.cosA$ e $n^2 = b^2 + c^2 + 2bc.cosA$ (1)
$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cosB$ e $m^2 = c^2 + d^2 + 2cd.cosB$. (2)

Multiplicando as equações de (1) por bc e ad, respectivamente, e adicionando-as, obtemos:

$(ad + bc)n^2 = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad = (ab + cd)(ac + bd)$

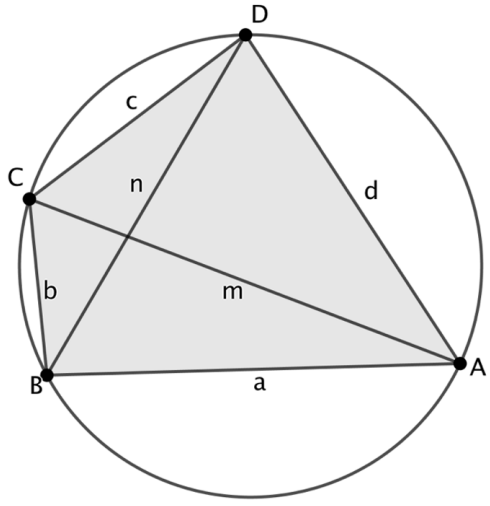
$\Leftrightarrow n^2 = (ab + cd)(ac + bd)/(ad + bc)$ (3)

De modo análogo, obtemos de (2):

$(ab + cd)m^2 = (ad + bc)(ac + bd)$

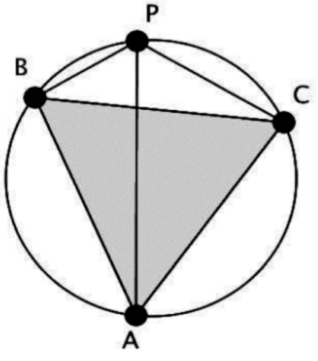
$\Leftrightarrow m^2 = (ad + bc)(ac + bd)/(ab + cd)$. (4)

De (3) e (4) encontramos:
$m^2n^2 = (ac + bd)^2 \Leftrightarrow mn = ac + bd$, pois são fatores positivos.

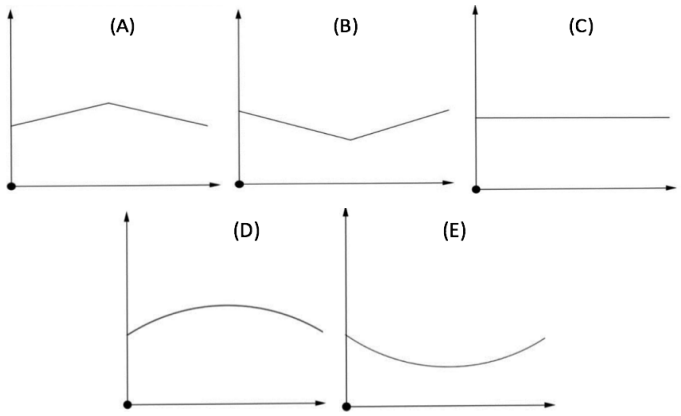


Obs.: Decorre da divisão, membro a membro, das igualdades (3) e (4), uma propriedade bem conhecida: n/m = (ab + cd)/(bc + cd).

QT-57. **[JNCF]** Um ponto luminoso P, de uma placa de propaganda, se desloca, periodicamente, ao longo de um arco BC de uma circunferência, na qual está inscrito um triângulo equilátero com luminosidade fixa, conforme ilustrado na figura a seguir.



O arco BC, em que o ponto P se move, não passa por A. Considere a relação definida por $M = \frac{AP}{BP + PC}$, em que AP, BP e PC são as medidas dos segmentos indicados. Quando P vai de B a C, qual o gráfico cartesiano que melhor representa a variação de M, no eixo-y, em função do comprimento do arco BP, no eixo-x?



▶ **Resp.:** C.

QT-58) [JNCF]. Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em uma circunferência W. Seja P um ponto de W tal que B e P estejam em lados opostos da reta AC. Prove que PA + PC = $\sqrt{3}$ PB.

NOTA:

Os resultados das duas últimas questões podem ser generalizados para um polígono regular de n lados da seguinte maneira:

"Sejam A, B e C três vértices consecutivos de um polígono regular de n lados e circuncírculo W. Se P é um ponto de W tal que os pontos B e P estejam em lados opostos da reta AC, então vale a igualdade PA + PC = 2PB.cos(π/n)."

Verifique que se n = 3, então PA + PC = PB. E no caso de n = 4, obtemos:

PA + PC = $\sqrt{2}$PB . Para provar isso basta usar o T. de Ptolomeu no quadrilátero ABCP e mostrar que AC = 2AB.cos(π/n).

QT-59. (**IMO– 1991**). Seja P um ponto do interior do triângulo ABC. Mostre que ao menos um dos ângulos $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ é menor do que ou igual a 30º.

QT-60. (**IME-2013/2014**). Sejam p o semiperímetro de um triângulo, S sua área, r e R os raios de suas circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente. Demonstre que vale a seguinte desigualdade

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} S \leq r \cdot R \leq \frac{2p^2}{27}$$

Resolução:

Vamos dividir em duas partes a nossa resolução. Uma parte para cada uma das desigualdades incluídas na expressão da tese da questão.

1ª parte) Prova de $\frac{2\sqrt{3}}{9}S \leq r.R$.

Para provar essa desigualdade vamos aplicar a seguinte propriedade: **De todos os triângulos inscritos em um mesmo círculo L de raio R, os equiláteros têm perímetro máximo.**

Seja P o semi-perímetro de um triângulo equilátero inscrito em L. Então seu perímetro é 2P = $3\sqrt{3}$R. Ou seja P = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ R. E sendo S = pr para qualquer triângulo inscrito, segue pela propriedade citada que

S = pr ≤ Pr = $\frac{3\sqrt{3}}{2}R.r$, que equivale a $\frac{2}{3\sqrt{3}}S \leq R.r \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9}S \leq r.R$.

2ª parte) Prova de $r.R \leq \frac{2p^2}{27}$.

Sabemos que $S = \frac{abc}{4R} = pr$, que implica R = $\frac{abc}{4pr}$. Por outro lado, 2p = a + b + c. Usando MA ≥ MG, obtemos

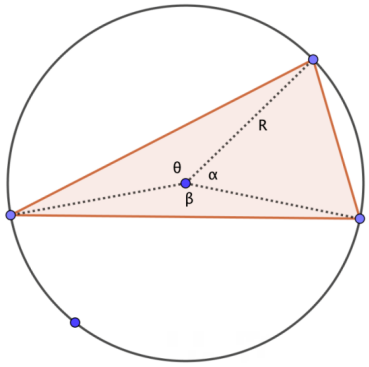
$abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3 = \frac{(2p)^3}{27} = \frac{8\,p^3}{27}$.

Usando tudo isso, deduzimos que r.R = $\frac{abc}{4p} \leq \frac{\left(\frac{8p^3}{27}\right)}{4p} = \frac{2p^2}{27}$, donde se conclui que r.R ≤ $\frac{2p^2}{27}$.

Prova da Propriedade usada na 1ª parte:

Dado um triângulo T, inscrito no círculo L de centro O e raio R, suponhamos, sem perda de generalidade, que O esteja no interior de L. Então podemos traçar raios de O para cada um dos vértices de T, conforme ilustra a figura a a seguir. O perímetro de T pode ser expresso assim:

2p = 2R($sen(\frac{\alpha}{2}) + sen(\frac{\beta}{2}) + sen(\frac{\theta}{2})$).



Pela desigualdade MQ ≥ MA, temos que $\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sen\left(\frac{\beta}{2}\right)+sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3} \leq \sqrt{\frac{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3}}$.

O valor máximo da soma $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sen\left(\frac{\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ocorre quando $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$, o que implica $\alpha = \beta = \theta$ = 120º. Logo o perímetro máximo ocorre quando T é equilátero e seu valor é $3\sqrt{3}$ R.

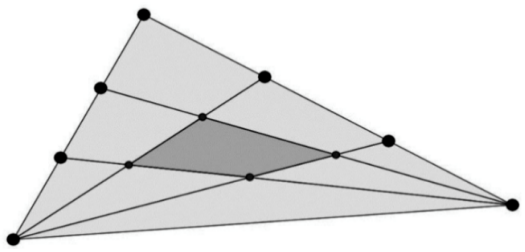
NOTA:

1) Como consequência dessa propriedade temos a desigualdade $a + b + c \leq 3\sqrt{3}\,R$, em que a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer inscrito em um círculo de raio R.

2) Caso o centro O não esteja no interior do triângulo T, podemos fazer uma translação adequada do mesmo para que isso seja possível, mantendo T dentro de L, já que nesse caso T estaria contido em um dos semicírculos de L e, por conseguinte, o seu maior lado seria menor do que um diâmetro de L. Reveja o tópico acima "Polígono inscrito de área máxima".

3) No caso especial do centro O ser o ponto médio de um dos lados do triângulo T, teríamos que seu maior perímetro seria $(2 + 2\sqrt{2})R$, quando ele é isósceles. Mas o perímetro do triângulo equilátero inscrito é $3\sqrt{3}\,R$ e $3\sqrt{3} > 5 > 2 + 2\sqrt{2}$.

QT-61. [JNCF] Na região central de uma praça triangular se construiu um jardim elevado em forma de um quadrilátero. Para se delimitar a região coberta pelo jardim, procedeu-se assim: foram divididos dois lados da praça em três partes iguais e ligados os pares de pontos de divisão, de cada um desses lados, ao vértice oposto, conforme mostra a figura.



Que fração da área da praça, mede a área da região ocupada pelo jardim elevado?

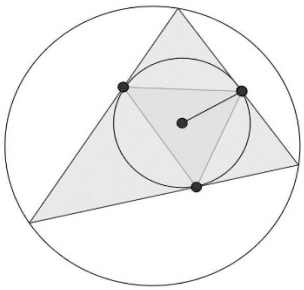
QT-62. Seja ABC um triângulo qualquer. Se CFG é o triângulo mediano de ABC, então prove que a área de CFG é ¾ da área de ABC. Prove ainda que o triângulo mediano de CFG é semelhante a ABC na razão ¾.

NOTA:

Denominamos de **triângulo mediano** de ABC ao triângulo cujos lados são congruentes, de modo respectivo, às medianas de ABC.

QT-63. Prove que se um triângulo ABC é semelhante ao seu triângulo mediano, então ele é equilátero. Nesse caso, qual a razão da semelhança?

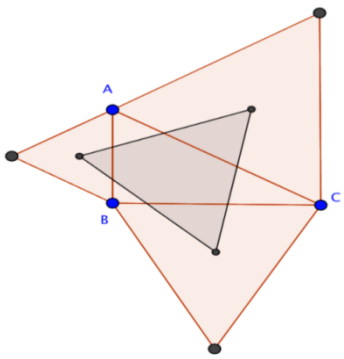
QT-64. [JNCF] Um artista deseja pintar um painel com a repetição de um mesmo padrão geométrico. Esse padrão é formado assim: dentro de um disco circular é inscrito um triângulo com o seu círculo inscrito e, dentro deste, é desenhado o triângulo que tem vértices nos três pontos de tangência, como ilustrado na figura a seguir.



Sabendo-se que a razão entre as áreas dos dois triângulos desenhados é 6 e que o raio do círculo inscrito é de 12 cm, qual é o diâmetro do disco circular?

A) 30 cm
B) 36 cm
C) 72 cm
D) 96 cm
E) 144 cm

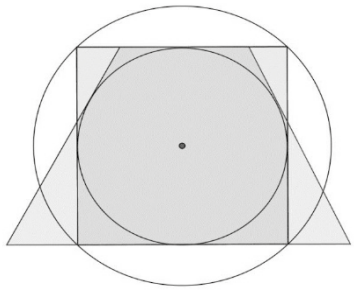
QT-65. [JNCF] Um desenhista gráfico recebeu uma proposta para projetar um banner para um Encontro de Geometria Elementar, no qual estudantes de Ensino Médio apresentariam seus trabalhos usando o programa GeoGebra de Geometria Dinâmica. E a sugestão dada pela coordenação do evento foi uma ilustração do Teorema de Napoleão. De acordo com ele, se sobre os lados de um triângulo ABC qualquer são construídos triângulos equiláteros, então os baricentros desses triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero também. Denomina-se esse triângulo equilátero de **Triângulo de Napoleão**. A figura a seguir ilustra esse teorema. Suponha-se que o triângulo ABC seja retângulo em B, AB = 3cm e BC = 4cm. Qual o valor, em cm, mais aproximado da medida de um lado do **Triângulo de Napoleão** correspondente?



A) 4
B) 3
C) 2,5
D) 2
E) 1,5

▶ **Resp.:** (D)

QT-66. [JNCF]. Um círculo M está inscrito em um quadrado Q e também em um trapézio T. Um outro círculo K está circunscrito ao quadrado Q. A figura a seguir ilustra um caso possível dessa situação.



Designemos por [T∩K] a área da intersecção de T com K, por [Q] a área de Q e por [T] a área de T. Comparando essas áreas, mostre que é verdadeira a seguinte condição: [Q] ≤ [T∩K] ≤ [T].

QT-67. (**China Mathematical Competition, 2005**). ΔABC está inscrito em uma circunferência unitária. As três bissetrizes dos ângulos A, B e C são extendidas até intersectarem a circunferência em A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Então calcule o valor de

$$\frac{AA_1\cos\left(\frac{A}{2}\right)+BB_1\cos\left(\frac{B}{2}\right)+CC_1\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{senA\ +\ senB\ +\ senC}.$$

QT-68. (**China Mathematical Competition, 2005**). A curva representada pela equação

$\frac{x^2}{sen\sqrt{2}-sen\sqrt{3}}+\frac{y^2}{cos\sqrt{2}-cos\sqrt{3}}=1$ é

A) uma elipse com os focos no eixo-x.

B) uma hipérbole com os focos no eixo-x.

C) uma elipse com os focos no eixo-y.

D) uma hipérbole com os focos no eixo-y.

QT-69. Prove que: $sen(x-y)+sen(y-z)+sen(z-x)=-4sen\left(\frac{x-y}{2}\right)sen\left(\frac{y-z}{2}\right)sen\left(\frac{z-x}{2}\right)$.

QT-70. Seja ABC um triângulo qualquer. Prove que ABC é isósceles se, e somente se

$$a\ cosB+b\ cosC+c\ cosA=\frac{a+b+c}{2}.$$

QT-71. (**Irlanda-2003**). Os comprimentos a, b, c dos lados de um triângulo são tais que a + b + c = 2. Prove que

$$1 \le ab + bc + ca \le 1 + \frac{1}{27}.$$

QT-72. (**Romênia-2003**). Prove que em qualquer triângulo ABC vale a seguinte desigualdade

$\frac{1}{m_bm_c}+\frac{1}{m_cm_a}+\frac{1}{m_am_b}\le\frac{\sqrt{3}}{s}$, em que S é a área do triângulo e m_b, m_b, m_c são os comprimentos das medianas.

QT-73. (**JNCF**). Seja K um polígono convexo regular de n lados, inscrito em um círculo de raio R. Se L e S são, respectivamente, o perímetro e a área de K, prove que:

1) S = $\frac{n}{2}\left[R^2.sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$.

2) $L^2 = 4nS.tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

NOTA(Comprimento da circunferência)

Observe que (1) implica $S/\pi = R^2\left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right]$. Veremos no início do próximo capítulo que $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1$. Logo $\lim_{n\to+\infty}\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = 1$.

Segue disso que $\lim_{n\to+\infty}\frac{S}{\pi} = R^2$. Esse valor limite de S, πR^2, é a área do círculo de raio R. Por outro lado, de (2) obtemos que $\frac{L^2}{\pi} = 4S\frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$. Passando ao limite, deduzimos que $\lim_{n\to+\infty}\frac{L^2}{\pi} = 4\pi R^2$, pois $\lim_{n\to+\infty}\frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}.\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 1.1 = 1$.

Logo, quando $n \to +\infty$, $\frac{L^2}{\pi} = 4\pi R^2$ ou $L^2 = 4\pi^2R^2$, o que nos leva a $\boldsymbol{L = 2\pi R}$, que é o perímetro do círculo de raio R ou o comprimento da circunferência de raio R.

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA POLÍGONOS CONVEXOS

Seja K um polígono convexo de n lados, com área S e perímetro L. Então vale a seguinte desigualdade: $4\pi S \le L^2$, que é conhecida como desigualdade isoperimétrica para polígonos. Além disso, a igualdade só ocorre quando o polígono convexo é substituído pela circunferência de comprimento L. Noutras palavras, a circunferência de mesmo perímetro L tem área máxima.

Sabe-se que dentre todos os polígonos convexos de mesmo perímetro, o de maior área é o polígono regular. Para provar isso, basta essencialmente usarmos o seguinte resultado já provado anteriormente: "Dentre todos os triângulos ABC de mesma base AB e de mesmo perímetro 2p, o de maior área é o isósceles." Verifique com isso que quando substituirmos dois lados de comprimentos distintos a e b por dois lados congruentes de comprimento comum (a + b)/2 aumentaremos a área do polígono convexo.

Admitindo isso, basta provarmos a desigualdade isoperimétrica para polígonos regulares. De acordo com a nota anterior temos que $\frac{L^2}{\pi} = 4S\frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$. Como no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ temos que f(x) = $\frac{tg\,x}{x}$ é crescente e g(x) = $\frac{\pi}{x}$ é decrescente, então a composta h(x) = f(g(x)) = $\frac{tg\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}$ é decrescente também. Para verificar essa última afirmação basta calcular as derivadas f'(x) e g'(x). Sendo h(x) decrescente em $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{tg\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$ = 1, deduzimos que $\frac{L^2}{\pi} \ge 4S$, o que equivale a $4\pi S \le L^2$. Por outro lado, seja R o raio de um círculo C cuja circunferência tem comprimento igual a L = 2 πR. Então a área de C é $S_C = \pi R^2 = \pi(\frac{L}{2\pi})^2 = \frac{L^2}{4\pi}$. Como $\frac{L^2}{4\pi} \ge S$, para todo polígono regular de perímetro L, então concluímos que a circunferência de mesmo perímetro tem área máxima($S_C \ge S$).

Faremos no final do capítulo 5 uma demonstração da desigualdade isoperimétrica para curvas mais gerais, usando curvas parametrizadas.

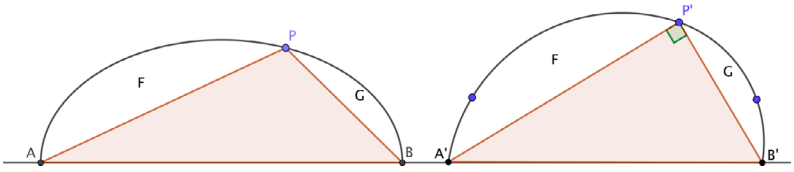
Uma alternativa, relativamente simples de resolução do problema isoperimétrico, usando apenas geometria plana, é a que apresentamos a seguir. Vamos formular esse problema na seguinte forma:

Dada uma região convexa D do plano cuja fronteira é uma curva fechada contínua de comprimento L, o círculo é o que tem área máxima.

Usaremos a seguinte proposição anteriormente demonstrada: "Dentre todos os triângulos com dois lados de medidas fixas, o de área máxima é o triângulo retângulo cujos catetos são esses lados."

Vamos dividir a demonstração em duas partes. Na primeira provaremos o seguinte: Suponha que a fronteira de D é formada de uma curva w de comprimento m e um segmento de reta AB, sendo A e B os extremos de w. Se D tem área máxima, então D é um semicírculo.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que D não seja um semicírculo. Então existe, pelo menos um ponto P em w tal que APB não seja um triângulo retângulo. Como D é convexa, o triângulo APB está contido em D. Consideremos agora o triângulo retângulo A'P'B' de catetos A'P' = AP e P'B' = PB. Pela proposição citada acima temos que A'P'B' tem área maior do que APB. Com a construção do triângulo APB a região D ficou decomposta em três partes: APB e as duas partes delimitadas por AP e w e por PB e w, respectivamente. Ou seja, D = APB $\cup F \cup G$. Por outro lado, temos D' = A'P'B' $\cup F \cup G$ que tem como fronteira uma curva w' de mesmo comprimento m com extremos em A'B' unida com esse segmento. Porém D' tem área maior do que D. A figura a seguir ilustra essa argumentação.



No caso de w' não ser convexa podemos substituí-la por uma convexa com extremos A' e B' e com área maior. Portanto, D é um semicírculo.

Usaremos a primeira parte para provar a proposição original. Suponhamos, por contradição, que D não seja um círculo e tenha área máxima. Escolhamos dois pontos A e B da fronteira de D tais que o comprimento da parte da fronteira que liga A e B seja igual a L/2. Assim, o segmento AB divide a região D em duas partes de área máxima. Mas como D não é um círculo, então uma das partes tem área máxima e não é um semicírculo, o que contraria a primeira parte.

QT-74. (**JNCF**). Seja W qualquer polígono convexo de n lados, circunscrito a um dado círculo L. Prove que W tem área mínima somente quando W é regular.

QT-75. (**JNCF**). Podemos construir um triângulo cujas alturas tenham as seguintes medidas: 2, 4 e 5? Justifique sua resposta.

QT-76. (**JNCF**). Sejam h_a, h_b e h_c, respectivamente, as alturas correspondentes aos lados de medidas $a, b\ e\ c$ de um triângulo ABC. Se $a \leq b \leq c$, então prove que

$$h_c > \frac{h_a . h_b}{h_a + h_b}.$$

QT-77. (**JNCF**). Em um triângulo qualquer ABC, m_a, m_b e m_c são as medidas das suas três medianas. Prove que $m_a < m_b + m_c$.

QT-78. Achar todos os pontos de coordenadas racionais (x, y) que estão no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

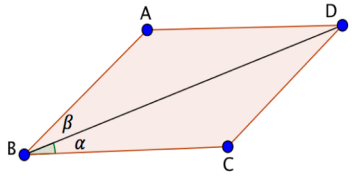
QT-79. (IME-1975/1976). Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por A, B e C. São dados:

$$tg\left(\frac{B}{2}\right) = m \text{ e } tg\left(\frac{C}{2}\right) = n.$$

A) Determine $tg\left(\frac{A}{2}\right)$ em função de m e n, especificando a condição a ser imposta ao produto mn para que o triângulo ABC exista.

B) Determine o valor do produto mn, para que o lado oposto ao ângulo A seja igual à média aritmética dos outros dois lados.

QT-80. (**ITA-1977- Adaptado**). Sejam d e L, respectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD a seguir. Conhecendo-se os ângulos α e β, o comprimento x do lado AB é igual a



A) $\frac{d\ cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. **B)** $\frac{d\ sen\alpha}{sen(\alpha+\beta)}$. **C)** $\frac{L\ sen\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. **D)** $\frac{L\ cos\alpha}{sen(\alpha+\beta)}$. **E)** $\frac{L\ tg\alpha}{sen(\alpha+\beta)}$.

QT-81. (**ITA- 2010**). O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in$ R, é igual a

A) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$.

B) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

C) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

D) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

E) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

QT-82. Calcular os valores de $sen(\frac{\pi}{12})$ e de $sen(\frac{\pi}{24})$.

QT-83. Calcular os valores de: $2sen(\frac{\pi}{8})$, $2sen(\frac{\pi}{16})$ e $2cos(\frac{\pi}{32})$.

QT-84. Prove as identidades:

$2sen\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2cosx}}}}$ e $2cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2cosx}}}}$, para $x \in [0,\pi]$ e $n \in N$.

QT-85. (**ITA-2014/2015**). Seja n um inteiro positivo tal que $sen(\frac{\pi}{2n}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

A) Determine n.

B) Determine $sen(\frac{\pi}{24})$.

QT-86. (**IME- 1987/1988**).Demonstre a identidade

$$tg^2x + cotg^2x = 2\left(\frac{3+cos4x}{1-cos4x}\right).$$

QT-87. (**IME- 1987/1988**). Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de k = a + b – c.

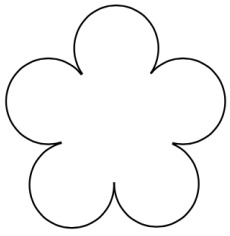
QT-88. (**IME- 1992/1993**). Resolva a equação sen x – cosx = sen2x – cos2x – 1.

QT-89. (**IME- 2008/2009**). (Bulgarian Mathematical Olympiad, Regional round, 2004). Seja M o centroide de ΔABC. Prove que

A) $\cot g(A\widehat{M}B) = \frac{BC^2 + CA^2 - 5AB^2}{12S}$. Obs.:S = área de ΔABC

B) $\cot g(A\widehat{M}B) + \cot g(B\widehat{M}C) + \cot g(C\widehat{M}A) \le -\sqrt{3}$

QT-90. (**IME- 2012/2013**). Considere a figura a seguir formada por arcos de circunferência tangentes cujos centros formam um pentágono regular inscritível em uma circunferência de raio R. O perímetro da figura é



A) $\frac{7\pi R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

B) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10+\sqrt{5}}$.

C) $\frac{7\pi R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

D) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

E) $\frac{7\pi R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

QT-91. (**IME- 2013**). Considere $P = \prod_{k=0}^{45}\left[1+tg\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]$, com $\prod_{k=0}^{n}$ representando o produto dos termos desde k = 0 até k = n, sendo k e n números inteiros. Determine o(s) valor(es) de m, número real, que satisfaça(m) a equação $P = 2^m$.

QT-92. (**ITA- 2015**). Sejam α e β números reais tais que α, β, α + β ∈]0, 2π[e satisfazem as equações

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3}+\frac{3}{7}.$$

Então, o menor valor de cos(α + β) é igual a:

A) –1. **B)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D)** $-\frac{1}{2}$. **E)** 0.

QT-93. (**IME- 2012/2013**). Assinale a alternativa que apresenta o mesmo valor da expressão

$$[4\cos^2(9^o) - 3][4\cos^2(27^o) - 3].$$

A) sen (9º). **B)** tg (9º). **C)** cos (9º). **D)** sec (9º). **E)** cossen (9º).

QT-94.(**IME- 2015/2016**). Determine o conjunto solução da equação: (senx)[1 + (tgx)tg(x/2)] = 4 – cotg x.

QT-95. (**AIME2 – 2000**). Achar o menor inteiro positivo n tal que

$$\frac{1}{sen45^o sen46^o}+\frac{1}{sen47^o sen48^o}+\cdots+\frac{1}{sen133^o sen134^o}=\frac{1}{sen\, n^o}.$$

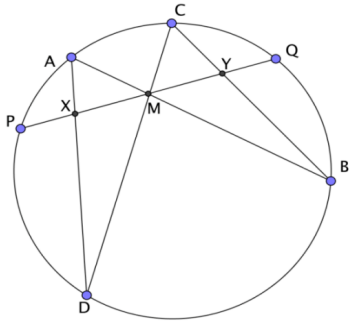
QT-96. Seja ABC um triângulo acutângulo com área K. Prove que $\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

QT-97. (**Putnam-2003**). Achar o valor mínimo de | sen x + cos x + tan x + cotg x + sec x + cossec x| , para x real.

QT-98. (**USAMO-2002**). Seja ABC um triângulo tal que $\left[cotg\left(\frac{A}{2}\right)\right]^2+\left[2cotg\left(\frac{B}{2}\right)\right]^2+\left[3cotg\left(\frac{C}{2}\right)\right]^2=\left(\frac{6s}{7r}\right)^2$, em que s e r são seu semiperímetro e seu inraio, respectivamente. Prove que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo T cujos lados têm comprimentos inteiros que não possuem um fator comum. Determine esses inteiros.

QT-99. (**USAMO-1996**). Prove que a média dos números 2sen2°, 4sen4°, 6sen6°, ..., 180sen180°, é cotg 1°.

QT-100. (**Teorema da Borboleta**). Através do ponto médio M de uma corda PQ de um círculo, são traçadas duas outras cordas AB e CD. As cordas AD e BC intersectam PQ nos pontos X e Y. Então M é ponto médio de XY. Prove esse teorema com a ajuda da figura a seguir.



QT-101. [**AMC12 1999**] Em um triângulo ABC, 3senA + 4cosB = 6 e 4senB + 3cosA = 1.

Achar a medida do ângulo C.

▶ **Res**p.: C = 30º.

QT-102. Em um triângulo ABC, A – B = 120º e R = 8r. Achar cosC.

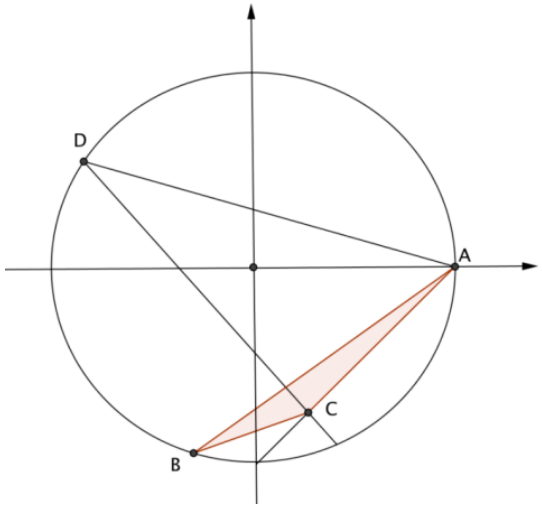
▶ **Res**p.: 7/8.

QT-103. Prove que cos $1^{\circ}15'$ é um número irracional.

QT-104. (**IMO-1986, lista curta**). Seja ABCD um tetraedro tal que a soma das arestas opostas seja igual a 1. Prove que $r_A + r_B + r_C + r_D \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, onde r_A, r_B, r_C, r_D são os inraios das faces, a igualdade valendo somente se ABCD é regular.

QT-105. [**Russia 2003, by Nazar Agakhanov**]. Achar todos os ângulos α para os quais os três elementos do conjunto S = { senα, sen2α, sen3α} são iguais aos do conjunto T = {cosα, cos2α, cos3α}.

QT-106. Considere, na circunferência $x^2 + y^2 = 1$, o arco horário AB de medida $\theta > 0$, como mostrado na figura a seguir. Sabendo que DC é perpendicular a AC e que o ângulo ADC mede 30º, calcule a área S da região triangular ABC em função de θ.

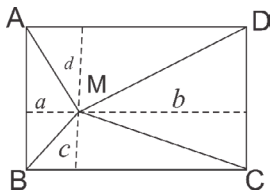


$AM = \sqrt{a^2 + d^2}, CM = \sqrt{b^2 + c^2}$

$BM = \sqrt{a^2 + c^2}, DM = \sqrt{b^2 + d^2}$

$AM \cdot CM + BM \cdot DM = \sqrt{a^2 + d^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}$ (1)

$S = (a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$ (2)



QT-107. Prove a seguinte desigualdade $(sen^2 x)^{cos^2 x} + (cos^2 x)^{sen^2 x} \leq 1 + \frac{1}{2} sen^2 2x$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-T(2)

DRN-T49:

Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter b + c ≤ a$\sqrt{2}$. A seguir use duas fórmulas de área do triângulo para obter a conclusão.

DRN-T50:

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

(x + y + z)($\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$) = (($\sqrt{x}$)^2 + ($\sqrt{y}$)^2 + ($\sqrt{z}$)^2)($\frac{1}{(\sqrt{x})^2}+\frac{2^2}{(\sqrt{y})^2}+\frac{3^2}{(\sqrt{z})^2}$) ≥(1 + 2 + 3)^2 = 36.

A igualdade ocorre se e só se $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, com x + y + z = 1.

Logo: x = 1/6, y = 1/3 e z = ½. Disso se conclui que a capacidade da caixa é 6.12.18 m^3 = **1296 m^3**.

Um outro caminho de resolução, inclusive mais simples, é usando o Princípio Mínimo de Engel:

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2^2}{y}+\frac{3^2}{z}\geq\frac{(1+2+3)^2}{x+y+z}=\frac{6^2}{1}=36.$$

A igualdade implica $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{z}$, que nos leva a y = 2x e z = 3x. Logo x = 1/6, y = 1/3 e z = ½.

E, por conseguinte, V = 36/xyz =36^2 = 1296.

DRN-T51:

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$(a+b+c)(a+b+c^2)\geq(a+b+c)^2\Rightarrow\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{1}{a+b+1}.$$

De modo análogo, obtemos também:

$$\frac{b+c+a^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{1}{b+c+1},\frac{a+c+b^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{1}{a+b+1}.$$

Disso e da hipótese segue que $\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}+\frac{b+c+a^2}{(a+b+c)^2}+\frac{a+c+b^2}{(a+b+c)^2}\geq 1.$

Isso implica $2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2\geq(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$

Disso segue que $2(a+b+c)\geq 2(ab+bc+ca)$, que equivale a $a+b+c\geq ab+bc+ca.$

DRN-T52:

Esbocemos uma figura representativa. Dela obtemos, usando o teorema de Pitágoras:

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\begin{cases} ac+db\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+b^2} \\ ad+bc\leq\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}\end{cases}$ (3)

Por (1), (1) e (3) concluímos: $S\leq AM\cdot CM+BM\cdot DM$

DRN-T53:

Coloque na forma $|x+y+z| > 1$, verifique que $|xy+yz+zx| = 1$ e use a desigualdade

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

DRN -T54:

Uma questão bem adequada para se aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Faça: u = (senx, seny, cosx) e v = (cosy, cosz, senz).

DRN-T55:

Fazendo x = PD, y = PE e z = PF, a expressão a ser minimizada fica na forma a/x + b/y + c/z e temos que 2(AB**C)** = ax + by + cz.

Pondo a = $\sqrt{\frac{a}{x}}.\sqrt{ax}$, b = $\sqrt{\frac{b}{y}}.\sqrt{by}$ e c = $\sqrt{\frac{c}{z}}.\sqrt{cz}$, podemos usar a desigualdade de Cauchy-Shwarz para obter: **$(a + b + C)^2 \leq (a/x + b/y + c/z)(ax + by + cz)$**.

Disso segue: $a/x + b/y + c/z \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}$ e a igualdade só ocorre quando $x^2 = y^2 = z^2$. Disso segue **x = y = z**, o que implica em P ser o **incentro** de ABC.

Outro caminho de resolução, um pouco mais curto, é usando o Princípio Mínimo de Engel: $a/x + b/y + c/z = a^2/ax + b^2/by + c^2/cz \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}$. A igualdade só ocorre quando a/ax = b/by = c/cz. Logo x = y = z, que implica em P ser o **incentro** de ABC.

DRN-T56:

A equação proposta é equivalente a

sen x + sen(2x) + sen(2x) – sen(3x) = 3

$$\Leftrightarrow 2sen\left(\frac{3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2sen\left(\frac{-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x}{2}\right)=3$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\frac{3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Shwarz, tem-se:

$$\frac{3}{2}\leq\sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\left[-sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}\cdot\sqrt{sen^2\left(\frac{3x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq 1\cdot\sqrt{sen^2\left(\frac{3x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right)}\leq\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}\leq 2 \qquad (IMPOSSÍVEL!)$$

Portanto, o conjunto – solução da referida equação é vazio.

NOTA:

Se na questão anterior acrescentarmos a condição sen(3x) ≥ 0, então podemos ter uma resolução diferente, como a descrita a seguir.

Temos que senx + 2sen(2x) ≤ 3 e 3 + sen(3x) ≥ 3, pois sen(3x) ≥ 0.

Logo a equação dada é equivalente ao sistema:

senx + 2sen(2x) = 3 (1) e 3 + sen(3x) = 3 . (2)

De (2) segue: $3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$.

Como senx ≤ 1 e 2sen(2x) ≤ 2, então (1) implica senx = 1 e se(2x) = 1, que nos leva a $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, com k e n inteiros.

Precisamos verificar se existem k e n inteiros tais que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

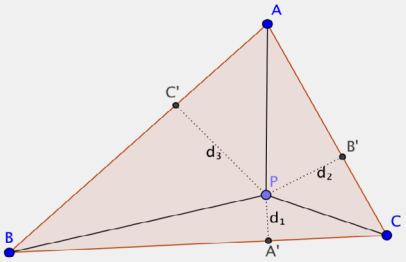
Dessa igualdade decorre: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi = n\pi \Leftrightarrow (1/4 + 2k)\,\pi = n\pi \Leftrightarrow ¼ + 2k = n$.

Mas, isso é absurdo, pois ¼ + 2k não é inteiro.

Concluímos, assim, que o conjunto-solução da equação dada é vazio.

DRN-T59:

1) Um caminho curto e simples para resolver essa questão é usar a Desigualdade de Erdös – Mordell. Em virtude dessa, temos que AP ≥ $2d_3$ ou BP ≥ $2d_1$ ou CP ≥ d_2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que seja AP ≥ $2d_3$. Pondo $x = \angle PAB$, temos que $senx = d_3/AP \leq ½$. Disso segue que x ≤ 30º ou x ≥ 150º. Este último caso implica que um dos outros dois ângulos de ABC é igual ou menor do que 30º, o que conclui a demonstração.

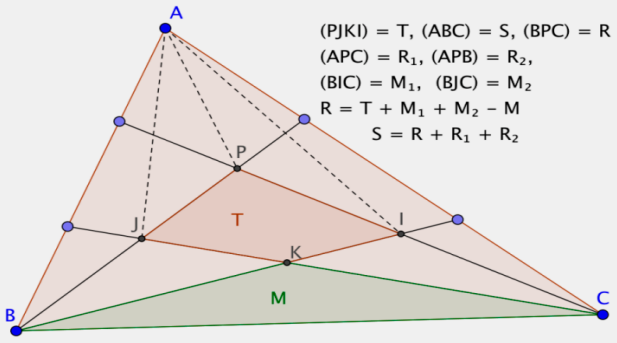


2) Outro caminho, mais longo, procede-se como se segue. Na figura coloque $x = \angle PAB$, $y = \angle PBC$ e $z = \angle PCA$. Então temos: PA.sen x = PB.sen(B – y), PB.sen y = PC.sen(C – z) e PC.sen z = PA.sen(A – x). Disso segue:

$$(\text{sen } x \,.\text{sen } y.\ \text{sen } z)^2 = (\text{sen } x)\ \text{sen}(A - x)(\text{sen } y)\text{sen}(B - y)(\text{sen } z)\text{sen}(C - z). \quad (1)$$

E por transformação produto-soma obtemos: $\text{senx.sen}(A - x) = \frac{\cos(A-2x) - cosA}{2} \leq \frac{1 - cosA}{2} = sen^2\left(\frac{A}{2}\right)$ e suas análogas. Usando esses resultados em (1), encontramos: sen x .sen y. sen z ≤ sen(A/2). sen(B/2).sen(C/2) . E sendo $sen(A/2).sen(B/2).sen(C/2) \leq 1/8$, concluímos que x ou y ou z é igual ou menor do que 30º.

DRN-T61:



1) $S/R = 1 + R_1/R + R_2/R = 2 \Rightarrow$ **$R = S/2$**

2) $S/M_1 = S/M_2 = 1 + 2 + ½ = 7/2 \Rightarrow$ **$M_1 = M_2 = 2S/7$**

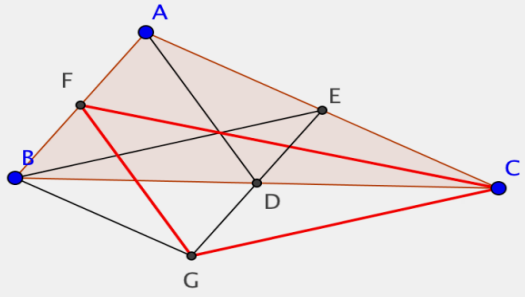
3) $S/M = 1 + 2 + 2 = 5 \Rightarrow$ **$M = S/5$**

4) $R = S/2 = T + M_1 + M_2 - M \Rightarrow S/2 = T + 2S/7 + 2S/7 – S/5$

5) $½ = T/S + 2/7 + 2/7 – 1/5 \Rightarrow$ **$T/S = 9/70$**

DRN-T62:

Faça a construção indicada na figura a seguir, na qual BE//CG e BG//EC. O triângulo CFG é o triângulo mediano de ABC, pelo caso LLL. Verique que AD ≡ FG. Para calcular a área de CFG use o trapézio ABGC com o fato: (CFG) = ½(ABGC). Para provar a segunda parte, verifique, usando o teorema de Tales e o caso LAL de semelhança de triângulos, que as medianas do triângulo CFG são paralelas aos lados de ABC.



DRN-T63:

Usar a lei dos cossenos para obter as medianas e ordenar os lados do triângulo. Em seguida aplicar a condição de semelhança.

DRN-T64:

Utilizar fórmulas de área do triângulo e lei dos senos.

▶ **Resp.:** C.

DRN-T67:

Fazer uma figura ilustrativa e recordar ângulo inscrito para obter $AA_1 = 2sen\left(B + \frac{A}{2}\right)$.

A seguir aplicar transformações produto/soma.

Veja que $2sen\left(B + \frac{A}{2}\right)\cos(\frac{A}{2})$ = senC + senA.

▶ **Resp.:** 2.

Obs.: Questão semelhante caiu na prova do IME de 2010/2011.

DRN-T68:

É preciso mostrar que os denominadores são positivos e quem é o maior deles. Usando transformações soma-produto obtemos: $sen\sqrt{2} - sen\sqrt{3} = 2sen(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2})cos(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$.

Como $\frac{\pi}{2} < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} < \pi$ e $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, então $sen\sqrt{2} - sen\sqrt{3} > 0$. Por outro lado, $\sqrt{2} < 1{,}5 < \frac{\pi}{2}$ e $\sqrt{3} > 1{,}7 > \frac{\pi}{2}$, então $sen(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2})$ e $cos(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$ são negativos.

Logo $cos\sqrt{2} - cos\sqrt{3} > 0$. A curva é pois uma elipse.

Para determinar o eixo maior precisamos comparar os denominadores.

Sejam a = $sen\sqrt{2} - sen\sqrt{3}$ e b = $cos\sqrt{2} - cos\sqrt{3}$. Então usando transformações soma-produto, temos: a – b

$$= 2sen\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) + 2sen\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)sen\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2sen\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)[cos\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) + sen\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)]$$

$$= 2sen\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)[cos\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)]$$

$$= 2sen\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)[2cos\frac{\pi}{4}cos(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4})].$$

Sendo $0 < \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, então a – b < 0 ⇔ **a < b.**

Concluímos, assim, que **a elipse tem os focos no eixo-y.**

▶ **Resp.:** C.

DRN-T69:

Usar transformação soma-produto e arco duplo.

DRN-T70:

Primeiro use a lei dos senos para chegar na forma

$2senA\ cosB + 2senB\ cosC + 2senC\ cosA = senA + senB + senC$. Observe que $senA = sen(B + C)$.

Depois transforme essa na seguinte: $sen(A - B) + sen(B - C) + sen(C - A) = 0$. Por fim use o resultado de QT-69.

DRN-T71:

Mostre que essa desigualdade é equivalente a $0 \leq (1 - A)(1 - B)(1 - C) \leq 1/27$ e prove, usando adesigualdade triangular estrita que a < 1, b < 1 e c < 1. Por fim , use MA ≥ MG.

DRN-T72:

Sabemos que a área do triângulo mediano é $S_m = 3S/4$. Usando isso transformamos a desigualdade dada na forma equivalente

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{m_a m_b m_c} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4\,S_m}.$$

Apliquemos agora ao triângulo mediano a propriedade: De todos os triângulos inscritos em um mesmo círculo L de raio R, os equiláteros têm perímetro máximo. Isso equivale a $m_a + m_b + m_c \leq 3\sqrt{3}R$, em qual R é o raio da circunferência circunscrita. Disso segue $\frac{m_a + m_b + m_c}{m_a m_b m_c} \leq \frac{3\sqrt{3}R}{m_a m_b m_c}$. Mas $S_m = \frac{m_a m_b m_c}{4R}$, então $\frac{m_a + m_b + m_c}{m_a m_b m_c} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4\,S_m}$.

Comentário:

Um ponto interessante a salientar é que usando a lei dos senos se obtém de a + b + c $\leq 3\sqrt{3}\,R$ outra desigualdade: senA + senB + senC $\leq 3\sqrt{3}/2$, em que A, B e C são os ângulos internos de um triângulo ABC. Essa desigualdade pode ser também deduzida a partir da desigualdade de Jensen, que se relaciona com a convexidade dos gráficos das funções reais, como veremos no final do capítulo sobre polinômios. Ela pode ser deduzida usando, apenas, relações trigonométricas. Que lição podemos tirar dessas **aproximações** de caminhos, aparentemente, distintos, relacionados a tópicos diferentes? É como comentamos na introdução: o conhecimento está conectado em rede dentro de rede, por isso podemos encontrar caminhos muito distintos que se cruzam em alguns pontos, revelando mistério e beleza da realidade descrita matematicamente.

Perceba ainda que usando MA ≥ MG podemos deduzir uma nova desigualdade:

$$3\sqrt[3]{senA.senB.senC} \leq senA + senB + senC \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow senA.senB.senC \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Quanto mais avançarmos na compreensão da visão das Aproximações Multifárias, mais descobriremos novas relações e, portanto, novos conhecimentos, sobre tópicos já conhecidos.

DRN-T74:

Veja QT-66. Lembre-se de traçar a circunferência circuncrita ao polígono regular para fazer a comparação.

DRN-T76:

Sabemos que área de ABC é $(ah_a)/2 = (bh_b)/2 = (ch_c)/2$. (1)

Disso e da hipótese $a \leq b \leq c$, obtemos que $h_c \leq h_b \leq h_a$.

Por outro lado, pela desigualdade triangular temos que: $c < a + b$. Logo $\frac{1}{c} > \frac{1}{a+b}$. (2)

Mas de (1) deduzimos: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{\frac{c\,h_c}{h_a} + \frac{c\,h_c}{h_b}} = \frac{h_a h_b}{c\,h_c h_b + c\,h_c h_a}$. (3)

Combinando (2) e (3), encontramos: $\frac{1}{c} > \frac{h_a h_b}{ch_c h_b + ch_c h_a} \Leftrightarrow \mathbf{h_c > \frac{h_a h_b}{h_b + h_a}}$.

DRN-T77:

Faça uma construção duplicando as medianas e a seguir compare com os lados.

DRN-T78:

Observe que (-1, 0) é um desses pontos. Seja t um racional qualquer, então y = t(x + 1) passa por (-1, 0) e tem declividade t. A seguir substitua esse valor genérico de y em $x^2 + y^2 = 1$ e resolva a equação resultante, obtendo os valores de x e y em função de t.

Outro caminho mais direto, usando o ciclo trigonométrico, é o seguinte: (x, y) = $(cos\alpha, sen\alpha) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, em que $t = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. E como $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ assume todos os valores reais, então t pode ser qualquer número racional, o que implica x e y serem racionais. Portanto, todos os pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de coordenadas racionais são os pontos da forma $(x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, com $t \in Q$.

DRN-T79:

A) Como $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}$, então $tg(\frac{A}{2}) = cotg(\frac{B+C}{2}) = \frac{1}{tg(\frac{B+C}{2})} = \frac{1 - tg(\frac{B}{2}).tg(\frac{C}{2})}{tg(\frac{B}{2}) + tg(\frac{C}{2})} = \frac{1 - mn}{m+n}$.

Como $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}$ e $\frac{C}{2}$ são agudos, então suas tangentes são positivas: m > 0, n > 0 e $tg(\frac{A}{2}) > 0$. Disso segue: mn > 0 e $\frac{1-mn}{m+n} > 0$, que implica 0 < mn < 1.

Portanto, $tg(\frac{A}{2}) = \frac{1-mn}{m+n}$ e $0 < mn < 1$.

B) Sejam a, b e c as medidas dos lados opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente. Desjamos calcular mn com a condição: 2a = b + c. Usando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = \frac{b+c}{senB + senC} = \frac{2a}{senB + senC} \Rightarrow 2senA = senB + senC \quad (1)$$

Mas $senA = sen(\pi - (B+C)) = sen(B+C) = 2sen(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B+C}{2})$

e por transformação soma-produto temos que $senB + senC = 2sen(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B-C}{2})$.

Então por (1), obtemos:

$4sen(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B+C}{2}) = 2sen(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B-C}{2}) \Leftrightarrow 2\cos(\frac{B+C}{2}) = \cos(\frac{B-C}{2}) \Leftrightarrow \cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2}) = 3\,sen(\frac{B}{2})sen(\frac{C}{2}) \Leftrightarrow 1/3 = tg(\frac{B}{2})tg(\frac{C}{2})) = mn.$

Concluímos, pois, que para a + b = 2a, tem-se que **mn = 1/3**.

DRN-T80:

Use a lei dos senos.

▶ **Resp.:** (B).

DRN-T81:

Usar transformação produto/soma e simplificar.

▶ **Resp.:** (A).

DRN-T82:

Use $\cos(\frac{\pi}{6})$ e $1 - 2sen^2x = cos2x$.

▶ **Resp.:** $sen(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ e $sen(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$.

DRN-T83:

Use $\cos(\frac{\pi}{4})$ e $1 - 2\text{sen}^2x = \cos 2x$ para obter $\text{sen}(\frac{\pi}{8})$.

DRN-T84:

Use as fórmulas: $2sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{2 - 2cosx}$ e $2cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{2 + 2cosx}$.

Obs.: Verifique que para $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos as fórmulas:

$2sen\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}$ e $cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}$, ambas com n radicais.

E depois resolva a questão anterior com essas fórmulas.

DRN-T85:

Use $\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2x$ para obter n = 6 e depois $sen(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$.

DRN-T86:

Desenvolver os dois membros para chegar à identidade.

DRN-T87:

Usar a lei dos cossenos e a fórmula $2S = ab.\text{sen}C$ para chegar em $(k + c)^2 - c^2 = 2ab(1 + \cos C)$.

▶ **Resp.:** $c = \frac{2S(1+cosC)}{ksenC} - \frac{k}{2}$.

DRN-T88:

Fatorar.

▶ **Resp.:** $x = q + 2k\pi$, com $k \in Z$ e $q \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

DRN-T89:

A) Usar leis dos cossenos, fórmula da mediana e fórmula de área de ΔABC.

B) Use (A) para obter que a soma das cotangentes é $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\ S$. Veja a dica da QT-22.

DRN-T90:

Esboce o pentágono regular de lado m com vértices nos centros dos cinco arcos(de 2 $\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$ = 252°) de circunferências de raio r.

O perímetro desejado é P = $5(\frac{7\pi}{5}r) = 7\pi r.$ Observe que m = 2r = 2R sen36°.

Sabemos que cos36° = cos($\frac{\pi}{5}$) = $\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Logo sen($\frac{\pi}{5}$) = $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ e, por conseguinte, r = R($\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$). Então o perímetro procurado é

P = $7\pi R\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right) = \frac{7\pi R}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$

▶ **Resp.:** (E).

DRN-T91:

Use tg(a + b) e verifique que ao multiplicarmos os termos equidistantes dos extremos obtemos um produto da forma (1 + tga)(1 + tgb), com a + b = $\frac{\pi}{4}$.

▶ **Resp.:** m = 23.

DRN-T92:

Muita atenção no intervalo]0, 2π[ao resolver as equações.

▶ **Resp.:** (B).

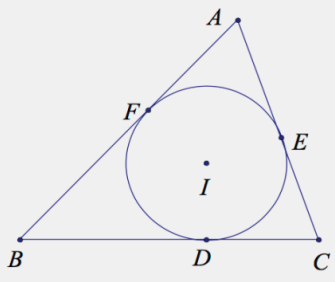
DRN-T93:

Use $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$ e ângulos complementares.

▶ **Resp.:** (B).

DRN-T94:

Use $\sin x = 2\sin(x/2).\cos(x/2)$ e $2\sin^2(x/2) = 1 - \cos x$ para transformar a equação em $tg^2x - 4tgx + 1 = 0$.



▶ **Resp.:** S = { $x \in R$; $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$ }

DRN-T95:

Use $sen1^o = sen$ [(x + 1)° – x°] para obter $\frac{sen1^o}{senx^o\ sen(x+1)^o} = cotgx^o - cotg(x+1)^o$.

A seguir multiplique ambos os lados da equação dada por sen1° para concluir que sen n° = sen 1°.

▶ **Resp.:** n = 1.

DRN-T96:

Lembrar de $2K = ab.senC$ e de $acosB + bcosA = c$.

DRN-T97:

Designando a = sen x, b = cos x e c = a + b, obtemos: $c^2 - 1 = 2ab$,

$c = senx + \cos x = \sqrt{2}sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ e, em consequência disso, c está no intervalo $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

A expressão dada em função de c fica na forma F = $|c + \frac{2}{c^2-1} + \frac{2c}{c^2-1}|$. Observando que $\frac{2}{c^2-1} = \frac{1}{c-1} - \frac{1}{c+1}$ e $\frac{2c}{c^2-1} = \frac{1}{c-1} + \frac{1}{c+1}$, então **F = $|c + \frac{2}{c-1}|$.**

Mas $c + \frac{2}{c-1} = c - 1 + \frac{2}{c-1} + 1$. Agora podemos usar MA ≥ MG para avaliar o valor de F no caso de c – 1 > 0. Tem-se que **F ≥ $2\sqrt{2}$ + 1.**

Se c – 1 < 0, multiplicamos $c - 1 + \frac{2}{c-1} + 1$ por - 1 e colocamos F na forma F = $|1 - c + \frac{2}{1-c} - 1|$. Como 1 – c > 0, então podemos aplicar MA ≥ MG, para encontrar: **F ≥ $2\sqrt{2}$ - 1.**

Logo o mínimo provável é $2\sqrt{2} - 1$. Provemos que existe c tal que F = $2\sqrt{2} - 1$. A igualdade MA = MG ocorre quando 1 – c = $\frac{2}{1-c}$. Disso vem a equação $c^2 - 2c - 1 = 0$, que tem as raízes reais 1 – $\sqrt{2}$ e 1 + $\sqrt{2}$. Mas apenas 1 – $\sqrt{2}$ está no intervalo $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$. Portanto, o mínimo é $2\sqrt{2}$ – 1, que corresponde a c = 1 – $\sqrt{2}$.

DRN-T98:

Faça u = $cotg\left(\frac{A}{2}\right)$, v = $cotg\left(\frac{B}{2}\right)$ e w = $cotg\left(\frac{C}{2}\right)$. Com o auxílio da figura a seguir deduza que u = $\frac{s-a}{r}$ e s/r = u + v + w. A partir disso reescreva a igualdade dada para chegar em $(3u - 12v)^2 + (4v - 9w)^2 + (18w - 2u)^2 = 0$. No processo de fatoração para obter a última expressão, é útil observar que 72 = 2(4 x 9)= 2(3 x 12) = 2(2 x 18). Finalmente obtenha a proporção: a/13 = b/40 = c/45, a qual implica na semelhança do triângulo ABC com um triângulo T de lados medindo 13, 40 e 45, que não possuem um fator comum.

DRN-T99:

2sen(2k)°$sen1°$ = cos(2k – 1)° – cos(2k + 1)° e $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

DRN-T100:

Trace as projeções ortogonais de X e Y sobre as cordas AB e CD. Com isso obtém-se 4 pares de triângulos semelhantes. Use potência de um ponto para chegar na conclusão. Para desenvolver de forma mais simples, use letras minúsculas para denominar as medidas de alguns segmentos que irão formar as proporções relevantes.

Passos principais da resolução:

Por hipótese PM = MQ. Faça PM = k, PX = x, QY = y, MX = a e MY = d. Disso segue x = k – a e y = k – d. Queremos chegar em a = d. Usando potência de um ponto podemos escrever: x(k + a) = AX.XD e y(k + d) = CY.YB. Isso implica $\frac{k^2 - a^2}{k^2 - d^2} = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB}$.

Usando as semelhanças indicadas deduz-se que $\frac{k^2 - a^2}{k^2 - d^2} = \frac{a^2}{d^2}$, o que equivale a $\frac{a^2}{d^2}$ = 1.

Logo a = d.

DRN-T101:

Eleve ao quadrado ambas as igualdades e some. Exclua o caso C = 150⁰.

DRN-T102:

Pela lei dos senos deduzimos que 2p = 2R(senA + senB + sen**C)** e abc = 8R³(senA.senB.senC). Dividindo uma pela outra obtém-se: $\frac{senA.senB.senC}{senA + sen\,B + senC} = \frac{abc}{2p4R^2}$. Usando pr = abc/4R e R = 8r, tem-se:

$$\frac{senA.senB.senC}{senA + sen\,B + senC} = \frac{pr}{16pr} = \frac{1}{16}.$$

Aplicando transformação soma/produto e fórmula de arco-duplo chega-se em

$$\frac{senA.senB.(2sen\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right))}{\cos(\frac{C}{2})(1+2sen\left(\frac{C}{2}\right))} = \frac{1}{16}.$$

Observe que $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \cos(60º) = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, temos: 2senA.senB = $\cos(A-B) - \cos(A+B) = \cos C - \frac{1}{2}$ = 1 – 2sen²(C/2) – ½ = (1 – 4sen²(C/2))/2. Logo $\frac{(1-4sen^2\left(\frac{C}{2}\right))sen\left(\frac{C}{2}\right)}{1+2sen\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{1}{8}$, o que nos leva a $\left[1 - 2sen\left(\frac{C}{2}\right)\right] sen\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

Resolvendo essa equação, obtemos sen(C/2) = ¼, o que implica **cosC = 1 – 2sen²(C/2) = 7/8.**

DRN-T103:

Use a seguinte propriedade: “Se x é um ângulo tal que cos2x é irracional, então cosx, senx e tgx também são irracionais.” Essa propriedade é uma consequência das fórmulas de arco-duplo.

DRN-T104:

A soma de todas as arestas é igual a 3. Portanto, esta questão é uma consequência imediata da desigualdade satisfeita por um triângulo de lados a, b e c: $a + b + c \geq 6\sqrt{3}\, r$.

Reveja a questão QT-17.

DRN-T105:

Como S = T, então a soma dos elementos de S é igual à soma dos elementos de T.

Usar transformações soma/produto e concluir que $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

DRN-T106:

Determine as coordenadas de D, usando ângulo inscrito é um raio com extremo em D. Depois use a fórmula $S = \frac{1}{2}ab.sen(x)$.

▶ **Resp.:** $S = \frac{\sqrt{3}+1}{8}(sen\theta - cos\theta - 1)$.

DRN-T107:

Usar a forma mais geral da desigualdade de Bernoulli: $(1+x)^p \leq 1 + px$, para $0 < p < 1$ e $x \geq -1$.

Observe que se $x = \frac{\pi k}{2}$, k inteiro, então a igualdade ocorre.

QT-108. Encontre o mínimo da função $f(x) = \left(\frac{1+sen^2x}{sen^2x}\right)^n + \left(\frac{1+cos^2x}{cos^2x}\right)^n$, em que n é um número natural.

QT-109. Prove que em qualquer triângulo ABC valem as seguintes desigualdades:

A) cosA + cosB + cosC ≤ 3/2

e

B) cosA.cosB.cosC ≤ 1/8.

QT-110. Resolver a equação a seguir, sabendo que x, y, z são números reais.

$$x + y + z + \frac{1}{xy} = \cos(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + cos\sqrt{z} + \cos(xyz).$$

QT-111. Provar que para qualquer triângulo ABC vale a desigualdade $sen^2A + sen^2B + sen^2C \leq \frac{9}{4}$.

QT-112. Resolver, em R, a equação

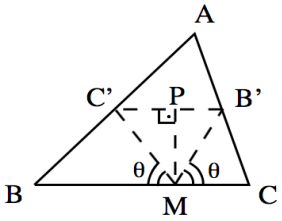
$$(sen^4x + cos^2 2x)\left(\frac{1}{sen^4x} + \frac{1}{cos^2 2x}\right) = 4cos^2\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}\right).$$

QT-113. Resolver, em R, o sistema de equações

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

QT-114. (**IME-1994/1995**). Seja ABC um triângulo qualquer. Por B′ e C′ pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais a θ conforme a figura a seguir.

Demonstre que: cotgθ = $\frac{1}{2}$ (cotgB + cotgC).



QT-115. (**IMO-1966**). Prove a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{sen2x} + \frac{1}{sen4x} + \frac{1}{sen8x} + \cdots + \frac{1}{sen2^n x} = cotgx - cotg2^n x,$$

onde $n \in N$ and $x \notin \frac{\pi Z}{2^k}$ para todo k ∈ N.

Obs.: $\frac{\pi Z}{m}$ = { $\frac{\pi d}{m}$; d ∈ Z e $m \in N$ }.

QT-116. (**IMO-1967, lista longa**). Prove a identidade $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[1 + 2^k \frac{1}{(1-tg^2(x/2))^k}\right] = sec^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) + sec^n x$.

QT-117. (IMO-1967, lista longa). Mostrar que o triângulo cujos ângulos satisfazem a igualdade

$$\frac{sen^2A + sen^2B + sen^2C}{cos^2A + cos^2B + cos^2C} = 2$$

é um triângulo retângulo.

QT-118. (**IMO-1967, lista longa,(a)**). Resolva a equação $sen^3x + sen^3\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + sen^3\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) + \frac{3}{4}cos2x = 0$.

T-119. (**JNCF**). Prove que:

I) $|sen2t| \leq 2|sent|$.

II) $|sen3t| \leq 3|sent|$.

III) $|senkt| \leq k|sent|$, para k ≥ 1, k ∈ Z.

QT-120. (**IMO-1977, lista longa**). Sejam x_1, x_2, ... , x_n (n ≥ 1) números reais tais que $0 \leq x_j \leq \pi$, j = 1, 2, ... , n. Prove que se $\sum_{j=1}^{n}(cosx_j + 1)$ é um inteiro ímpar, então $\sum_{j=1}^{n} senx_j \geq 1$.

QT-121. (**IMO-1977, lista longa**). Dado que $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, prove que

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{2}{3}.$$

QT-122. (**IME- 2009/2010**). Considere a sequência:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}}},\ a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}}}},\ldots$$

determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

QT-123. (ITA-2013). Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(tg\alpha + tg\beta)cos\alpha sen\beta - 2cos^2(\alpha - \beta) = -1 \text{ e}$$
$$\sqrt{3}\, sen(\alpha + \beta) + cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}.$$

QT-124. Veja versão digital deste livro.

QT-125. Prove que a área S de um triângulo ABC, de ângulos internos A, B e C, é dada pela fórmula $S = \frac{R^2}{2}[sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)]$, em que R é o raio do circuncírculo de ABC.

NOTA:

Reveja a questão QT- 31, em que $sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senAsenBsenC$, o que implica senA.senB.senC = $[sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)]/4$.

Vamos construir outro caminho de demonstração da fórmula dada acima.

Para isso, usemos a lei dos senos para obter $\frac{abc}{senA.senB.senC} = (2R)^3 = 8R^3$.

Como $\frac{abc}{4R} = S$, então obtemos $S = 2R^2(senA.senB.senC) = \frac{R^2}{2}[sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)]$.

Veja que $S = 2R^2(senA.senB.senC)$ é mais uma fórmula da área de um triângulo ABC.

Além disso, como qualquer triângulo equilátero tem área máxima em relação a todos os outros triângulos inscritos no mesmo círculo de raio R, temos que $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$, o que nos leva a $2R^2(senA.senB.senC) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$, que equivale a $senA.senB.senC \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

▶ **Resp.:** x = ½ e y = $\sqrt{3}/2$.

QT-126. (ITA-2016). Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $l\sqrt{5}$, em que l é o comprimento da hipotenusa. Se α e β são seus ângulos agudos, com α < β, então sen(β – α) é igual a

A) $5-2\sqrt{5}$. **B)** $-6+3\sqrt{5}$. **C)** $\sqrt{16\sqrt{5}-35}$.

D) $\sqrt{20\sqrt{5}-44}$. **E)** $\sqrt{18\sqrt{5}-40}$.

QT-127. (IMO- 1989, lista curta). Para um triângulo ABC, seja k seu circuncírculo de raio r. As bissetrizes dos ângulos internos A, B e C desse triângulo, intersectam o círculo k nos pontos A', B' e C', respectivamente. Prove a desigualdade $16Q^3 \geq 27r^4P$, em que Q e P são as áreas dos triângulos A'B'C' e ABC, respectivamente.

QT-128. (IMO- 1967, lista longa). Suponha que $tg\alpha$ = p/q, em que p e q são inteiros e q ≠ 0. Prove que o número $tg\beta$, tal que $tg2\beta = tg3\alpha$, é racional somente quando $p^2 + q^2$ é o quadrado de um inteiro.

QT-129. (IME – 2017/2018). Sabendo que $|x| \leq \pi/6$ e que x satisfaz a equação a seguir

$$\frac{3-cosx(4cosx+senx)}{10sen^2x-8senxcosx}=\frac{1}{2},$$

Determine os possíveis valores de x.

QT-130. (Razão áurea e ângulos notáveis) Prove que: $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2\varphi}$, $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\varphi}{2}$ e $tg\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{4\varphi+3}$, em que φ é a razão áurea.

QT-131. (IMO- 1996). Seja ABCDEF um hexágono convexo tal que AB é paralelo a DE, BC é paralelo a EF e CD é paralelo a FA. Sejam R_A, R_C, R_E os raios das circunferências circunscritas aos triângulos FAB, BCD, DEF respectivamente, e seja p o perímetro do hexágono. Prove que

$$R_A+R_C+R_E\geq\frac{p}{2}.$$

RESOLUÇÃO (Rafael Fonteles, Eureka!, nº 11):

Algo nesse problema já nos insinua a usar a trigonometria, você percebe? O fato dele relacionar raio de circunferência circunscrita com lado (que tem a ver com o perímetro) faz-nos lembrar da conhecida lei dos senos, que afirma: dado um triângulo ABC, temos que $\frac{BC}{senA}=\frac{AC}{senB}=\frac{AB}{senC}=2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo dado (como exercício, prove-a). Daí, portanto, podemos agora não mais trabalhar com os raios dos triângulos citados, mas sim com algumas diagonais do hexágono. Isso porque, pela lei dos senos, obtemos que $BF = 2R_A.sen\,F\hat{A}B$, $BD = 2R_C.sen\,B\hat{C}D$, $FD = 2R_E.sen\,D\hat{E}F$ (ou seja, encontramos uma relação entre os raios citados no problema e algumas diagonais do hexágono, o que facilitará o nosso trabalho).

A próxima parte da resolução do problema é a que exige uma maior dose de criatividade por parte do estudante. Vejamos. Prolonguemos os lados paralelos BC e EF do hexágono (vide figura 1). Por A e D tracemos perpendiculares aos lados prolongados, obtendo o retângulo de vértices M, N, P e Q, ilustrados na figura 1. Como MN e PQ são as menores distâncias entre pontos das retas paralelas BC e EF (pois esses segmentos são perpendiculares às mesmas), temos que $BF \geq MN$ e $BF \geq PQ \Rightarrow 2BF \geq MN + PQ \Rightarrow 2BF \geq AM + NA + DP + DQ \Rightarrow 2BF \geq AB.senB + AF.senF + CD.senC + DE.senE$ (**1**), em que sen X denota o seno do ângulo interno de vértice X do hexágono, o qual é igual ao seno do respectivo ângulo externo, pois os mesmos são suplementares.

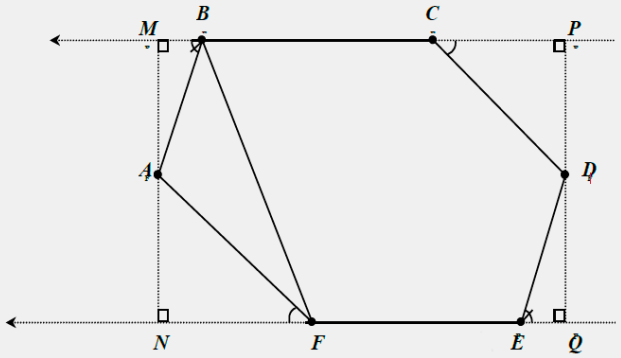


Figura 1

Pela lei dos senos, nós já sabemos que $BF/senA = 2R_A$. Então dividindo ambos os lados da desigualdade (**1**) por senA, obtemos:

$$4R_A \geq AB.\frac{senB}{senA} + AF.\frac{senF}{senA} + CD.\frac{senC}{senA} + DE.\frac{senE}{senA} \quad \text{(I)}$$

E de forma análoga, seguindo os mesmos passos com as diagonais BD e DF do hexágono, obtemos:

$$4R_C \geq BC.\frac{senB}{senC} + CD.\frac{senD}{senC} + AF.\frac{senA}{senC} + EF.\frac{senE}{senC} \quad \text{(II)}$$

$$4R_E \geq AB.\frac{senA}{senE} + BC.\frac{senC}{senE} + DE.\frac{senD}{senE} + EF.\frac{senF}{senE} \quad \text{(III)}$$

E agora, somando (I), (II) e (III), obtemos

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq AB.\left(\frac{senA}{senE} + \frac{senB}{senA}\right) + BC.\left(\frac{senC}{senE} + \frac{senB}{senC}\right) + CD.\left(\frac{senC}{senA} + \frac{senD}{senC}\right) +$$
$$+ DE.\left(\frac{senE}{senA} + \frac{senD}{senE}\right) + EF.\left(\frac{senE}{senC} + \frac{senF}{senE}\right) + FA.\left(\frac{senA}{senC} + \frac{senF}{senA}\right).$$

Agora observe que como os lados opostos do hexágono convexo são paralelos, nós temos que os ângulos opostos do mesmo são congruentes. Assim, nós obtemos: senA = senD; senB = senE; senC = senF.

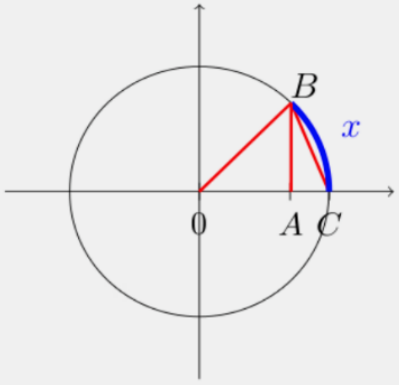
Por conseguinte, nós temos que os fatores que estão multiplicando os lados do hexágono na última desigualdade dada são da forma (z + 1/z), sendo z positivo (pois o seno de um ângulo maior que 0º e menor que 180º é sempre positivo). E é fácil verificar que z + 1/z ≥ 2, para todo z positivo. Assim nós obtemos:

$$4(R_A+R_C+R_E)\geq 2(AB+BC+CD+DE+EF+FA)\Rightarrow 4(R_A+R_C+R_E)\geq 2p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A+R_C+R_E\geq \frac{p}{2}, \text{ concluindo a demonstração.}$$

COMENTÁRIO (Continuidade das funções seno e cosseno)

A figura a seguir ilustra o ciclo trigonométrico. Portanto, AB = sen(x) e OA = cosx. Comparando a área do setor com a do triângulo OBC obtemos: sen(x) < x, para todo x ∈ (0, $\pi/2$). Nesse intervalo sen(x) > 0 e x > 0. E sendo sen(- x) = - sen(x), então para o intervalo (-$\pi/2$, 0) vale sen(x) > x.



Deduzimos desses dois resultados que -$|x| < sen\, x < |x|$, para todo x ∈ (- $\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$). Aplicando o teorema do sanduiche obtemos: $\lim_{x\to 0} sen\, x = 0$.

E como sen(0) = 0, Concluímos que sen(x) é contínua em 0. Por outro lado cos x = sen($\pi/2 - x$). Logo $\lim_{x\to 0} \cos x$ = sen($\pi/2$) = 1. Portanto, cos x é contínua em x = 0.

Agora vamos provar a continuidade de sen(x) em todo o R. Para isso utilizaremos a identidade trigonométrica do seno da soma de dois arcos. Primeiramente observamos que

$$\lim_{x\to a} sen\, x = \lim_{h\to 0} sen(a + h).$$

Pela identidade trigonométrica podemos afirmar

$$\lim_{h\to 0} sen(a + h) = \lim_{h\to 0}\big(sen(a)\cos(h) + \cos(a)\, sen(h)\big),$$

o que, pelas propriedades dos limites e pelos dois resultados acima, implica em $\lim_{x\to a} sen\, x = sen(a)$. De modo análogo, pode ser provada a continuidade da função cosseno.

QT-132. Seja (x_n) uma sequência definida pela recorrência:

$$x_1 = 0 \text{ e } 8x_{n+1}^3 = 6x_n + 1, \text{ para } n > 1.$$

I) Ache os primeiros 4 termos dessa sequência.

II) Use indução para provar que $x_n < 1$, para todo n.

III) Use indução para provar que (x_n) é crescente.

IV) Prove que (x_n) é convergente.

V) Prove que $\lim x_n = \cos(\pi/9)$.

QT-133. Sejam a, b e c números reais tais que $sen\ a + sen\ b + sen\ c \geq \frac{3}{2}$.

Prove que $sen\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + sen\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + sen\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0.$

QT-134. (China 2000, por Xuanguo Huang). Num triângulo ABC, $a \leq b \leq c$. Como uma função do ângulo C, determine as condições sob as quais a + b – 2R – 2r é positivo, negativo ou zero.

QT-135. Seja ABC um triângulo que satisfaz às seguintes condições:

senA senB + senB senC + senC senA = k

e (1 + senA)(1 + senB)(1 + sen**C)** = 2(k + 1), com $k \in R$.

Prove que o triângulo ABC é retângulo.

QT-136. (IME-1994/1995). Resolva a equação trigonométrica:

$$sen\ x + \cos x + 2\sqrt{2}\ sen\ x \cos x = 0.$$

QT-137.(IME-2006/2007). Resolva a equação:

$$\log_{(senx\ +\ cosx)}(1 + sen2x) = 2, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

▶ **Resp.:** $x \in (-\pi/4, 0) \cup (0, \pi/2)$.

QT-138. Mostre que a curva descrita por $f(t) = (sen2t, 2sen^2t, 2cost)$ está sobre uma esfera com centro na origem de R^3. Determine o comprimento do vetor velocidade $f'(t)$ e mostre que a projeção ortogonal desse vetor no plano xy tem um comprimento constante.

QT-139. (Integral de linha). Seja $F: D \subset R^3 \rightarrow R^3$ uma função vetorial contínua definida num aberto D. Seja g uma curva parametrizada com traço em D e continuamente diferenciável em [a, b]. O produto escalar(interno) F(g(t)).g'(t) é, pois, uma função real contínua de t para $t \in [a, b]$. Denomina-se **integral de linha** ou **integral curvilínea** de F ao longo de g à integral $\int_a^b F(g(t)).g'(t)dt$. Se F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3) e g é dada por g(t) = (t, t^2, t^3), para $t \in [0, 1]$, calcule a integral curvilínea de F ao longo de g.

QT-140. (IME- 2008/2009). Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{2}x, \text{ para } x \in R \text{ e } 0 \leq x \leq a.$$

QT-141. (ITA-2010, adaptada) Mostre que o valor da soma

$$\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right).sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right), \text{ para todo } \alpha \text{ real, é igual a } \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\,\alpha\right).$$

QT-142. (ITA-2010). Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $sen\,\alpha + sen\beta$, então α é igual a

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. **B)** $\frac{2\pi}{3}$. **C)** $\frac{3\pi}{5}$. **D)** $\frac{5\pi}{8}$. **E)** $\frac{7\pi}{12}$.

QT-143. (ITA-2010). Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) - 6\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0.$$

A) Determine todas as soluções x no intervalo [0, π [.

B) Para as soluções encontradas em **A)**, determine cotg x.

QT-144. (ITA-2007). Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado BC, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos BC, BD, DE, EC, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo EÂD, determine tg β em função da razão q da progressão.

QT-145. (ITA-2007). Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

A) $\pi/2$. **B)** $\pi/3$. **C)** $\pi/4$. **D)** $\pi/6$. **E)** $\pi/12$.

QT-146. Considere o gráfico cartesiano da função real $f(x) = \cos^4 x - sen^4 x$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P de abcissa $\pi/3$. Qual o ponto Q do gráfico de f, no intervalo $[0, \pi]$, que a reta tangente tem declividade máxima?

QT-147. (**Equação de um plano**) Utilizando produto interno de vetores, mostre que $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de um plano F do espaço(R^3).

QT-148. Ache a medida do seno do ângulo entre os planos H: $x - y + z = 20$ e F: $x + y + z = 0$.

QT-149. (Projeção ortogonal sobre um plano e distância entre ponto e plano). Mostre que os vetores v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 1) e v_3 = (1, 2, 1) formam uma base do Espaço R^3. Considere o plano F gerado pela base B = {v_1, v_2}. Obtenha uma base ortogonal de F, B' = {v_1, u_3}, a partir de B. Determine as projeções ortogonais de v_2 sobre v_1 e u_3. Some(vetorialment**E)** essas projeções. O vetor resultante dessa soma é a Projeção ortogonal de v_2 sobre o plano F. Faça uma figura ilustrativa dessa situação. Calcule a distância do ponto P = (3, 5, 8) ao plano F. Deduza a seguinte fórmula da distância D entre um ponto P(x_0, y_0, z_0) e o plano de equação $ax + by + cz = d$:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

NOTA:

A questão QT-149 trata da projeção ortogonal de um vetor V de R^3 sobre um subespaço(plano) de dimensão 2. Isso pode ser generalizado para espaços vetoriais de dimensão maiores. O que colocamos a seguir mostra isso.

O PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT

O Processo ou método de ortonormalização de Gram-Shimidt consiste, resumidamente, em construir uma base ortonormal a partir de uma base qualquer de um dado Espaço Vetorial finito com Produto Interno. Normalmente se obtém primeiro uma base ortogonal e depois se faz a conversão dessa em uma base ortonormal. Os passos principais para se obter a base ortogonal estão no quadro a seguir. Nesse quadro, o símbolo $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ indica o produto interno dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Processo de Gram-Schmidt

Para converter uma base {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_r$} numa base ortogonal {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$}, efetue as seguintes contas.

Passo 1: $v_1 = u_1$

Passo 2: $v_2 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \; u_{2-}$

Passo 3: $v_3 = u_{3-} \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

Passo 4: $v_4 = u_{4-} \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_3, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$

(Continue até r passos).

Se quisermos obter uma base ortonormal por esse método, basta que no início normalizemos os vetores da base dada. Isto é, substituamos cada vetor u_i por $\frac{u_i}{\|u_i\|}$.

Em decorrência desse processo, uma matriz A, m x n, com vetores coluna linearmente independentes, pode ser fatorada na forma A = QR, em que Q é uma matriz m x n com vetores coluna ortonormais e R é uma matriz n x n triangular invertível. No caso especial de uma matriz A quadrada, n x n, ela terá que ser, evidentemente, invertível para poder ser fatorada na forma QR. E nesse caso Q será uma matriz quadrada ortogonal. Dizemos que uma matriz quadrada Q é **ortogonal** quando suas colunas são ortonormais. Decorre dessa definição que as linhas são também ortonormais. Esse tipo de matriz tem muitas propriedades especiais tais como: produto de ortogonais é ortogonal, det(Q) = 1 ou det(Q) = -1, inversa de ortogonal é ortogonal e a transposta é igual à inversa. Outra propriedade importante é que ($|Qv| = |v|$, para todo v de R^n. Isso significa que a transformação linear representada pela matriz ortogonal preserva comprimento(distância), ou seja, ela é uma isometria. As rotações no plano são exemplos de isometrias. Mais uma propriedade importante relacionada com matrizes ortogonais, merece ser enunciada: “Se V é um espaço com produto interno de dimensão finita e P é a matriz de transição entre duas bases ortonormais de V, então P é uma matriz ortogonal.”

Sem maiores dificuldades, utilizando o WolframAlpha, você poderá obter vários exemplos numéricos da fatoração QR. Um exemplo, ilustrativo, é o seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Um resultado(teorema) que contribui para evidenciar melhor os passos intermediários envolvidos na fatoração QR é o seguinte:

Seja W um subespaço de dimensão finita de V, em que V é um espaço vetorial com produto interno. Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ for uma base ortogonal de W e **u** um vetor qualquer de V, então

$\text{Proj}_w\ \mathbf{u} = \frac{\langle u,\ v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\boldsymbol{v_1} + \frac{\langle u,\ v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\boldsymbol{v_2} + \ldots + \frac{\langle u,\ v_k\rangle}{\|v_k\|^2}\boldsymbol{v_k}$, em que Proj_w **u** é a projeção ortogonal de u sobre o subespaço W.

A projeção ortogonal Proj_w **u** é a melhor aproximação de **u** em W, no seguinte sentido:

Se **w** é qualquer vetor de W diferente de **u**, então $|\mathbf{u} - Proj_w\mathbf{u}| \leq |u - w|$.

APROXIMAÇÃO PELOS MÍNIMOS QUADRADOS

Mostraremos aqui uma versão matricial do método de aproximação dos mínimos quadrados. Dados n pontos (x_i, y_i) do plano cartesiano, desejamos obter a equação y = b + mx da reta que "melhor se aproxima" deles. Ela é frequentemente chamada de **reta de regressão** dos dados(pontos). Uma opção para isso é escolher a reta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos e a reta. A distância entre (x_i, y_i) e $(x_i, b + mx_i)$ é $|y_i - (b + m x_i)|$.

Portanto, o problema que desejamos resolver, pode ser formulado assim:

Achar m e b tais que a soma $\sum_{i=1}^{n}[y_i - (b + m x_i)]^2$ seja mínima.

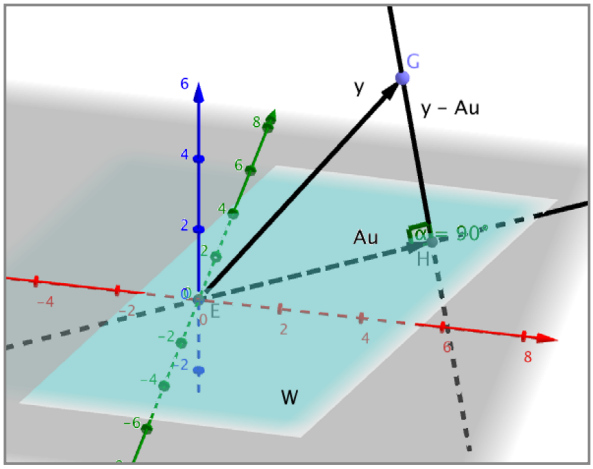
Considere o sistema linear $\begin{cases} y_1 = b + m x_1 \\ y_2 = b + m x_2 \\ \vdots \\ y_n = b + m x_n \end{cases}$. Podemos colocá-lo na forma matricial: **y** = A**u**, onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix}. \quad \textbf{(1)}$$

Se os pontos não são colineares, então **y** – A**u** $\neq \mathbf{0}$ e o problema toma a seguinte forma:

Achar um vetor **u** tal que $|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{u}|$ seja mínimo.

Sabemos que o vetor $A\boldsymbol{u}$ que satisfaz tal condição é a projeção ortogonal $\text{Proj}_W^{\mathbf{y}}$ de **y** sobre o subespaço W da imagem de A, como transformação linear de R^n em R^n. Indiquemos esse vetor por $A\bar{\boldsymbol{u}}$. Temos, pois, que $A\boldsymbol{u} \perp (\mathbf{y} - A\bar{\boldsymbol{u}})$, para todo **u** de W. Como A é do tipo n x 2, então W tem, no máximo, dimensão 2. Para visualizar isso pense W como um plano em R^3, como sugere a figura dada a seguir. A condição $A\boldsymbol{u} \perp (\mathbf{y} - A\bar{\boldsymbol{u}})$ equivale ao produto interno $A\boldsymbol{u}.(\mathbf{y} - A\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$. E isso, como produto matricial, equivale a $(A\boldsymbol{u})^t(\mathbf{y} - A\bar{\boldsymbol{u}}) = 0$. Disso segue $\boldsymbol{u}^t A^t(\boldsymbol{y} - A\bar{\boldsymbol{u}}) = \mathbf{0}$, que equivale a $\boldsymbol{u}^t(A^t\boldsymbol{y} - A^t A\bar{\boldsymbol{u}}) = \mathbf{0}$. Essa última equação só tem solução se $A^t\boldsymbol{y} - A^t A\bar{\boldsymbol{u}} = 0$. Isolando $\bar{\boldsymbol{u}}$, obtemos $\bar{\boldsymbol{u}} = (A^t A)^{-1}A^t\boldsymbol{y}$, em que $\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix}$.



Vejamos um exemplo. Consideremos os pontos (0, 1), (1, 3), (2, 4) e (3, 4). Queremos obter a reta de regressão desses pontos. Usando o modelo matricial apresentado, podemos escrever

$$\bar{u} = (A^t A)^{-1} A^t y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a reta de regressão dos pontos dados tem como equação: y = 1,5 + x.

O método adotado para a reta de regressão vale também para uma curva polinomial de regressão. Neste caso, temos que encontrar um polinômio y = $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ de grau k para se ajustar aos n pontos dados. A matriz A tomará a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{bmatrix}; \text{ o vetor } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

No capítulo anterior, usamos o Geogebra para obter curvas de regressão para dados sobre a evolução da COVID-19, nos primeiros meses dessa pandemia. Fundamentalmente foram usadas técnicas semelhantes a essas. Desse modo, não precisamos fazer contas com lápis e papel para obter uma curva de regressão para um conjunto de n dados(pontos) relacionados a um certo fenômeno. Precisamos, sim, compreender o modelo matemático básico que se usa para resolver esse tipo de problema tão frequente na vida contemporânea e percebermos a beleza da rainha das ciências.

Desigualdade de Hadamard

Seja A = [$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$] uma matriz quadrada n x n, em que $\mathbf{v}_i$ indica o vetor coluna de ordem i. Então

$$|\det(A)| \leq |v_1||v_2| \dots |v_n|. \quad (1)$$

E haverá igualdade em (1) se, e somente se as colunas de A forem ortogonais umas às outras.

A desigualdade (1) é chamada de Desigualdade de Hadamard.

Para demonstrar essa desigualdade precisamos basicamente de três resultados:

A) se A é inversível existe a fatoração matricial A = QR, em que Q é ortogonal (seus vetores colunas são ortonormais) e R é uma matriz triangular superior inversível;

B) os teoremas de Jacobi e Binet dos determinantes;

C) a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Se det(A) = 0, então nada temos mais a fazer. Supondo det(A) $\neq 0$, temos pelo teorema de Jacobi que as colunas de A são linearmente independentes e portanto A é inversível, o que implica na existência da fatoração A = QR. Fazendo Q = [$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$] e lembrando que det(Q) = 1 e que cada i-ésima entrada diagonal de R é dada por $\mathbf{u}_i$. $\mathbf{v}_i$, podemos escrever det(R) = ($\mathbf{u}_1$. $\mathbf{v}_1$)($\mathbf{u}_2$. $\mathbf{v}_2$)...($\mathbf{u}_n$. $\mathbf{v}_n$). E pela desigualdade de Cauhy-Schwarz $|\mathbf{u}_i.\mathbf{v}_i| \leq |\mathbf{u}_i.||\mathbf{v}_i| = |\mathbf{v}_i|$, pois $|\mathbf{u}_i.| = 1$. Segue disso que $|\det(\mathrm{R})| \leq |\mathbf{v_1}||\mathbf{v_2}| \ldots |\mathbf{v}_n|$. Por outro lado, pelo teorema de Binet det(A) = det(Q).det(R). Mas det(Q) = 1, então det(A) = det(R), o que nos leva a (1).

Falta provar o caso da igualdade. Sabemos que na desigualdade de Cauchy-Schwarz a igualdade somente ocorre quando os vetores $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ são proporcionais. Concluímos, assim, que a igualdade, na desigualdade de Hadamard, só ocorre quando os vetores $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ são proporcionais. Mas isso implica $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ serem ortogonais, já que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ são ortogonais**.**

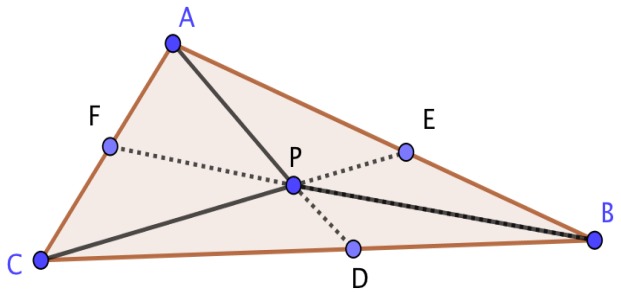
Essa desigualdade de Hadamard tem uma interpretação geométrica bem simples. Já vimos antes que $|\det(A)|$ representa o volume do bloco ou paralelepípedo de dimensão n determinado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$. Logo ela nos afirma que o volume máximo do paralelepípedo ocorre quando suas arestas são perpendiculares(ortogonais). Reveja a fórmula da área do paralelogramo, mostrada antes, S = $|u||v|sen\theta$. Dela deduzimos que det(u, v) $\leq |u||v|$. Assim podemos, por aproximação, visualizar a fórmula de Hadamard como uma generalização dessa desigualdade associada ao paralelogramo.

Coordenadas baricêntricas

Dados um triângulo ABC e um ponto P do seu interior, podemos expressar, de modo único, as coordenadas de P em função das de A, B e C, assim: P = αA + βB + γC, com α, β e γ positivos e α + β + γ = 1. Nessas condições denominamos α, β e γ de coordenadas baricêntricas de P em relação aos pontos não colineares A, B e C. Perceba que P é uma média ponderada dos vértices A, B e C. Ou seja, os ‘pesos” são as coordenadas baricêntricas de P em relação aos vértices de ABC. Um resultado interessante, que desejamos mostrar aqui, é que essas coordenadas podem ser expressas como razões entre áreas de triângulos, dando uma interpretação geométrica bem simples. Vejamos, pois.

Considere a figura ilustrativa a seguir. Queremos provar que

$\alpha = \frac{(BCP)}{(ABC)}, \beta = \frac{(ACP)}{(ABC)}$ e $\gamma = \frac{(ABP)}{(ABC)}$, em que (XYZ) indica a área do triângulo XYZ.



Pelo Teorema do Lado Comum, temos que

$$\frac{(BCP)}{(ABC)} = \frac{PD}{AD}, \quad \frac{(ACP)}{(ABC)} = \frac{PF}{BF} \quad \text{e} \quad \frac{(ABP)}{(ABC)} = \frac{PE}{CE}.$$

Como $(BCP) + (ACP) + (ABP) = (ABC)$, então $\frac{PD}{AD} + \frac{PF}{BF} + \frac{PE}{CE} = 1$.

Portanto, essas razões representam as coordenadas baricêntricas α, β e γ. A justificativa da unicidade pode ser feita assim como segue.

Pondo A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3) e P = (x, y), as condições dadas equivalem ao sistema linear nas incógnitas α, β e γ:

$$\begin{cases} x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = x \\ y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = 1\,. \end{cases}$$

Esse sistema, usando $\gamma = 1 - (\alpha + \beta)$, se transforma em $\begin{cases} (x_1 - x_3)\alpha + (x_2 - x_3)\beta = x - x_3 \\ (y_1 - y_3)\alpha + (y_2 - y_3)\beta = y - y_3 \end{cases}$.

Como os vetores CA = $(x_1 - x_3, y_1 - y_3)$ e CB = $(x_2 - x_3, y_2 - y_3)$ não são proporcionais, em virtude de A, B e C serem não colineares, então $(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \neq 0$. Logo o sistema tem solução única. Perceba que o sistema equivale à expressão vetorial:

$$CP = \alpha CA + \beta CB.$$

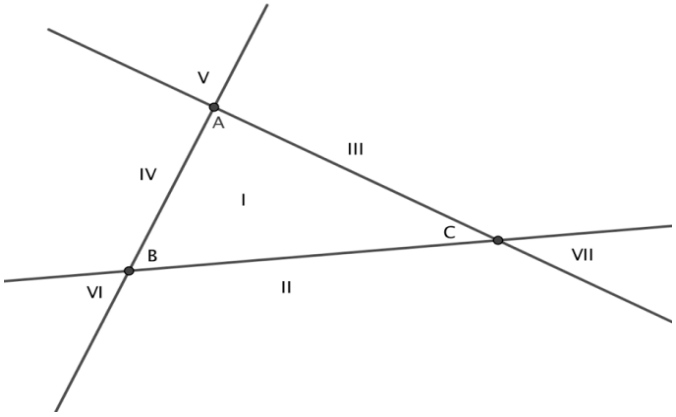
De modo análogo podemos deduzir:

$$AP = \gamma AC + \beta AB$$

e

$$BP = \alpha BA + \gamma BC.$$

Se admitirmos que α, β e γ podem ser negativos, então qualquer ponto do plano pode ser representado por elas. Observe, na figura a seguir, que as 3 retas, determinadas pelos vértices do triângulo ABC, particionam o plano em 7 regiões. Os sinais das coordenadas baricêntricas dependem da posição do ponto P em cada uma dessas regiões. Eles estão dispostos na tabela a seguir. Para compreender melhor os sinais, use as 3 equações vetoriais listadas anteriormente.



	I	II	III	IV	V	VI	VII
α	+	-	+	+	+	-	-
β	+	+	-	+	-	+	-
γ	+	+	+	-	-	-	+

Considere um triângulo ABC qualquer do plano cartesiano. Qual é o único ponto desse plano que tem as três coordenadas baricêntricas iguais? Quais são as coordenadas baricêntricas de seus vértices? Perceba que pondo X = (α, β, γ), temos que A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1). Agora considere o caso particular em que A = (3, 4), B = (-2, 5) e C = (0, 9). Se P = (1, 9), então calcule as coordenadas baricêntricas de P. Verifique que α = 4/13, β = - 1/26 e γ = 19/26. Compare os sinais com os da tabela acima. Ainda em relação a esse triângulo ABC, suponha que as coordenadas baricêntricas de um certo ponto Q são α = - 7/12, β = - 5/12 e γ = 2. Quais as coordenadas cartesianas de Q? Verifique que Q = (- 1/12, 163/12).

QT-150. Use vetores para obter o valor mínimo da função f de duas variáveis reais:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13}.$$

QT-151. Sejam h_a, h_b e h_c as alturas de um triângulo. Prove que $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, em que r é o raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

QT-152. As diagonais de um quadrilátero convexo ABCD se intersectam em O. Qual é a menor área que esse quadrilátero pode ter, se os triângulos AOB e COD têm áreas 4 e 9, respectivamente?

QT-153. (ITA-2012). Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{tg(\theta)} e^{sen(\theta)} \geq 0$.

▶ **Resp.:** $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$.

QT-154. (IME-2020) Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede 30^o. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

A) $2\sqrt{3} - 3$. **B)** $4 - 2\sqrt{3}$. **C)** $2 - \sqrt{3}$. **D)** $1 - \sqrt{3}$. **E)** $\sqrt{3}/2 - 1$.

QT-155. (Belarus 1999). Duas sequências reais $x_1, x_2, \ldots$, e $y_1, y_2, \ldots$, são definidas do seguinte modo: $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$, e $y_{n+1} = y_n / (1 + \sqrt{1 + y_n^2})$, para todo $n \geq 1$. Prove que $2 < x_n y_n < 3$ para todo $n > 1$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-T(3)

DRN-T108:

Usar MA ≥ MG.

DRN-T109:

Usando transformação soma-produto, temos que:

$cosA + cosB + cosC = cosA + 2cos(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B-C}{2})$. (1)

Como A + B + C = π, então $0 < \frac{B+C}{2} < \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Disso segue que $0 < cos\left(\frac{B+C}{2}\right) < 1$ e $0 < cos\left(\frac{B-C}{2}\right) < 1$, o que implica

$cos(\frac{B+C}{2})cos(\frac{B-C}{2}) \leq cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$. Usando isso em (1), encontramos:

$cosA + cosB + cosC \leq cosA + 2cos(\frac{B+C}{2})$. (2)

E como $cos(\frac{B+C}{2}) = sen(\frac{A}{2})$ e $cosA = 1 - sen^2(\frac{A}{2})$, então (2) é equivalente a

$cosA + cosB + cosC \leq 1 - 2sen^2\left(\frac{A}{2}\right) + 2\,sen\left(\frac{A}{2}\right)$. (3)

Mas, temos que $-2sen^2\left(\frac{A}{2}\right) + 2\,sen\left(\frac{A}{2}\right) = -2[(sen\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]$.

Com isso (3) fica na forma $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2} - 2[(sen\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}$, o que conclui a prova.

NOTA:

A partir da desigualdade $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$, pode-se provar a desigualdade $cosAcosBcosC \leq \frac{1}{8}$, utilizando-se MA ≥ MG para n = 3, sem restrição de sinal. Isso pode ser feito, lembrando-se da demonstração desse caso com o uso da desigualdade

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}.$$

Aplicando MA ≥ MG, obtemos:

$$\frac{3}{2} \geq cosA + cosB + cosC \geq 3\sqrt[3]{cosAcosBcosC} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq cosAcosBcosC \Leftrightarrow cosAcosBcosC \leq \frac{1}{8}.$$

Um outro caminho, mais simples, seria usar MA ≥ MG para números positivos e depois observar que se apenas um dos fatores for negativo, então $cosAcosBcosC < 0 < \frac{1}{8}$.

DRN-T110:

Aplicar MA ≥ MG para o primeiro membro e observar que $\cos(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + cos\sqrt{z} + \cos(xyz) \leq 3$.

▶ **Resp.:** x = y = 1 e z = 0.

DRN-T111:

Mostre que cos2A + cos2B + cos2C ≥ - 3/2, usando transformação soma/produto e cosA.cosB.cosC ≤ 1/8.

DRN-T112:

Use MA ≥ MG.

▶ **Resp.:** Soluções: $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$.

NOTA:

Verifique que cos2A + cos2B + cos2C = - 4cosA.cosB.cosC – 1.

Usando MA ≥ MG deduza que $sen^2A + sen^2B + sen^2C \leq \frac{9}{4}$ => senA.senB.senC ≤ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Um outro caminho para se obter essa última desigualdade é usar MA ≥ MG na desigualdade senA + senB + senC ≤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, a qual decorre da lei dos senos e de a + b + c ≤ $3\sqrt{3}$R, que por sua vez provém do teorema: "**De todos os triângulos inscritos em um mesmo círculo de raio R, os equiláteros têm perímetro máximo**." A prova desse teorema está na resolução da questão QT-60.

DRN-T113:

Perceba que x ≥ 0 e y ≥ 0. Usar substituição trigonométrica. Observar a injetividade das funções no intervalo [0, $\pi/2$].

▶ **Resp.:** x = ½ e y = $\sqrt{3}/2$.

DRN-T114:

Use as projeções ortogonais de B' e C' sobre BC e perceba que BC = 2B'C'. Obtenha cotgθ = C'P/MP = PB'/MP => B'C' = 2MP.cotgθ. Mas B'C' = DE = BC/2 = BD + CE = MpcotgB + MpcotgC.

Logo 2cotgθ = cotgB + cotgC.

DRN-T115:

Mostre que 1/sen2x = cotgx – cotg2x e use isso para provar a igualdade.

DRN-T116:

Use $\frac{2tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-cosx}{cosx}$ e o binômio de Newton.

Observe que o primeiro membro, pondo $t = tg\frac{x}{2}$, pode ser escrito assim: $(1+t^2)^n + \left(1 + \frac{2t^2}{1-t^2}\right)^n$.

DRN-T117:

Mostre que a igualdade é equivalente a $cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1$, multiplique essa por 2, use arco duplo e transformações soma/produto. Deduza que cosC = 0 ou cos(A – B) = cosC, o que implica a conclusão.

DRN-T118:

Use $4sen^3x$ = 3 sen x – sen (3x) para transformar a equação dada na equação sen(3x) = cos(2x). As soluções são x = (4k + 1)π/10, k inteiro.

DRN-T119:

Lembre-se da desigualdade triangular($|x + y| \leq |x| + |y|,\ x, y \in R$) e use o princípio da indução para provar (III).

DRN-T120:

Defina $\langle y \rangle$ como a distância de $y \in R$ ao inteiro par mais próximo. Deduza que $\langle 1 + cosx \rangle \leq senx$, para todo $x \in [0, \pi]$. Prove isso para $cosx \geq 0$ e depois para $cosx < 0$. Use a propriedade $\langle x + y \rangle \leq \langle x \rangle + \langle y \rangle$, vista na QF-122, para concluir que

$$\sum_{j=1}^{n} senx_j \geq \sum_{j=1}^{n} \langle cosx_j + 1 \rangle \geq \left\langle \sum_{j=1}^{n} (cosx_j + 1) \right\rangle = 1.$$

DRN-T121:

Use a projeção ortogonal do vetor u = (1, 0, 0) sobre os vetores:

$v_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$ e v_3 = (1, 1, 1). E lembre-se do cálculo da diagonal de um prisma reto de base retangular para concluir a prova.

DRN-T122:

Recorrência: $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_n} \Rightarrow a_n = 2a_{n+1}^2 - 1$. Associar com

cosx = 2cos^2(x/2) – 1. E observar que sen2x = 2 senxcosx = 4 sen (x/2)

cos(x/2)cosx = 8 sen(x/4)cos(x/4)cos(x/2)cosx.

DRN-T123:

Desenvolver cada uma das equações e observar que $-\pi/2 < \alpha - \beta < \pi/2$ e $0 < \alpha + \beta < \pi$.

▶ **Resp.:** $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12})$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ e $(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12})$.

DRN-T126:

Sejam a e b as medidas dos catetos opostos aos ângulos α e β, respectivamente. Segue disso que sen$\alpha = cos\beta = \frac{a}{\ell}$ e cos$\alpha = sen\beta = \frac{b}{\ell}$. Então

$$sen(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - sen\beta.cos\alpha = \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{(a+b)(a-b)}{\ell^2}.$$

Ou seja, $sen(\alpha - \beta) = \frac{(a+b)(a-b)}{\ell^2}$. (1)

Por outro lado temos que **a + b** = $\ell\sqrt{5} - \ell = \ell(\sqrt{5}-1)$. Usando isso e o Teorema de Pitágoras, temos: $(\ell(\sqrt{5}-1))^2$ = $a^2 + b^2 + 2ab = \ell^2 + 2ab$ => $2\mathbf{ab} = \ell^2(5 - 2\sqrt{5})$. Com isso obtemos:

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = \ell^2 - \ell^2(5 - 2\sqrt{5}) = \ell^2(2\sqrt{5} - 4)$ => **a – b** = $\ell\sqrt{2\sqrt{5}-4}$.

Substituindo esses valores de a + b e de a – b em (1), obtemos:

$$sen(\alpha - \beta) = (2\sqrt{5}-4)\sqrt{2\sqrt{5}-4} = \sqrt{(6-2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-4)} = \sqrt{\mathbf{20\sqrt{5}-44}}.$$

Portanto, a alternativa certa é (D).

DRN-T127:

Usar a fórmula de QT-125, MA ≥ MG e Transformações trigonométricas.

Algumas transformações úteis:

$$\begin{aligned} &sen\,(A + B + C) + sen\,(A + B - C) \\ &\quad = 2sen(A + B)cos(C)2sen(A + B).cos(A - B) \\ &\quad = sen(2A) + sen(2B). \end{aligned}$$

DRN-T128:

Faça t = tgθ, onde $\theta = \beta - \alpha = \frac{\alpha}{2}$ e obtenha p/q = tg$2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$, que leva a uma equação quadrática. Conclua analisando o discriminante.

DRN-T129:

Excluindo os valores de x que anulam o denominador do primeiro membro da equação dada, isto é, senx = 0 ou tgx = 4/5, a equação é equivalente a

$$2\text{sen}^2x - 3\,sen2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x - 3\,senxcosx + 1 = 0. \quad (1)$$

Mas (1) é equivalente a

$\text{sen}^2x - 3\,senxcosx + \text{sen}^2x + \cos^2x = 0 \Leftrightarrow$

$2\text{sen}^2x - senxcosx + cosx(cosx - 2senx) = 0 \quad senx(2senx - cosx) + cosx(cosx - 2senx) = 0$

$(2senx - cosx)(senx - cosx) = 0.$ (2)

(2) ⇔ tgx = ½ ou tgx = 1.

Como $|x| \leq \pi/6$, então só a solução de tgx = ½ é válida. Logo a solução única da equação dada é **x = arctg(1/2).**

Um outro caminho possível é transformar a equação (1) na forma $2\text{tg}^2x - 3\text{tgx} + 1 = 0$, lembrando que $sen^2x = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$ e $senx = \cos x.\text{tgx}$. Observando a condição $|x| \leq \pi/6$, conclua que a solução é x = arctg(1/2).

NOTA:

A fórmula 4Rsen(A/2).sen(B/2).sen(C/2) = r pode ser deduzida em duas etapas:

I. Combinando a lei dos cossenos com $sen^2(A/2) = \frac{1-cosA}{2}$ obtém-se $sen^2(A/2) = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ e suas análogas;

II. Combinando os resultados de (I) com as fórmulas de Hierão, (AB**C)** = pr e (AB**C)** = $\frac{abc}{4R}$ deduzir o resultado desejado.

Uma outra fórmula conhecida que pode ser obtida combinando 4Rsen(A/2).sen(B/2).sen(C/2) = r com a fórmula (AB**C)** = $2R^2$senA.senB.senC é a seguinte:

p = 4Rcos(A/2).cos(B/2).cos(C/2).

DRN-T130:

Observe que $\frac{\pi}{10} = 18°$ e $\frac{3\pi}{10} = 54°$ são complementares. Use cos3x = sen 2x, com x = $\frac{\pi}{10}$ para chegar na equação $4\text{sen}^2x + 2\,sen\text{x} - 1 = 0$.

Observe que $sen\ 18° = \frac{\bar{\varphi}}{2}$ e $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$, em que $\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o conjugado de φ. Perceba também a relação desses ângulos com os polígonos: pentágono e decágono regulares.

DRN-T133:

Prove por contradição usando fórmulas de adição e subtração de arcos. Também será útil $sen\left(a+\frac{\pi}{3}\right)+sen\left(b+\frac{\pi}{3}\right)+sen\left(c+\frac{\pi}{3}\right)$.

DRN-T134:

Faça S = a + b – 2R – 2r, use $4Rsen(A/2).sen(B/2).sen(C/2)$ = r e a lei dos senos para obter S = 2R[sen A + sen B – 1 – sen (A/2). sen (B/2). sen (C/2)]. Analise, a seguir, com ajuda das transformações soma/produto, os casos: C = 90º, C > 90º e C < 90º.

Você deve obter uma expressão da forma S = M.cosC, em que M = $\frac{2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)+sen\left(\frac{C}{2}\right)}-1>0$.

Verifique que S = 0 se C > 90º, S > 0 se C < 90º e S < 0 se C > 90º.

DRN-T135:

Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo-a da segunda, obtemos:

$$(1+senA)(1+senB)(1+senC)-2(senA\,senB+senB\,senC+senC\,senA)=2.$$

Desenvolvendo a expressão do primeiro membro dessa igualdade obtemos 1 + M = 2 ⇔ M = 1, em que M é $senA+senB+senC-senAsenB-senBsenC-senCsenA+senAsenBsenC$.

Mas, $(1-senA)(1-senB)(1-senC)=1-M$. Logo $(1-senA)(1-senB)(1-senC)=0$.

Disso segue que $senA=1\,ou\,senB=1\,ou\,senC=1$, o que equivale a dizer que ABC é um triângulo retângulo.

DRN-T136:

Como $senx+cosx=\sqrt{2}\,sen\,(x+\frac{\pi}{4})\,e\,2\,sen\,xcosx=sen\,2x$, então a equação dada é equivalente a

$2sen(x+\frac{\pi}{4})+2sen2x=0\Leftrightarrow sen(x+\frac{\pi}{4})+sen2x=0.$

Usando transformação soma-produto, obtemos: $2sen(\frac{12x+\pi}{8}).cos(\frac{4x-\pi}{8})=0$, que equivale a $sen\,(\frac{12x+\pi}{8})$ = 0 ou cos$(\frac{4x-\pi}{8})$ = 0.

Resolvendo essas equações, concluímos que

$$x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\;\;ou\;\;x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\;\;ou\;\;x=\frac{23\pi}{12}+2k\pi,$$ k inteiro.

DRN-T138:

A equação da esfera é $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. O comprimento da velocidade é $2\sqrt{1 + sen^2 t}$. A projeção ortogonal sobre o plano xy tem comprimento 2.

DRN-T139:

▶ **Resp.:** 1.

DRN-T140:

Faça x = $a sen y$, com $y \in [0, \pi/2]$, para garantir $cos y \geq 0$. Com isso transforme a equação dada em $\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \sqrt{3} sen\left(\frac{y}{2}\right) = 2 sen y$, a qual, sendo multiplicada por ½ , resulta em sen(y/2 + $\pi/6$) = seny.

▶ **Resp.:** y = $\frac{\pi}{3}$ → x = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

DRN-T141:

Use transformação soma/produto para obter uma soma telescopante.

DRN-T142:

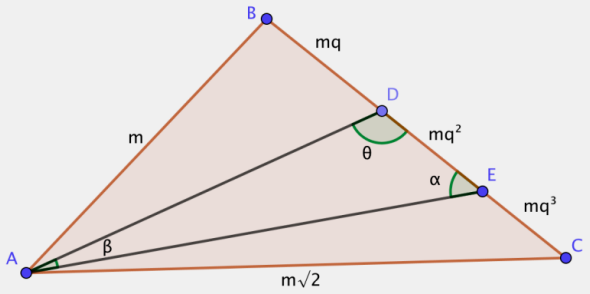
Use transformação soma/produto e observe que os dados da hipótese implicam que α e β estão no intervalo [0, $4\pi/3$].

DRN-T143:

Transforme a equação para a forma $2sen^2 x - 3\, sen\, x + 1 = 0$. Lembre-se de $\cos^2 a = 1 / (1 + tg^2 a)$.

DRN-T144:

Façamos, inicialmente uma figura ilustrativa da situação, indicando por α e θ os outros ângulos internos do triângulo EAD e por m a medida dos lados iguais de ABC. Em virtude da hipótese(PG decrescente), temos que: BD = mq, DE = mq^2 e EF = mq^3. E como ABC é isósceles e retângulo em B, pelo teorema de Pitágoras obtemos: AC = $m\sqrt{2}$.



Como tgx = - tg($\pi - x$), então tg β = - tg($\alpha + \theta$) = - $\frac{tg\alpha + tg\theta}{1 - tg\alpha.tg\theta}$ = $\frac{tg\alpha + tg\theta}{tg\alpha.tg\theta - 1}$. Ou seja

tg $\boldsymbol{\beta} = \frac{tg\alpha + tg\theta}{tg\alpha.tg\theta - 1}$. (1)

Mas tg $\alpha = \frac{m}{mq + mq^2}$ = $\frac{1}{q + q^2}$ = $\frac{1}{q(1+q)}$ e $tg\theta = -tg(\pi - \theta) = -\frac{m}{mq} = -\frac{1}{q}$.

Substituindo esses valores em **(1),** encontramos:

tg $\beta = \frac{q^2}{1 + q^3 + q^2}$.

Porém, $q^3 + q^2 + q = 1$, logo **tg $\boldsymbol{\beta} = \frac{q^2}{2 - q}$** .

DRN-T145:

$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}cosx.$

▶ **Resp.:**(D)

DRN-T146:

f'(x) = - 2 sen 2x e f''(x) = - 4cos2x.

▶ **Resp.:** Equação da tangente em P: $6\sqrt{3}x + 6y + 3 - 2\sqrt{3}\pi = 0$ e Q = (π/4, 0).

DRN-T150:

Use $|u| + |v| \geq |u - v|$.

▶ **Resp.:** $f_{min} = \sqrt{34}$.

Verifique que f(2, -1) = $\sqrt{34}$.

DRN-T151:

Use MA ≥ MG.

DRN-T152:

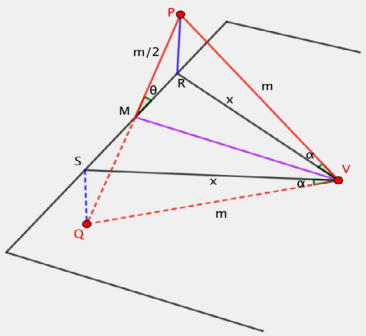
Use o Teorema do Lado Comum para obter xy = 36, em que x e y são as áreas respectivas dos outros dois triângulos componentes do quadrilátero. A seguir use a desigualdade MA ≥ MG para concluir que x = y = 6 e, portanto, a área mínima dele é 25. Outro caminho de resolução é, após a aplicação do teorema do lado comum, obter-se uma expressão da área S de ABCD em função de x e determinar seu único ponto crítico para x > 0. Perceba que tal função não tem máximo. Vale a pena tentar visualizar isso geometricamente.

Obs.: No último capítulo faremos outra resolução usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

▶ **Resp.:** 25.

DRN-T154:

Esboçar a figura a seguir é o grande segredo da solução desta questão. Nela fazemos coincidir a altura do triângulo equilátero PQV com a altura de sua projeção ortogonal RSV.



Assim, a linha RS é a interseção do plano (PMR) com o plano de projeção (RSV). Por construção, eles são perpendiculares. Logo, o que procuramos é o cos θ. Temos que $\frac{m}{2}.\cos\theta$ = MR = MV.tg15º. Como MV = PV.cos30º = $m\frac{\sqrt{3}}{2}$, então MR = $m\frac{\sqrt{3}}{2}$.tg15º = $\frac{m}{2}.\cos\theta$.

Logo $\cos\theta = \sqrt{3}.tg15º = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$.

▶ **Resp.: (A).**

DRN-T155:

Seja x_n = cotg(a_n), para $0 < a_n < \pi/2$. Disso segue x_{n+1} = cotg(a_n) + cossec(a_n) = [1 + cos(a_n)]/sen(a_n)] = cotg(a_n/2). Combinando esse resultado com $a_1 = \pi/6$ obtemos $a_n = (\pi/6)/2^{n-1}$. De modo análogo, fazendo y_n = tg(2a_n) = 2tg(a_n)/(1 – tg^2a_n), deduzimos que $x_ny_n = 2/(1 - tg^2a_n)$. Observe que para $0 < a_n < \pi/4$ temos tg (π/4) = 1 > tg^2a_n > 0 e x_ny_n > 2. Por outro lado, para n > 1, temos que $a_n < \pi/6$, o que implica tg^2a_n < 1/3 e por consequência x_ny_n < 3. Portanto, $2 < x_ny_n < 3$, para n > 1.

QT-156. Demonstre a desigualdade dupla dada a seguir, sabendo que x e y são números reais.

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

QT-157. Resolva, em R, a equação: $(sen^2x - \sqrt{2}sen\,x + 1)(sen^4x + cos^4x) = \frac{1}{4}$.

T-158. Prove que $cos^3\left(\frac{x}{3}\right) + cos^3\left(\frac{x+2\pi}{3}\right) + cos^3\left(\frac{x+4\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\cos x$, sendo x real.

QT-159. As medidas dos lados de um triângulo ABC são a, b e c. Prove que se R e r são, respectivamente, o circunraio e o inraio de ABC, então vale a desigualdade dupla:

$$\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{(2r)^2}.$$

Mostre, também, que essa desigualdade implica R ≥ 2r.

QT-160. Seja α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo.

A) Determine a razão R/r, entre o circunraio R e o inraio r, em função de α.

B) Depois calcule o valor de α para que essa razão seja mínima.

QT-161.[JNCF] Considere as sequências (A_n) e (B_m), definidas assim:

A) A_1 é a área de um triângulo ABC;

B) A_2 é a área do triângulo mediano de ABC;

C) A_{k+1} é a área do triângulo mediano de área A_k, k = 1, 2, 3, ...

D) Os termos de (B_m) são os de ordem ímpar de (A_n).

Seja P o perímetro de ABC. Determine a soma S dos perímetros dos triângulos cujas áreas são os B_m.

QT-162. Prove que (1 + senx)(1 + cosx) ≤ 3/2 + $\sqrt{2}$.

QT-163. Determinar o valor máximo da expressão E = $sen x_1.\cos x_2 + sen x_2.\cos x_3 + ... + sen x_n.\cos x_1$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais.

QT-164. Considere um triângulo ABC tal que senA + senB + senC ≤ 1. Prove que o mínimo do conjunto {A + B, B + C, C + A} é menor do que 30°.

QT-165. Prove que (1 + a/senx)(1 + b/cosx) ≥ (1 + $\sqrt{2ab}$)², para todos a, b, x ∈ R, com a e b positivos e 0 < x < $\frac{\pi}{2}$.

QT-166. (IME-2008) Determine o conjunto solução da equação sen^3x + $\cos^3$x = 1 – sen^2x.$\cos^2$x.

QT-167. Sejam $a, b, c \in R - \{1, -1\}$ e tais que $a + b + c = abc$. Prove que

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

QT-168. (ITA-2008). A soma de todas as soluções distintas da equação cos 3x + 2 cos 6x + cos 9x = 0, que estão no intervalo $0 \le x \le \pi/2$, é igual a

A) 2π. **B)** $\frac{23}{12}\pi$. **C)** $\frac{9}{6}\pi$. **D)** $\frac{7}{6}\pi$. **E)** $\frac{13}{12}\pi$.

QT-169. Achar os valores máximo e mínimo da função real $f(x) = 2sen^2x + 4\cos^2x + 6\cos x.\ sen x$.

QT-170. Suponha que $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}$. Prove que $tgx_1 < \frac{senx_1+senx_2+\cdots senx_n}{cosx_1+cosx_2+\cdots cosx_n} < tgx_n$.

QT-171. (ITA-2020). Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \pi/2$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $\cos x\ sen(a+x) = sen a$ é igual a

A) $5\pi + 2a$. **B)** $5\pi + a$. **C)** 5π. **D)** $5\pi - a$. **E)** $5\pi - 2a$.

QT-172. (IME-2020) Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$sen\ x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Estão compreendidos entre

A) $\pi/12$ e $\pi/6$.

B) $5\ \pi/12$ e $7\ \pi/12$.

C) $2\ \pi/3$ e $5\ \pi/6$.

D) $\pi/3$ e $\pi/2$.

E) $5\ \pi/6$ e $11\ \pi/12$.

QT-173. (IME-2020) Seja $\frac{1}{b} = sen\ (\frac{\pi}{14}).\ sen\ (\frac{3\pi}{14}).\ sen\ (\frac{5\pi}{14})$. Determine b, em que b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

QT-174. (JNCF) Considere um conjunto L formado por n pontos de um dado plano. Sabe-se que L tem a seguinte propriedade: dois quaisquer de seus pontos estão a uma distância igual ou menor do que d. Prove que um subconjunto qualquer de 3 pontos de L está contido em um círculo de raio $R \le d/\sqrt{3}$.

QT-175. Em um triângulo acutângulo ABC temos que cosA = tgB, cosB = tgC e cosC = tgA. Prove que senA = senB = senC = $1/\varphi$, em que φ é a razão áurea.

QT-176. A medida de uma aresta lateral de uma pirâmide triangular regular é b e o ângulo entre duas faces laterais é φ.

A) Ache a medida de uma aresta de base.

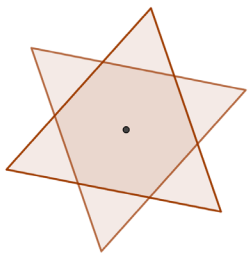
B) Prove que $\varphi > 60°$.

QT-177. (Bulgarian Mathematical Olympiad, Regional, 2006). Achar todos os inteiros positivos n para os quais a igualdade $\frac{sen(n\alpha)}{sen\alpha} - \frac{\cos(n\alpha)}{cos\alpha} = n - 1$ é verdadeira para todos os $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, k inteiro.

QT-178. (India, 2003). Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC. Se construirmos um triângulo A'B'C' com lados de comprimentos a + b/2, b + c/2 e c + a/2, prove que (A'B'C') ≥ 9(ABC)/4.

QT-179. (Triângulo Áureo) Seja ABC um triângulo com a seguinte propriedade: uma ceviana de ABC o separa em dois triângulos, T_1 e T_2, tais que um deles, T_2, é semelhante a ABC e a razão entre a área de ABC e a de T_1 é a razão áurea φ. Um triângulo com essa propriedade é chamado de Triângulo Áureo. Prove que um triângulo isósceles, com o ângulo do vértice medindo 36º, é um triângulo áureo.

QT-180.(JNCF). Considere um prisma P, reto, de base triangular regular e altura H = $10\sqrt{177}$ cm. E seja S um poliedro convexo de altura H, com bases congruentes às do prisma, mas posicionadas de tal modo que a projeção ortogonal de uma base sobre o plano da outra gere a figura em formato de estrela de seis pontas, conforme indica a figura a seguir. As seis faces laterais de S são obtidas ligando dois vértices de uma base a um vértice da base oposta. Se b = $20\sqrt{2}$ cm é a medida da aresta da base do prisma, calcule a diferença entre os volumes de S e P. Calcule também a diferença entre as áreas de suas superfícies laterais. Qual o formato das secções transversais(paralelas às bases)? Qual o formato específico da que tem área máxima? Esboce o sólido S e perceba que ele pode ser decomposto em duas pirâmides de base quadrangular de mesmo volume. Imagine o sólido S inscrito em um cubo de tal modo que uma diagonal do cubo passe pelos baricentros das bases de S. Qual a medida da aresta desse cubo?

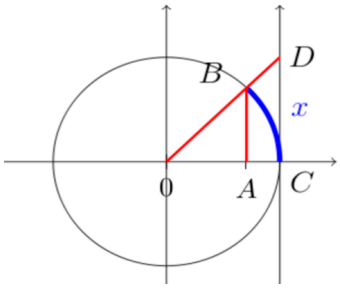


QT-181.(JNCF). Seja P o baricentro de um triângulo ABC. Fazendo, no plano de ABC, uma rotação de 180°, em torno de P, os vértices A, B e C se movem para os pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. A seguir é feita uma homotetia de razão m > 0 e centro em P, que leva os pontos A_1, B_1 e C_1 em A', B' e C', respectivamente. Se a área de ABC é K, então qual o valor da área da região U formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e A'B'C' ?

QT-182. (IME- 1976/1977). Em um triângulo qualquer ABC, são dados: o lado a, a altura h e a bissetriz ℓ relativas a esse lado. Determine os lados b e c , assim como os ângulos A, B e C em função de a, h e ℓ.

Gráficos das Funções Trigonométricas Principais e Suas Inversas

A fim de compreendermos melhor as características gráficas das funções trigonométricas mais conhecidas, consideremos a figura a seguir. Procedendo de forma análoga ao que fizemos para mostrar a continuidade da função seno em x = 0, fazendo a comparação das áreas do setor circular OBC e dos triângulos OAB e OCD, podemos obter a desigualdade dupla $\cos x < \frac{sen\ x}{x} < \frac{1}{\cos x}$.



E usando o Teorema do Sanduiche, bem como a continuidade das funções seno e cosseno em x = 0, deduzimos que $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.

Desse limite, usando $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{-senx}{x} . \frac{senx}{(\cos x + 1)}$, obtemos outro limite importante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Com eles podemos mostrar que as funções seno e cosseno são deriváveis e obter as suas derivadas. Vejamos, pois.

Pela definição de derivada, pondo $f(x) = sen(x)$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h) + sen(h)cos(x) - sen(x)}{h}.$$

Mas, $\frac{sen(x)\cos(h) + sen(h)\cos(x) - sen(x)}{h} = sen(x)\left[\frac{\cos(h) - 1}{h}\right] + \cos(x)\left[\frac{sen(h)}{h}\right]$.

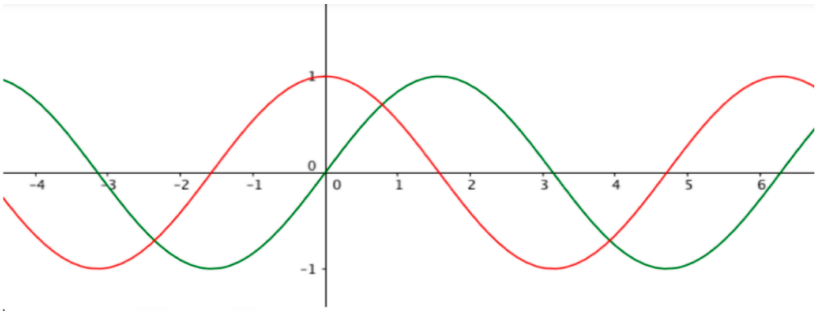
Então, $f'(x) = sen(x).[0] + cos(x).[1] = cos(x)$. Logo $(sen\ x)' = cos\ x$.

De modo análogo, deduzimos que $(cos\ x)' = -sen\ x$.

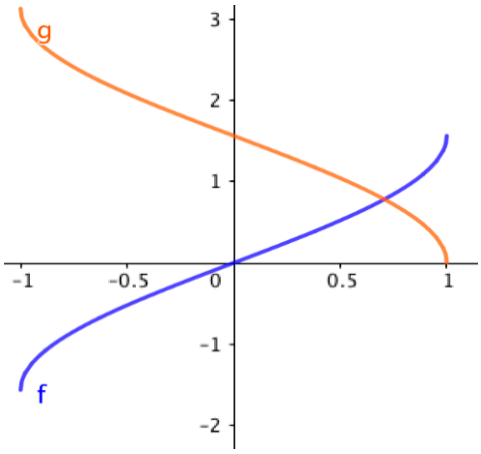
Analisando o sinal das derivadas das funções seno e cosseno, deduzimos os intervalos de crescimento e de decrescimento de cada uma. Percebe-se também que a função seno é injetiva(estritamente crescent**E)** no intervalo $[-\pi/2,\ \pi/2]$ e a função cosseno no intervalo $[0, \pi]$. Em virtude disso, existem as inversas delas, arcsen(x) e arccos(x), nos referidos intervalos.

Com procedimento muito parecido, descobrimos os intervalos de crescimento e decrescimento das outras quatro funções trigonométricas, bem como os intervalos em que suas inversas são possíveis, conforme mostram os gráficos a seguir.

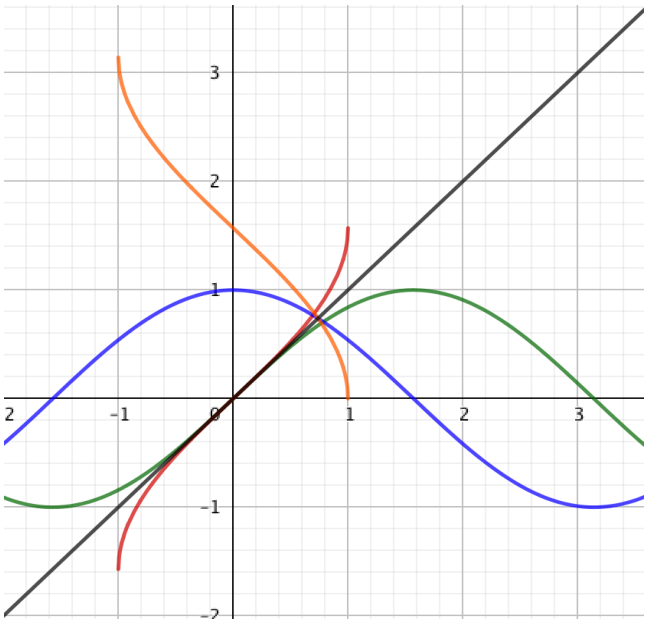
1) Gráficos de sen x e cos x



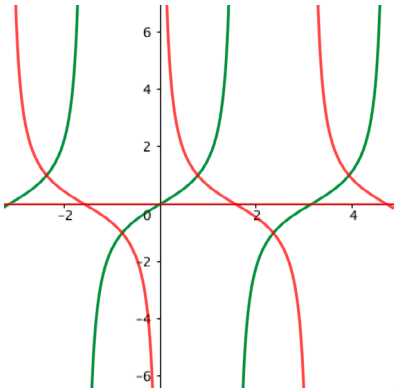
2) Gráficos de f(x) = arcsen x e g(x) = arccos x



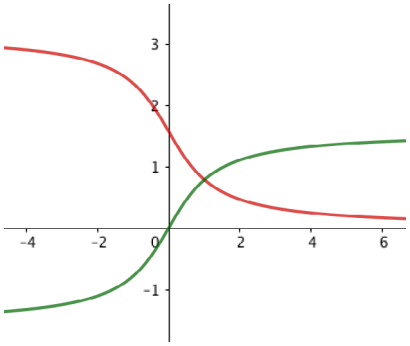
3) Gráficos simultâneos de sen x, cos x, arcsen x e arccos x



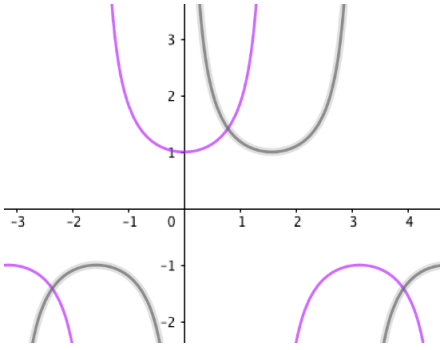
4) Gráficos de tg x e cotg x



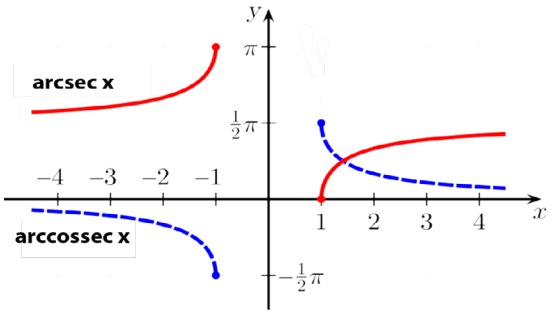
5) Gráficos de arctg x e arccotg x



6) Gráficos de sec x e cossec x



7) Gráficos de arcsec x e arccossec x



DOMÍNIO E IMAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Nome	Notação 1	Notação 2	Definição	Domínio real	Imagem (em radianos)
arco seno	y = arcsen(x)	$y = sen^{-1}(x)$	x = sen(y)	[-1, +1]	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
arco cosseno	y = arccos(x)	$y = cos^{-1}(x)$	x = cos(y)	[-1, +1]	$0 \leq y \leq \pi$
arco tangente	y = arctg(x)	$y = tg^{-1}(x)$	x = tg(y)	**R**	$-\pi/2 < y < \pi/2$
arco cotangente	y = arccot(x)	$y = cot^{-1}(x)$	x = cotg(y)	**R**	$0 < y < \pi$
arco secante	y = arcsec(x)	$y = sec^{-1}(x)$	x = sec(y)	] -∞, -1] ou [1,+∞[	$0 \leq y < \pi/2$ ou $\pi/2 < y \leq \pi$
arco cossecante	y = arccosec(x)	$y = cosec^{-1}(x)$	x = cosec(y)	]-8,-1] ou [1, +∞[	$-\pi/2 \leq y < 0$ ou $0 < y \leq \pi/2$

Outras propriedades das funções trigonométricas inversas:

A) arcsen(x), arctg(x) e arccossec(x) são ímpares;

B) arccos(-x) = π − arccos(x), para – 1 ≤ x ≤ 1;

C) arccotg(-x) = π − arccotg(x), para todo x real;

D) arcsec(-x) = π − arcsec(x), para todo x de R – [- 1, 1].

E) arctg x + arccotg x = $\pi/2$, para todo x real;

F) arcsec x + arccossec x = $\pi/2$, para todo x ∈ $R - (-1;\ 1)$;

G) arcsen x + arccos x = $\pi/2$, para todo x ∈ $[-1;\ 1]$.

Usando as propriedades dadas das funções trigonométricas inversas, determine o domínio, o conjunto imagem e o esboço dos gráficos das seguintes funções de variável real:

1) y = 3arcsen(2x – 1);

2) y = 2arccos(x/3 + 1);

3) y = $\left|\frac{\pi}{4} - arctg(x-1)\right|$;

4) y = sen(arccosx)cos(arcsenx);

5) y = arcsen(x^4) + arcos(x^4) + arctg(x^4) + arccotg(x^4) + arcsec(x^4) + arccossec(x^4).

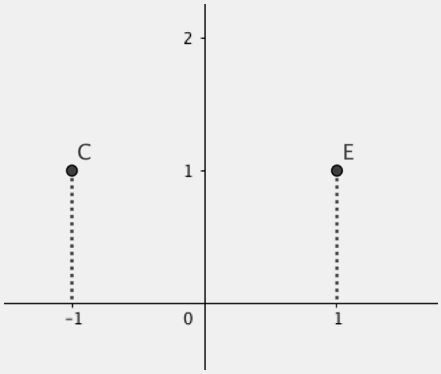
6) y = $\frac{arcsen\ x}{|arcsen|x||} + \frac{|arccos|x||}{arccos|x|} + 1$.

7) y = $\frac{arcsen\ x}{\arccos x}$;

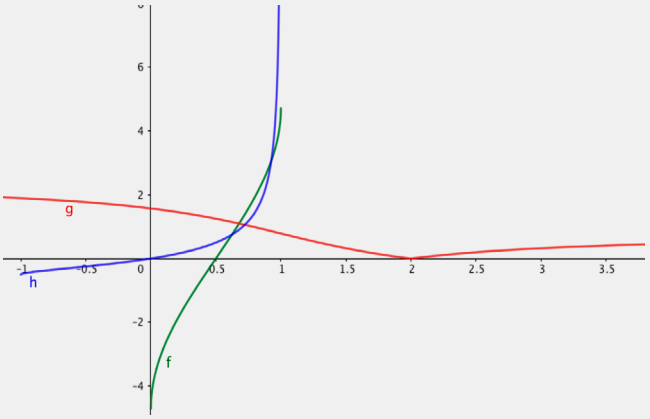
8) y = arcsen(senx); y = arcsen(cosx); y = arccos(cosx) e y = arctg(tgx).

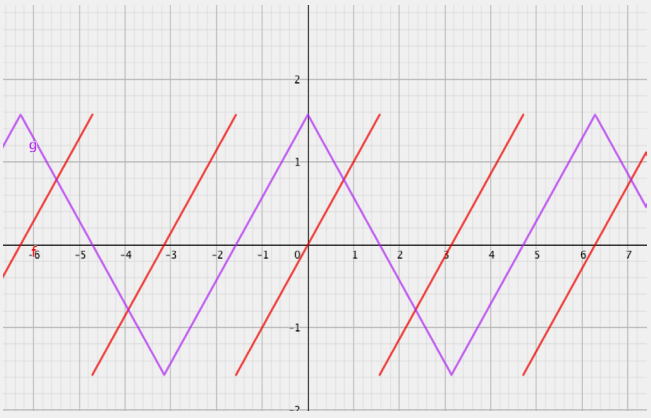
Resolução do item (4):

Temos que arcsen(x^4) + arcos(x^4) = $\frac{\pi}{2}$, arctg(x^4) + arccotg(x^4) = $\frac{\pi}{2}$ e arcsec(x^4) + arccossec(x^4) = $\frac{\pi}{2}$. Logo, y = $\frac{3\pi}{2}$, que é uma função constante. Em virtude disso, o conjunto imagem dessa função é Im = $\{\frac{3\pi}{2}\}$. Precisamos agora, determinar o seu Domínio. Fazendo a interseção dos domínios das seis funções inversas, obtemos: D = {-1, 1}. Observe que ela é uma função par. Seu gráfico é



Obs.: Após respem quer cada um desses exercícios, faça uma verificação usando o aplicativo WoolframAlpha. Mas suas resoluções devem ser feitas sem esse auxílio. Os gráficos também podem ser visualizados com o Geogebra. Para ilustrar o uso desse aplicativo, mostraremos os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções f(x) = 3arcsen(2x – 1) do item (1), g(x) = $\left|\frac{\pi}{4} - arctg(x-1)\right|$ do item(3) e h(x) = $\frac{arcsen\ x}{\arccos x}$ do item 7; e em outra figura, os gráficos de f(x) = arctg(tgx) e g(x) = arcsen(cosx) do item (8). Veja a seguir.





Para exemplificar mais o uso das definições e propriedades apresentadas, vamos resolver as equações:

A) arcsen x + arcsen(2x) = arccos x.

B) arcsenx – arcosx = arcsen(3x – 2).

A) Temos que -1 ≤ x ≤ 1 e arcsenx + arsen(2x) = $\frac{\pi}{2}$ – arcsenx ⇔ 2arsenx = $\frac{\pi}{2}$ – arcsen(2x) ⇔ 2arcsenx = arccos(2x). Pondo arsenx = α, obtemos: cos2α = 2x e senα = x. Logo $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 2x \Leftrightarrow 1 - x^2 - x^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação obtemos x = $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Mas -1 ≤ x ≤ 1 e $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$, então x = $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

B) Temos que -1 ≤ x ≤ 1 e -1 ≤ 3x – 2 ≤ 1, que implica 1/3 ≤ x ≤ 1. Usando arcosx = $\frac{\pi}{2}$ – arcsenx e colocando arsenx = α, obtemos: $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ = arsen(3x – 2) => $\text{sen}(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = 3x - 2 \Leftrightarrow -\cos 2\alpha = 3x - 2 \Leftrightarrow 2\text{sen}^2\alpha - 1 = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Resolvendo essa equação, encontramos: x = 1 ou x = ½. Como 1/3 ≤ x ≤ 1, então concluímos que as raízes da equação dada são: 1 e ½.

TEOREMA (Soma de arcos tangentes):

A) arctgx + arctgy = arctg($\frac{x+y}{1-xy}$), se xy < 1;

B) arctgx + arctgy = arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) + π, se xy > 1 e x > 0 , y > 0;

C) arctgx + arctgy = arctg$\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ – π, se xy > 1 e x < 0 , y < 0.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam $\alpha = arctgx$ e $\beta = arctgy$. Então $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$. Disso segue $(*)$ $\alpha + \beta =$ arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) + nπ, n inteiro. Agora vamos determinar os valores de n.

Por definição, temos que:

I) $-\frac{\pi}{2}$ < arctgx < $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ < arctgy < $\frac{\pi}{2}$;

II) $-\frac{\pi}{2}$ < arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) < $\frac{\pi}{2}$.

Usando (I) e (II), combinado com (*), obtemos:

(I) – π < arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) + nπ < π;

(II) $-\frac{\pi}{2}$ < - arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) < $\frac{\pi}{2}$.

Adicionando, membro a membro, (III) e (iv), tem-se que : $-\frac{3\pi}{2}$ < n π < $\frac{3\pi}{2}$, o que implica n = - 1, n = 0 ou n = 1.

Por outro lado: cos($\alpha + \beta$) = $cos\alpha.cos\,\beta - sen\alpha sen\beta$ = $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$. Ou seja, cos($\alpha + \beta$) = $\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

Fazendo Q = arctg($\frac{x+y}{1-xy}$), obtemos cosQ = $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}}$. Disso segue que cos(Q + nπ) = cosQ.cosnπ = $\frac{|1-xy|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.cosn$\pi$.

Obs.: $(1-xy)^2 + (x+y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$.

Da igualdade cos($\alpha + \beta$) = cos(Q + nπ) obtemos: cos($n\pi$) = $\frac{1-xy}{|1-xy|}$.

Sabemos que (v) $\begin{cases} arctgx > 0 \ e \ arctgy > 0 \Leftrightarrow x > 0 \ e \ y > 0. \\ arctgx < 0 \ e \ arctgy < 0 \Leftrightarrow x < 0 \ e \ y < 0. \end{cases}$

Se xy < 1, então cos($n\pi$) = 1 => n = 0.

Se xy > 1, então cos($n\pi$) = - 1 => n = - 1 ou n = 1.

Por (*) e (v) deduzimos que: (x > 0 e y > 0 => n = 1) e (x < 0 e y < 0 => n = - 1).

Perceba que xy > 1 e x < 0, y < 0 => $\frac{x+y}{1-xy} > 0 \Leftrightarrow$ arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) > 0. Por outro lado, x < 0 e y < 0 implica $\alpha + \beta$ = < 0, que equivale a arctg($\frac{x+y}{1-xy}$) + nπ < 0. Logo $n\pi < 0$ => n = - 1.

APLICAÇÕES ILUSTRATIVAS:

→ Para ilustrar uma aplicação do teorema anterior, vamos calcular o valor de

M = arctg2 + arctg5 + arctg8.

Apliquemos, primeiramente, o teorema para as duas primeiras parcelas. Temos que

M = arctg($\frac{2+5}{1-2.5}$) + kπ + arctg8. Como 2.5 > 1, então k = 1, que implica

M = arctg($-\frac{7}{9}$) + π + arctg8. Agora vamos calcular arctg($-\frac{7}{9}$) + arctg8.

Pelo teorema temos que arctg($-\frac{7}{9}$) + arctg8 = arctg($\frac{8-\frac{7}{9}}{1+\frac{56}{9}}$) + k$\pi$.

Como $(-\frac{7}{9}).8 < 0 < 1$, então k = 0. Logo M = π + arctg($\frac{65}{65}$) = π + arctg 1 = $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. → Outra aplicação do teorema anterior:

resolver a equação

arctg x + 2arctg(2x) = arctg(7x).

Para isso colocamos essa equação na forma:

arctg(7x) – arctg(x) = 2arctg(2x)

Aplicando o teorema ao primeiro membro e pondo α = arctg(2x), obtemos:

$$\text{arctg}\left(\frac{6x}{1+7x^2}\right) + n\pi = 2\alpha.$$ Como 7x(-x) = -7x² < 0 < 1, então n = 0.

Logo $\text{arctg}\left(\frac{6x}{1+7x^2}\right) = 2\alpha$, que implica $\frac{6x}{1+7x^2} = \text{tg}(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{4x}{1-4x^2}$.

Ou seja

$$\frac{6x}{1+7x^2} = \frac{4x}{1-4x^2}$$ x = 0 ou 6 – 24x² = 4 + 28x² x = 0 ou 1 = 26x².

Portanto, as raízes da equação dada são: 0, $\frac{1}{\sqrt{26}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Obs.: Se x > 0 e y > 0, então vale a regra: arctgx – arctgy = $\text{arctg}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$. Também valem as seguintes propriedades:

A) arcsenx = arccossec(1/x), para -1 ≤ x ≤ 1 e x ≠ 0;

B) arccosx = arcsec(1/x), para -1 ≤ x ≤ 1 e x ≠ 0;

C) arctgx = arccotg(1/x), para x > 0;

D) arctgx = arccotg(1/x) – π, para x < 0.

Mais algumas questões sobre funções trigonométricas inversas estão colocadas a seguir.

QT-183. Seja n um número inteiro positivo. Calcular o valor de n na igualdade:

$$\text{arctg}\left(\frac{2n}{1+n^4-n^2}\right) + \text{arctg}(n^2-n) = \text{arctg}(2) + \text{arctg}\left(\frac{4}{13}\right).$$

QT-184. Resolva a equação trigonométrica:

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \text{arccotg}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = \pi,$$ com x > 0, x real.

QT-185. Calcule a soma dos n primeiros termos da série

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{13}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{21}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{31}\right) + \ldots$$

QT-186. (**ITA- 2010**). A equação em x, $\text{arctg}(e^x+2) - \text{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}$, $x \in R^*$,

A) admite infinitas soluções, todas positivas.

B) admite uma única solução, e esta é positiva.

C) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

D) admite apenas soluções negativas.

E) não admite solução.

QT-187. (IME-2017/2018). A menor raiz real positiva da equação $arctg\,(x.tg\,(arcsen(\frac{3}{5}))) = \frac{2\pi}{x+2}$ encontra-se no intervalo:

A) (0,1].

B) (1,2].

C) (2,3].

D) (3,4].

E) (4,5].

QT-188. (ITA-2005). O intervalo I $\subset R$ que contém todas as soluções da inequação $arc\,tg\left(\frac{1+x}{2}\right) + arc\,tg\left(\frac{1-x}{2}\right) \geq \frac{\pi}{6}$ é

A) [-1, 4]. **B)** [-3, 1]. **C)** [-2, 3]. **D)** [0, 5]. **E)** [4, 6].

QT-189. (ITA-2008). Sendo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de $cos(arcsen\,\frac{3}{5} + arccos\,\frac{4}{5})$.

A) 6/25. **B)** 7/25. **C)** 1/3. **D)** 2/5. **E)** 5/12.

QT-190. Construa o gráfico da função real $f(x) = arccos(cosx) - arcsen(senx)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

QT-191. Determine o valor de B = $arcsen(cos9\pi/11) + arccos(sen12\pi/11)$.

QT-192. (ITA-2017) Seja f : [-1, 1] → $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a função definida por f(x) = arcsen(x). Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f(\frac{2\pi}{3^n})$ é igual a

A) $\frac{253\pi}{162}$. **B)** $\frac{245\pi}{162}$. **C)** $-\frac{152\pi}{81}$. **D)** $-\frac{82\pi}{81}$. **E)** $-\frac{79\pi}{162}$.

QT-193. Se arctg(x – 1) + arcsec(x + 1) = nπ, n inteiro, então calcule o valor de

M = arctg(cotg x) + arccotg(tg(1/x)).

QT-194. (IME-1978/1979). Achar os valores de x que satisfazem a equação:

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = arc\,sen(\cos x).$$

QT-195. Sejam a, b e c números reais positivos tais que ab + bc + ca = 1. Prove que

arctg (1/A) + arctg(1/B) + arctg(1/C) = π.

QT-196. Encontre o valor da expressão

$$arc\,tg(\frac{1}{2}(\cos(2a)\sec(2b) + \cos(2b)\sec(2a)) - arc\,tg(tg^2(a+b)tg^2(a-b))\Big)$$

QT-197. (**IME – 2012**). Seja arcsen x + arcsen y + arcsen z = $\frac{3\pi}{2}$, em que x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo [–1, 1]. Determine o valor de

$$x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}.$$

A) –2. **B)** –1. **C)** 0. **D)** 1. **E)** 2.

QT-198. (**IME-2000/2001**). Calcule o valor exato de

$$sen\left[2arc\,cotg\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2arc\,cossec\left(\frac{5}{4}\right)\right].$$

QT-199. (JNCF). Esboce o gráfico da função real definida por

f(x) = 2arccos(cosx) – 3arcsen(senx) no intervalo [0, 4π].

QT-200. (JNCF). Esboce o gráfico da função real definida por

f(x) = 2arccos(cos2x) – 3arcsen(senx) no intervalo [0, 4π].

QT-201. (JNCF). Esboce o gráfico da função real definida por

f(x) = 2arccos(cos x) – 3arcsen(sen2x) no intervalo [0, 4π].

QT-202. (JNCF). Esboce o gráfico da função real definida por

f(x) = 2arccos(cos3x) – 3arcsen(sen2x) no intervalo [0, 4π].

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-T(4)

DRN-T156:

Use $x = tga,\ y = tgb$ para transformar a expressão dada em $\frac{1}{2}\, sen\, 2(a+b)$.

DRN-T157:

Sendo $sen^2x - \sqrt{2}sen\,x + 1 = \left(senx - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$ e $sen^4x + cos^4x = 1 - \frac{sen^2(2x)}{2}$, então a equação dada pode ser escrita na forma equivalente:

$$[(senx - \tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + \tfrac{1}{2}](1 - \tfrac{sen^2(2x)}{2}) = \tfrac{1}{4}\ .\ (1)$$

Por outro lado, temos que

$[(senx - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}] \geq \frac{1}{2}$ e $[1 - \frac{sen^2(2x)}{2}] \geq \frac{1}{2}$. (2)

Combinando (1) e (2) com a lei da tricotomia dos reais, deduzimos que senx = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $sen^2(2x) = 1$. Resolvendo este sistema, encontramos: x = $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou x = $\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ = $-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$, que equivale a x = $(-1)^n(\frac{\pi}{4}) + \pi n$, n inteiro.

DRN-T158:

Use a identidade $\cos(a) = cos^3\left(\frac{a}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{a}{3}\right)$, para todo a real. A seguir faça transformação soma-produto.

DRN-T159:

Use a fórmula de Hierão da área de um triângulo e S = abc/4R para provar a primeira desigualdade. Depois combine a fórmula S = pr com a de Hierão para provar a segunda. Observar na primeira que $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$, pois $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.

E verificar na segunda que $\frac{abc}{8(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4r^2}$, o que equivale, fazendo a mudança de variáveis, a $\frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{4r^2}$.

Disso vem $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{4r^2}$.

E sendo $yz \leq a^2$, $xz \leq b^2$ e $xy \leq c^2$, deduza a segunda desigualdade.

DRN-T160:

Verificar que R/r = $\frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$, b = $a\text{sen}\alpha$ e c = $a\cos\alpha$.

▶ **Resp.:**

A) R/r = $\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}$. **B)** $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ R/r = $\sqrt{2} + 1$.

DRN-T161:

Reveja a QT-62.

DRN-T162:

Temos que $(1 + sen x)(1 + \cos x) = 1 + sen x + \cos x + \frac{1}{2} sen 2x = 1 + \sqrt{2} sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} sen 2x \leq 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 3/2 + \sqrt{2}$.

Observe que a igualdade ocorre quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, k inteiro.

DRN-T163:

Use o quadrado da diferença de dois termos para cada parcela e depois as some. Máximo = n/2.

DRN-T164:

Sem perda de generalidade, podemos supor que A ≥ B ≥ C. Disso segue que os lados opostos respectivos satisfazem à condição a ≥ b ≥ c. Assim, basta provarmos que B + C < 30º.

Pela lei dos senos temos $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$.

Disso segue $\frac{a}{senA} = \frac{b+c}{senB+senC} \Leftrightarrow a(senB + senC) = (b + c)senA. \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{senA}{senB + senC}$ **(1)**

Pela desigualdade triangular $a < b + c$. Usando isso em (1), encontramos:

$$senA < senB + senC \quad \textbf{(2)}$$

Por outro lado, decorre da hipótese que $senB + senC \leq 1 - senA$ **(3)**

Combinando (2) com (3), obtemos: $senA < 1 - senA \Leftrightarrow 2senA < 1 \Leftrightarrow senA < \frac{1}{2}$.

Mas $senA = sen(B + C)$, então $\boldsymbol{sen(B + C) < \frac{1}{2}}$, que implica **B + C < 30º**, pois A ≥ B ≥ C. Observe que em virtude disso A > 150º.

NOTA:

Lembre-se que, de um modo geral, para um triângulo qualquer ABC, sempre temos a desigualdade: $senA + senB + senC \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$**.** Ela decorre da lei dos senos e da desigualdade a + b + c ≤ $3\sqrt{3}R$, que por sua vez provém do teorema: "**De todos os triângulos inscritos em um mesmo círculo de raio R, os equiláteros têm perímetro máximo**." Na questão estamos impondo um limite menor, que é 1, no lugar de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ≈ 2,6.

DRN-T165:

Desenvolva o primeiro membro e use MA ≥ MG combinada com fórmulas do arco duplo.

DRN-T166:

Sabemos que (senx + cosx)³ = sen^3x + cos³x + 3senxcosx(senx + cosx). Com isso a equação dada fica na forma:

(senx + cosx)[(senx + cosx)² – 3senxcosx] = 1 – (senxcosx)² ⇔

(senx + cosx)[1 – senxcosx] = (1 – senxcosx)(1 + senxcosx) ⇔

senxcosx = 1 ou senx + cosx = 1 + senxcosx, que equivale a sen2x = 2(absurdo!)

ou senx(1 – cosx) = 1 – cosx ⇔ cosx = 1 ou senx = 1.

Disso segue que x = $2k\pi$ ou x = $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k inteiro.

DRN-T167:

Faça $a = tg\ x, b = tg\ y$ e $c = tg\ z$, com $x, y, z \neq \frac{k\pi}{4}$, k inteiro. Lembre-se de tg x + tg y + tg z = tgx. tgy.tgz , o que implica tg(x + y + z) = 0. E use arco duplo para tg(2x + 2y + 2z).

DRN-T168:

Por transformação soma-produto temos que cos3x + cos9x = 2cos6xcos3x. Substituindo isso na equação dada, obtemos:

2cos6x + 2cos6xcos3x = 0 ⇔ 2cos6x(1 + cos3x) = 0 ⇔ cos6x = 0 ou cos3x = -1.

Resolvendo essas equações obtemos as seguintes soluções gerais:

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ k inteiro.}$$

Como $0 \leq x \leq \pi/2$, então substituindo os valores 0, 1 e 2 de k na primeira solução geral e k = 0 na segunda, encontramos as soluções possíveis nesse intervalo: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$. Somando-as, obtemos o valor $\frac{13}{12}\pi$.

▶ **Resp.:** (E).

DRN-T169:

Usando as identidades $sen^2x + \cos^2x = 1$, $sen2x = 2sen x \cos x$ e $2\cos^2x = 1 + \cos 2x$, f(x) pode ser colocada na forma: $f(x) = 3 + 3sen2x + \cos 2x$. (1)

Lembremos que $asen x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}sen(x + \theta)$, com $sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $tg\ \theta = \frac{b}{a}$. Aplicando isso em (1), obtemos:

$f(x) = 3 + \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}sen2x + \frac{1}{\sqrt{10}}cos2x\right) = 3 + \sqrt{10}sen(2x + \theta)$, em que $tg\ \theta = \frac{1}{3}$.

Como os valores máximo e mínimo de $sen(2x + \theta)$ são 1 e – 1, então, concluímos que os valores máximo e mínimo de f(x) são $3 + \sqrt{10}$ e $3 - \sqrt{10}$, respectivamente.

DRN-T170:

Mostre que $gx_1 cos x_i < sen x_i < tgx_n cos x_i$, para i = 1, 2,...,n. Depois adicione as desigualdades.

DRN-T171:

Desenvolvendo $sen(a+x)$ e usando as fórmulas $sen2x = 2sen x \cos x$ e $2\cos^2x = 1 + \cos 2x$, na equação dada, obtemos: $\frac{1}{2}$sen$a$.(1 + cos2x) + $\frac{1}{2}sen2x.\cos a = sen a$ ⇔ $\frac{1}{2}$(sen$a$ + sen$a$.cos2x + $sen2x.\cos a$) = sen$a$ ⇔ sen$a$ + sen(a + 2x) = 2sen$a$ ⇔ **sen(a + 2x) = sen$a$ =>**

a + 2x = a + 2kπ ou a + 2x = $\pi - a$ + 2kπ, k inteiro.

Disso segue que x = kπ ou x = $\frac{\pi}{2} - a$ + kπ, k inteiro.

No intervalo [0, 2π], com 0 < a < π/2, temos as soluções:

$$\{0, \pi, 2\pi\} \text{ e } \{\frac{\pi}{2} - a, \frac{3\pi}{2} - a\} \text{ cuja soma é } \mathbf{5\pi - 2a}.$$

▶ **Resp.: (E).**

DRN-T172:

A inequação dada é equivalente a senx - cosx > $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$. E sendo senx – cosx = $\sqrt{2}sen$ (x – $\frac{\pi}{4}$), temos que $\sqrt{2}sen$ (x – $\frac{\pi}{4}$) > $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ ⇔ sen (x – π/4) > $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$ ⇔ sen (x – $\frac{\pi}{4}$) > sen ($\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$) = sen($\frac{5\pi}{12}$) => $\frac{5\pi}{12}$ < x – $\frac{\pi}{4}$ < $\frac{7\pi}{12}$ ⇔ $\frac{2\pi}{3} < \boldsymbol{x} < \frac{5\pi}{6}$.

Logo a resposta certa é C.

Obs.: Um auxílio muito bom nas inequações é o esboço do ciclo trigonométrico.

DRN-T173:

Multiplique e divida o produto dado por 2cos($\frac{\pi}{14}$) e use arcos complementares para obter $\frac{2sen\frac{4\pi}{14}.cos\frac{4\pi}{14}}{2^3 cos\frac{\pi}{14}}$ = 1/8. Logo b = 8.

DRN-T174:

Lembre-se que em todo triângulo ABC, um dos ângulos internos é sempre Igual ou maior do que 60º.

NOTA (Teorema de Jung):

Há um teorema, conhecido como Teorema de Jung, que generaliza essa questão, garantindo que L está contido em um círculo de raio R ≤ d/$\sqrt{3}$. Pode se provar esse teorema por indução, tendo antes de provar o seguinte resultado: Se três círculos quaisquer de um conjunto de n círculos têm um ponto comum, então todos os n círculos têm um ponto comum. Além disso, se L for infinito,isto é, se n → ∞ o teorema continua sendo válido. Uma generalização mais ampla dele pode ser enunciada assim: Qualquer figura plana de diâmetro d pode ser coberta por um círculo de raio R ≤ d/$\sqrt{3}$.

Uma abordagem introdutória sobre esse tema se encontra na referência [Fletcher, 1972, vol. 3]. Usando IA generativa aprenda mais sobre esse teorema e suas aplicações, inclusive na própria IA, como: sistema de recomendações, visão computacional e redes neurais.

DRN-T175:

Decorre da hipótese o seguinte: $cos^2A = \frac{sen^2B}{cos^2B} = \frac{1}{cos^2B} - 1$. (1)

E de modo análogo, obtemos:

$$(2) \quad cos^2B = \frac{1}{cos^2C} - 1 \text{ e } (3)\ cos^2C = \frac{1}{cos^2A} - 1.$$

De (2) e (3) segue $cos^2B = \frac{2cos^2A - 1}{1 - cos^2C}$. Substituindo este valor em (1), encontramos:

$cos^2A = \frac{1 - cos^2A}{2cos^2A - 1} - 1 = \frac{2 - 3cos^2A}{2cos^2A - 1}$. Disso vem $2\,cos^4A + 2\ cos^2A - 2 = 0\ \ cos^4A + cos^2A - 1 = 0.$

Dessa equação, obtemos $cos^2A = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\varphi} \Rightarrow sen^2A = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2} \Rightarrow \boldsymbol{senA = \frac{1}{\varphi}}$.

Lembre-se: $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Por outro lado, substituindo $cos^2A = \frac{1}{\varphi}$ em (3), encontramos:

$$cos^2C = \varphi - 1 \Rightarrow sen^2C = 2 - \varphi = \frac{2\varphi - \varphi^2}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} \Rightarrow \boldsymbol{senC = \frac{1}{\varphi}}.$$

De maneira análoga deduzimos que $\boldsymbol{senB = \frac{1}{\varphi}}$, o que conclui a prova.

DRN-T176:

Esboce uma figura adequada. Mostre que φ é o ângulo entre as alturas de duas faces. Se ABC é a base da pirâmide, D é o ponto comum das duas alturas e DH a altura do triângulo BCD em relação ao lado BC, então $BC = BD \cdot 2sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Deduza disso e de relações da figura que $BC = b\sqrt{4 - \frac{1}{sen^2\frac{\varphi}{2}}}$

A partir dessa fórmula deduza que φ > 60°. Observe que

AB = BC = 2b.cos $(D\hat{A}B)$ e $sen(D\hat{A}B) = \frac{BD}{AB}$. Logo $sen(D\hat{A}B)$ = $2sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

DRN-T177:

Sendo $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, k inteiro, então $sen\alpha$ e $cos\alpha$ são não nulos, o que permite colocarmos a equação dada na forma:

$$sen(n\alpha)cos\alpha - sen\alpha cos(n\alpha) = (n-1)sen\alpha cos\alpha \Leftrightarrow sen(n-1)\alpha = \left(\frac{n-1}{2}\right)sen2\alpha. \qquad (1)$$

Tomando $\alpha = \frac{\pi}{4}$, temos que $\left(\frac{n-1}{2}\right)sen2\alpha = \frac{n-1}{2}$. Mas $\frac{n-1}{2} > 1$ se n ≥ 4.

E como $sen(n-1)\alpha \leq 1$, então não há solução para (1) se n ≥ 4.

Precisamos analisar n = 1, n = 2 e n = 3. Para n = 1, temos sen(0) = 0 = 0.$sen2\alpha$. Logo n = 1 satisfaz (1). Para n = 2, temos $sen\alpha = \frac{sen2\alpha}{2}$, que não é válida para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, por exemplo. Logo n = 2 não satisfaz (1). Para n = 3, temos $sen2\alpha = sen2\alpha$, que é uma identidade.

Portanto, os únicos valores inteiros positivos de n, que satisfazem à equação dada, são 1 e 3.

DRN-T178:

Faça a mudança de variáveis: a = y + z, b = z + x e c + y + x. Em seguida, use fórmula de Hierão e MA ≥ MG para obter $(A'B'C') \geq \sqrt{\frac{3(x+y+z)27(xyz)}{16}} = \frac{9}{4}(ABC)$.

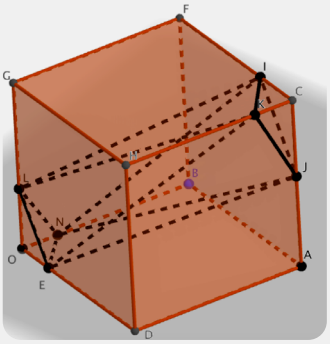
DRN-T179:

Escolha como ceviana a bissetriz de um dos ângulos da base de ABC. Além da semelhança, use o Teorema do Lado Comum. Verifique também que a razão entre os dois triângulos componentes é φ ou $\frac{1}{\varphi}$.

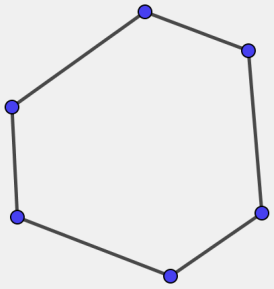
Obs.: A partir desse resultado, perceba que a razão entre o circunraio e o lado de um decágono regular é igual a φ. Reveja a QT-130.

DRN-T180:

Use a figura a seguir e geometria analítica(equação de plano, distância de ponto a plano) para calcular o volume de uma das pirâmides de base retangular que compõem o sólido S. Observe que S se situa entre as bases triangulares regulares das duas pirâmides dos “cantos” opostos do cubo. A própria sala de aula serve para se visualizar e compreender a figura esboçada.

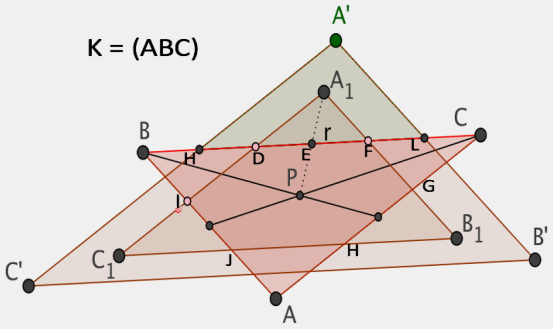


Alguns resultados: Vol(S) = 184000/3 cm³; Vol(P) = $2000\sqrt{531}$ cm³; aresta do cubo = 90cm; O formato da seção de área máxima é um hexágono regular e ela é equidistante das bases de S. A seguir o formato hexagonal de uma seção transversal de S paralela às bases. Três lados têm um mesmo comprimento k e os outros três têm um comprimento comum k’. A exceção ocorre na seção equidistante das bases: é um hexágono regular, conforme já mostrava a projeção ortogonal de uma base sobre a outra.



DRN-T181:

Inicialmente, construímos uma figura que apresente os principais dados da questão. E seja K = (ABC). Então K = $(A_1B_1C_1)$.



1ª Parte(Antes da homotetia):

Pondo r = EA_1, temos que $(A_1DF)/K = (r/3r)^2 = 1/9$ => **$(A_1DF) = K/9$.** De modo análogo, deduzimos que $(B_1GH) = K/9$ e $(C_1IJ) = K/9$.

2ª Parte(Após a homotetia):

PA'/ PA_1 = m . Precisamos calcular $\alpha = \frac{PA'-r}{PA_1-r}$ para avaliar (A'HL). Como PA_1 = 2r, então

$$\alpha = \frac{PA'-r}{PA_1-r} = \frac{m(2r)-r}{2r-r} = \frac{(2m-1)r}{r} = \mathbf{2m\ -1.}$$

$(A'HL) = (2m - 1)^2K/9$.

Seja S a área de U. Então **S = K + 3(A'HL).**

Portanto**, $S = K + (2m - 1)^2K/3$.**

3ª Parte: Determinar o intervalo de valores de m, para os quais, a fórmula é válida, bem como os outros casos não incluídos na figura anterior.

Como a homotetia amplia a figura quando m > 1 e reduz a mesma, quando m < 1, então precisamos avaliar os casos não inclusos na figura esboçada.

A figura esboçada apresenta o caso intermediário, em que A'B'C' varia da posição em que é circunscrita ao triângulo ABC até a posição em que é inscrita em ABC. Verificamos que na primeira posição temos S = 4K e na segunda temos S = K, que correspondem, respectivamente, a m = 2 e m = ½. Observe que na segunda posição o triângulo A'HL se degenera em um ponto. Portanto, a fórmula **$S = K + (2m - 1)^2K/3$** é válida para ½ ≤ m ≤ 2.

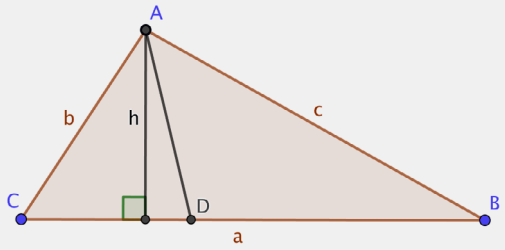
Os outros dois casos são:

- ➔ 0 < m < ½ => S = K, pois A'B'C' está no interior de ABC;
- ➔ m > 2 => $S = (A'B'C') = m^2K$, pois $(A'B'C')/(A_1B_1C_1) = m^2$ e $K = (ABC) = (A_1B_1C_1)$. Lembre-se que a homotetia é uma semelhança.

Obs: Tem uma questão da prova discursiva do IME de 2008/2009 que trata do caso mais simples desta questão: rotação de 180º, sem homotetia.

DRN-T182:

Observe a figura ilustrativa, em que AD é a bissetriz de A. Fazer a mudança de variáveis m = a + b, n = ab e perceber que a e b são raízes da equação $z^2 - mz + n = 0$. A seguir, usar o teorema da bissetriz interna, combinado com a Relação de Stewart, para expressar n em função de m , a e ℓ. Depois, usar a fórmula de Hierão para expressar m em função de a, ℓ e h. Isso garante o cálculo de n, b e c em função de de a, ℓ e h. Por último, use ah = bcsenA = $a$csenB = $a$bsenC para determinar os ângulos A, B e C. Uma alternativa a esse último passo é usar o teorema dos cossenos.



DRN-T183:

Para aplicarmos o teorema da soma de arcos tangentes, precisamos observar que $\frac{2n}{1+n^4-n^2}$, n^2+n e n^2-n são positivos e, por consequência:

$$\text{arctg}\left(\frac{2n}{1+n^4-n^2}\right) = arctg(n^2+n) - arctg(n^2-n).$$

Sendo assim, a equação dada se transforma em:

$arctg(n^2+n)$ = arctg(2) + arctg$\left(\frac{4}{13}\right)$. E como 2.$\frac{4}{13}$ < 1, então

$arctg(n^2+n)$ = arctg$\left(\frac{2+\frac{4}{13}}{1-\frac{8}{13}}\right)$ = arctg(6). Disso segue $n^2+n-6=0$ => **n = 2, pois n > 0.**

DRN-T184:

Façamos A = arccos$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ e B = arccotg$\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)$.

Então, cosA = $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ => senA = $\frac{2x}{1+x^2}$,

pois 0 ≤ A ≤ π. Logo,f cotgA = $\frac{1-x^2}{2x}$.

Como A + B = π, então cotgA = cotg$(\pi - B)$ = - cotgB. Segue disso

$$\frac{1-x^2}{2x} = -\frac{1-x^2}{2x} \Rightarrow 1-x^2 = x^2-1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Mas x > 0, então **x = 1** é a única raiz da equação dada.

DRN-T185:

Sabemos que arctg(A) – arctg(B) = $(\frac{a-b}{1+ab})$, se a > 0 e b > 0. Percebemos que

arctg(2) – arctg(1) = arctg$(\frac{2-1}{1+1.2})$ = arctg$(\frac{1}{3})$,

arctg(3) – arctg(2) = arctg$(\frac{3-2}{1+3.2})$ = arctg$(\frac{1}{7})$,

arctg(4) – arctg(3) = arctg$(\frac{4-3}{1+4.3})$ = arctg$(\frac{1}{13})$, e assim por diante.

Portanto, a série anterior é o limite da soma telescopante seguinte:

S_n = arctg(2) – arctg(1) + arctg(3) – arctg(2) + … + arctg(n + 1) – arctg(n) = arctg(n + 1) – arctg(n)= arctg$(\frac{n}{n+2})$. Ou seja, $\mathbf{S_n = arctg(\frac{n}{n+2})}$.

Finalmente, concluímos que $\lim_{n\to\infty} \text{arctg}(\frac{n}{n+2})$ = arctg(1) = $\frac{\pi}{4}$.

DRN-T186:

Usando a propriedade arccotg(y) = $\frac{\pi}{2}$ – arctg(y) na equação dada, ela fica assim:

$$\text{arctg}(e^x + 2) + \text{arctg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{3\pi}{4}. \quad (1)$$

Sejam a = $\text{arctg}(e^x + 2)$ e b = $\text{arctg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)$. Então tg(a + b) = tg$\frac{3\pi}{4}$ = - 1 $\Leftrightarrow \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga.tgb}} = -1$

$$\text{tga} + \text{tgb} = \text{tga.tgb} - 1 \quad e^x + 2 + \frac{e^x}{e^{2x}-1} = \frac{e^x(e^x+2)}{e^{2x}-1} - 1$$

$$(e^x + 2)(e^{2x} - 1) + e^x = e^x(e^x + 2) - (e^{2x} - 1) \Leftrightarrow (e^x + 3)(e^{2x} - 1) = e^x(e^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$(e^x + 3)(e^x - 1) = e^x \Leftrightarrow \mathbf{e^{2x} + e^x - 3 = 0}.$$

Resolvenda esta última equação, obtemos: $e^x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ x = ln$(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ > 0.

Portanto, a alternativa correta é (B).

Obs.: Digamos que em (1) trocássemos $\frac{3\pi}{4}$ por $\frac{7\pi}{4}$. A solução seria a mesma? Não. Por quê?

DRN-T187:

Sendo arctg(A) < $\frac{\pi}{2}$, temos que $\frac{2\pi}{x+2} < \frac{\pi}{2}$ => x > 2. Seja $\alpha = arcsen(\frac{3}{5})$.

Então a equação dada pode expressar na forma:

$$x.\text{tg}\alpha = \text{tg}(\frac{2\pi}{x+2}). \quad (1)$$

Mas sen$\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$, pois sen$\alpha = \frac{3}{5} > 0 \Rightarrow 0 < arcsen(\frac{3}{5}) < \frac{\pi}{2}$. Segue disso que tg$\alpha = \frac{3}{4}$.

Substituindo esse valor em (1), obtemos a equação:

$$\frac{3x}{4} = \mathbf{tg}(\frac{2\pi}{x+2}) \quad \mathbf{(2)}$$

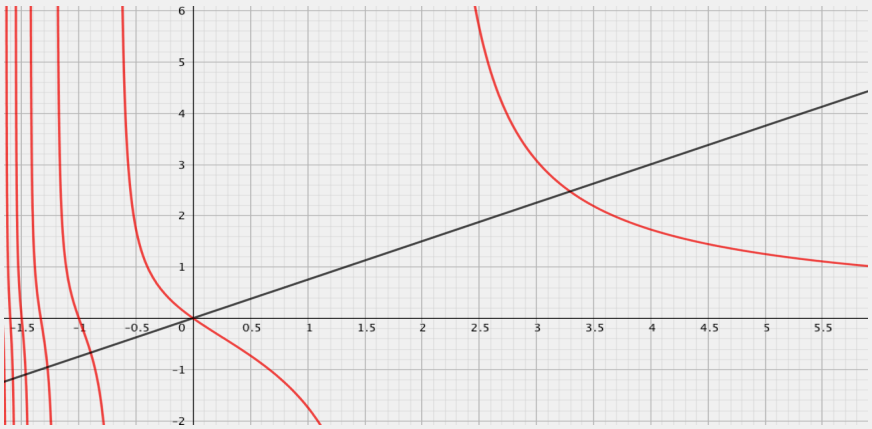
Perceba que o primeiro membro é uma função contínua crescente e o segundo membro é uma função contínua decrescente, para x > 2. Logo só pode existir uma raiz real de (2). Seja

f(x) = $\frac{3x}{4}$ – tg($\frac{2\pi}{x+2}$). Verificamos que f(3) = $\frac{9}{4}$ – $tg\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ = $\frac{9}{4}$ – tg(72°) = $\frac{9}{4}$ – $\sqrt{5+2\sqrt{5}} < 0$,

pois $\sqrt{5+2\sqrt{5}} > 3$. E f(4) = 3 – $tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = 3 – $\sqrt{3} > 0$.

Pelo Teorema do valor intermediário existe uma raiz de (2) no intervalo (3, 4). Como x > 2, então a menor e única raiz positiva está nesse intervalo. Logo a alternativa correta é (D).

Obs.: A equação (2), sem a restrição inicial x > 2, tem várias raízes negativas, como mostra o gráfico a seguir.



NOTA (Razão áurea e ângulos notáveis):

Ângulos que devem ser considerados notáveis também:

36° = $\frac{\pi}{5}$, 18° = $\frac{\pi}{10}$ e seus complementos 54° = $\frac{3\pi}{10}$ e 72° = $\frac{2\pi}{5}$.

Usando cos3x = sen2x, com x = $\frac{\pi}{10}$ chega-se na equação 4sen^2x + 2senx – 1 = 0, da qual se obtém sen18° = $\frac{1}{2\varphi}$ = $\frac{\bar{\varphi}}{2}$ = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, em que $\bar{\varphi}$ = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é o conjugado da razão áurea φ = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. E com 1 – 2sen^2x = cos2x, obtemos cos36° = $\frac{\varphi}{2}$. Perceba também a relação desses ângulos com os polígonos: pentágono e decágono regulares. A associação desses ângulos com a razão áurea também facilita a fixação deles. Verifica-se que cos18° = $\frac{\sqrt{\varphi+2}}{2}$ = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Disso vem tg72° = $\sqrt{4\varphi+3}$ = $\sqrt{5+2\sqrt{5}} > 3$.

DRN-T188:

Aplicando o teorema da soma de arcos tangentes, obtemos:

$$arc\,tg\left(\frac{1+x}{2}\right)+arc\,tg\left(\frac{1-x}{2}\right)=arc\,tg\left(\frac{\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}}{1-\frac{1-x^2}{4}}\right)+k\pi.$$

E observando que $\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)\leq\frac{1}{4}<1$, temos que k = 0 e por conseguinte,

$$arc\,tg\left(\frac{1+x}{2}\right)+arc\,tg\left(\frac{1-x}{2}\right)=arc\,tg\left(\frac{4}{3+x^2}\right).$$

Assim, a desigualdade inicial fica na forma $arc\,tg\left(\frac{4}{3+x^2}\right)\geq\frac{\pi}{6}$.

Mas, por definição, $arc\,tg\left(\frac{4}{3+x^2}\right)<\frac{\pi}{2}$. Logo, $\frac{\pi}{6}\leq arc\,tg\left(\frac{4}{3+x^2}\right)<\frac{\pi}{2}$.

Como tg(w) é crescente no intervalo $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$, então $tg(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\leq\frac{4}{3+x^2}$ $3+x^2\leq4\sqrt{3}$ $x^2\leq4\sqrt{3}-3$.

E sendo $4\sqrt{3}-3<7-3=4$, concluímos que **- 2 < x < 2.**

Portanto, a alternativa correta é (C).

DRN-T189:

Seja b = $arcsen\,\frac{3}{5}$. Então $senb=\frac{3}{5}$ e $cosb=\frac{4}{5}$. Logo Cos2b = $cos2b-sen2b=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$.

▶ **Resp.:** (B).

DRN-T190:

Como cosx e $senx$ têm ambas domínio R, conjunto imagem [-1, 1] e período 2 π, então D(f) = R e seu período é 2 π. Vamos pois, analisar o gráfico de f, inicialmente, no intervalo [0, 2 π].

Percebemos, pelas definições de arc sen(y) e arc cos(y), que arccos(cosx) = x, se x ∈ [0, π]; arcsen(senx) = x, se x ∈ [- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$]; e arcsen(y) > 0 ⇔ y > 0 e arcsen(y) < 0 ⇔ y < 0. (*)

Logo, no intervalo **[0, $\frac{\pi}{2}$], temos que f(x) = x – x = 0.**

No intervalo $[\frac{\pi}{2},\ \pi]$, temos que arccos(cosx) = **x** e $arcsen(senx)=arcsen(sen(\pi-x))$ = $\boldsymbol{\pi-x}$,

pois x ∈ $[\frac{\pi}{2},\ \pi]$ => $\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e senx ∈ [0, 1], o que satisfaz (*).

Logo, em $[\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\pi}]$, **f(x) = 2x – $\boldsymbol{\pi}$.**

No intervalo $[\pi,\ \frac{3\pi}{2}]$, temos que arccos(cosx) = arccos(cos(2$\pi-x$)) = **2$\boldsymbol{\pi-x}$**

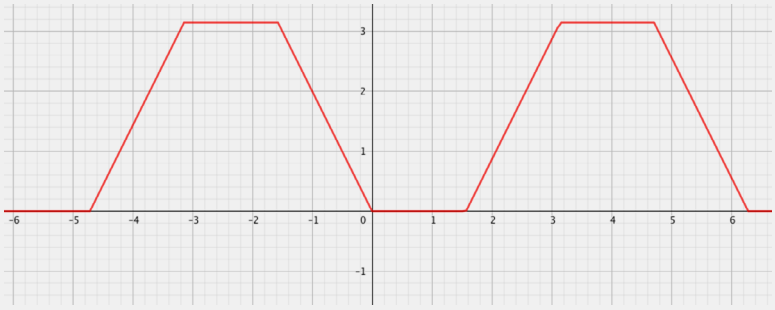
e $arcsen(senx)=arcsen(sen(\pi-x))$ = $\boldsymbol{\pi-x}$, pois x ∈ $[\pi,\ \frac{3\pi}{2}]$ =>

(2$\pi-x$) ∈ $[\frac{\pi}{2},\ \pi]$ e cosx ∈ $[-1,0]$; $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ e senx ∈ [-1, 0], que satisfaz (*).

Logo, no intervalo $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, **f(x) = π .** No intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, temos que

arccos(cosx) = arccos(cos$(2\pi - x)) =$ **$2\pi - x$** e $arcsen(senx) = arcsen(sen(x - 2\pi))$ = **x – 2π**, pois x ∈ $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ => $2\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e cosx ∈ [0, 1]; $x - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e senx ∈ $[-1, 0]$, que satisfaz (*). Logo no intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, **f(x) = $4\pi - 2x$.** Concluímos também, que Im(f) = [0, π].

A figura a seguir, tem o esboço do gráfico no intervalo [-2π, 2π].



DRN-T191:

▶ **Resp.:** B = $\frac{3\pi}{11}$. Obs.: $sen\frac{12\pi}{11} = -sen\frac{\pi}{11}$.

DRN-T192:

▸ **Resp.:** B.

DRN-T193:

Recordemos algumas propriedades conhecidas:

$$(*)\begin{cases} arctg\,\theta + arccotg\,\theta = \frac{\pi}{2} \\ 1 + tg^2\theta = sec^2\theta \\ -\frac{\pi}{2} < arctg\,\theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \le arcsec\,\theta \le \pi \end{cases}.$$

Sejam $a = arctg(x-1)$ e $b = arcsec(x+1)$. Então $tg\,a = x - 1$ e $sec\,b = x + 1$. (1)

E pela hipótese $a + b = n\pi$, n inteiro. Mas de (*) deduzimos que $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \pi$. Logo $-\frac{\pi}{2} < a + b < \frac{3\pi}{2}$ e, por conseguinte, $-\frac{\pi}{2} < n\pi < \frac{3\pi}{2}$, n inteiro.

Essa última desigualdade implica $-\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$, n inteiro, o que nos leva a n = 0 ou n = 1. Ou seja,

$$\boldsymbol{arctg(x-1) + arcsec(x+1) = 0}\ (2)$$

ou

$$\boldsymbol{arctg(x-1) + arcsec(x+1) = \pi.}\ (3)$$

Por outro lado, n = 0 => $a+b=0$ => $b=-a$. Isso implica $\sec b=\sec(-a)=\sec a$. E por (1): $\boldsymbol{\sec a=x+1}$. Isso, combinado com (*) e (1), nos dá $1+(x-1)^2=sec^2a=(x+1)^2$, que implica $x=\frac{1}{4}$, a qual satisfaz à (2). E substituindo $x=\frac{1}{4}$ na expressão de M e usando (*), obtemos:

M = $\frac{\pi}{2}-arccotg\left(cotg\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{\pi}{2}-\boldsymbol{arctg(tg(4))}=\pi-\frac{1}{4}-\boldsymbol{arctg(tg(4-\pi))}=\pi-\frac{1}{4}-(4-\pi)=2\pi-\boldsymbol{\frac{17}{4}}$.

Observe que tg(4) > 0 e $\pi<4<\frac{3\pi}{2}$ => 0 < 4 – π < $\frac{\pi}{2}$. E lembre-se que arctg(y) tem a propriedade: arctg(y) > 0 ⇔ y > 0 e arctg(y) < 0 ⇔ y < 0. Por isso, usamos 4 – π em vez de $\pi-4$.

No caso n = 1, tem-se também $x=\frac{1}{4}$, mas esse valor não satisfaz à (3). Concluímos, pois, que

$$\mathbf{M=2\pi-\frac{17}{4}.}$$

DRN-T194:

Inicialmente temos que: $\pi^2-4x^2\geq 0$ e $-\frac{\pi}{2}\leq arcsen(\cos x)\leq\frac{\pi}{2}$. Disso segue $|x|\leq\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{\pi^2-4x^2}\leq\frac{\pi}{2}$.

Por outro lado, da equação dada deduzimos:

$$\sqrt{\pi^2-4x^2}=\frac{\pi}{2}-arccos(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$$

$$\sqrt{\pi^2-4x^2}=\frac{\pi}{2}-x. \qquad (1)$$

De (1) segue

$4(\pi^2-4x^2)=(\pi-2x)^2 \Leftrightarrow \quad 20x^2-4\pi x-3\pi^2=0.$

Dessa equação, obtemos:

$$x=\frac{4\pi\pm\sqrt{16\pi^2+240\pi^2}}{40}=\frac{4\pi\pm16\pi}{40} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=-\frac{3\pi}{10}.$$

Como $\frac{\pi}{2}-x=\sqrt{\pi^2-4x^2}\leq\frac{\pi}{2}$ => x ≥ 0, então - $\frac{3\pi}{10}$ não é raiz da equação dada.

Perceba que $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$.

Portanto a única raiz dela é $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

DRN-T195:

Temos da hipótese que a > 0, b > 0 e ab < 1. Logo 1/ab > 1. Aplicando o teorema da soma dos arcos tangentes, obtemos:

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{a}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}}\right) + \pi = \text{arctg}\left(\frac{a+b}{ab-1}\right) + \pi.$$

Com isso, a equação original se transforma em:

$\text{arctg}\left(\frac{a+b}{ab-1}\right) + \text{arctg}(1/c) = 0$. (1)

Vamos agora provar (1). Apliquemos de novo o teorema da soma de arcos tangentes, observando

que $\frac{a+b}{ab-1} < 0$ e 1/c > 0: $\text{arctg}\left(\frac{a+b}{ab-1}\right) + \text{arctg}(1/C) = \text{arctg}\left(\frac{c(a+b)+ab-1}{c(ab-1)-(a+b)}\right) =$

$$\text{arctg}\left(\frac{\overbrace{ab+bc+ac}^{1}-1}{abc-c-a-b}\right) = \text{arctg}(0) = 0.$$

DRN-T196:

Perceba que a função dada é uma pequena variação da função referida em Iv-8. O gráfico a seguir foi fe Lembremos que tg(a + B).tg(a – B) = $\frac{sen(a+b).sen(a-b)}{\cos(a+b).\cos(a-b)} \overset{*}{=} \frac{\cos(2b)-\cos(2a)}{\cos(2b)+\cos(2a)}$.

* Por transformação soma-produto.

Sejam A = $\frac{1}{2}(\cos(2a)\sec(2b) + \cos(2b)\sec(2a))$ e B = $\text{tg}^2(a+b)\text{tg}^2(a-b)$.

Aplicando o teorema da soma de arcos tangentes à expressão dada, obtemos:

arctgA – arctgB = $\text{arctg}\left(\frac{A-B}{1+AB}\right)$ + nπ, com n ∈ {0, 1, -1}. Mas B > 0, então

$-\pi <$ arctgA – arctgB $< \frac{\pi}{2}$. Logo n = 0 ou n = - 1.

Ou seja, arctgA – arctgB = $\text{arctg}\left(\frac{A-B}{1+AB}\right)$ ou arctgA – arctgB = $\text{arctg}\left(\frac{A-B}{1+AB}\right) - \pi$. **(1)**

Desenvolvendo e simplificando as expressões de A e B, encontramos

A – B = 1 + AB. Logo $\text{arctg}\left(\frac{A-B}{1+AB}\right) = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Usando isso em (1), obtemos dois valores possíveis para a expressão dada: $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{3\pi}{4}$.

DRN-T197:

O maior valor de arcsen B é $\frac{\pi}{2}$. Logo x = y = z = 1, o que implica em 1 + 1 + 1 – 9/3 = 0. Resp. C.

DRN-T198:

Soma é igual a sen2x + cos2y = 2sen(x)cos(x) + $\cos^2 y - \text{sen}^2 y$ = 2(12/25) + 9/25 – 16/25 = 17/25.

Os gráficos relacionados com questões QT-119 / 202 foram feitos com o Geogebra.

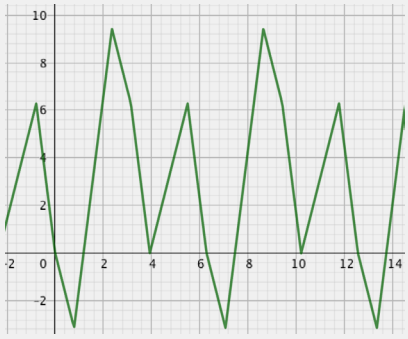
DRN-T199



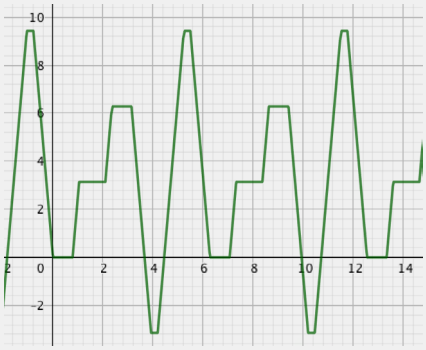
DRN-T200



DRN-T201



DRN-T202



EXTENSÕES QUADRÁTICAS E PROBLEMAS DA ANTIGUIDADE

Sabemos que R é um **corpo ordenado completo** e que Q não tem essa propriedade. E isso é percebido, por exemplo, quando verificamos que $\sqrt{2}$ não pertence a Q. Sabemos também que em R não temos raizes de números negativos. E em virtude disso se criou o corpo dos números complexos C, cujos elementos podem ser representados por x + yi, em que i =$\sqrt{-1}$ e x - yi é o seu conjugado. Agora, queremos construir corpos de números reais, a partir de Q, com a inclusão de raízes de números positivos, de modo análogo ao que foi feito com C a partir de R. Isto é, queremos obter um corpo com elementos da forma x + y$\sqrt{d}$, em que d > 0 pertence a Q e $\sqrt{d}$ não pertence a Q. Por exemplo, o conjunto dos números da forma x + y$\sqrt{2}$ satisfaz essa condição, pois $\sqrt{2}$ não pertence a Q.

Seja K $\subset R$ um corpo ordenado. Denominamos de **Extensão Quadrática** de K ao conjunto K($\sqrt{d}$) = { x + y$\sqrt{d}$; x , y $\in K$ e $\sqrt{d} \notin K$}. Pode ser provado que K($\sqrt{d}$) é um corpo ordenado. De modo análogo a C, chamamos o número x – y$\sqrt{d}$ de conjugado de x + y$\sqrt{d}$. E verifica-se que propriedades análogas àquelas que ocorrem em C, também ocorrem nesse tipo de corpo. Por exemplo, se f é um polinômio com coeficientes em K, então f($\bar{z}$) = $\overline{f(z)}$, para todo z $\in K(\sqrt{d})$ e se f(z_0) = 0, então f($\bar{z_0}$) = 0. Noutros termos, as raízes de f ocorrem em pares conjugados, de modo análogo ao que ocorre com as raízes complexas e não reais dos polinômios de coeficientes reais. Decorre dessa propriedade, mas não só dela, que se f tem grau três, isto é, f(z) = $a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ e possui uma raiz $z_1 \in K(\sqrt{d})$, então existe também uma raiz z_0 de f em K. Para mostrar isso basta usar as relações de Girard. Decorre delas que $z_1 + \bar{z_1} + z_0 = - a_2 / a_3$. Como a soma $z_1 + \bar{z_1}$ pertence a K e $- a_2 / a_3$ também, então $z_0 \in K$.

São analogias como essa que exemplificam, claramente, as Aproximações Multifárias de que falamos na Introdução deste curso de Matemática Intermediária.

Podemos construir uma cadeia sucessiva de extensões quadráticas K_0, K_1, K_2, ... , K_n, em que K_0 = Q e $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_{i+1}})$. Perceba que cada extensão quadrática K_{i+1} dessa cadeia sucessiva é uma extensão quadrática da extensão anterior K_i, para i ≥ 1. Seja W a união de todas as extensões quadráticas construídas assim. Então W tem a seguinte propriedade geral:

"todo número z $\in W$ pode ser obtido por um número finito de adições, subtrações, multiplicações, divisões e extrações de raízes quadradas de números positivos, a partir de 0 e 1." Quando isso ocorre, dizemos que o corpo é um **corpo ordenado euclidiano**. Observe que se z $\in W$, então existe um i tal que z $\in K_i$. Portanto, todos os números de W são algébricos, ou seja, soluções de uma equação polinomial com coeficientes inteiros.Também é fácil perceber que W é diferente de R, pois números reais transcendentes não estão em W. Mas W é denso em R, pois Q $\subset R$ e Q é denso em R.

Verifique que, em virtude da propriedade mostrada acima, se $z_1 \in K_i(\sqrt{d_{i+1}})$ é uma raiz de um polinômio f de grau três com coeficientes em Q = K_0, então existe uma raiz z_0 de f em Q.

Agora, vamos considerar, no plano cartesiano, a representação de todos os pontos do produto cartesiano W x W. Para facilitar a descrição que vem a seguir, vamos criar uma pequena nomenclatura:

ponto-W => um ponto do plano cartesiano que pertence a W x W.

reta-W => uma reta do plano cartesiano que possui dois pontos distintos em W x W; circunferência-W => uma circunferência do plano Cartesiano que tem o centro em W x W e a medida do raio está em W; equação-W => equações da forma $Ax + By + C = 0$ ou $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, nas quais, todos os coeficientes pertencem a W.

Decorrem da propriedade geral de W, as seguintes propriedades:

P1- Toda reta-W é gráfico de uma equação-W da forma $Ax + By + C = 0$ e se uma reta r é o gráfico de uma equação-W dessa forma, então r é uma reta-W.

P2- Toda circunferência-W é gráfico de uma equação-W da forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ e se uma circunferência L é gráfico de uma equação-W dessa forma, então L é uma circunferência-W.

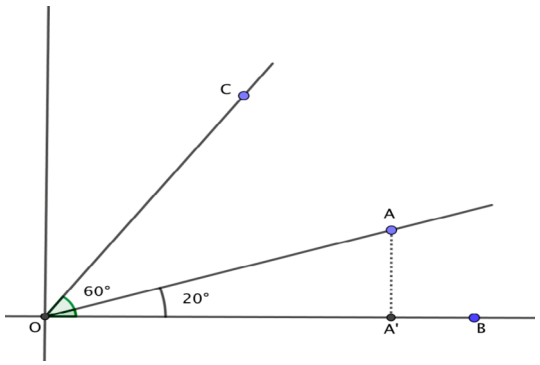
P3- Se P é um ponto na interseção de duas retas-W ou de duas circunferências-W ou de uma reta-W e uma circunferência-W, então P é um ponto-W.

Da antiguidade até o começo do século XIX, como colocamos na Introdução deste nosso curso, alguns problemas desafiaram matemáticos e outros pensadores. Dois deles queremos explicar aqui, com essas ideias desenvolvidas, de modo breve, acima. O primeiro deles é o da trissecção de um ângulo no plano, usando apenas régua e compasso. E o segundo é: usando somente régua e compasso fazer a duplicação(volume) de um cubo. Para não nos alongarmos, devemos dizer aqui que todas as construções geométricas com apenas régua e compasso, no plano, correspem quem às operações algébricas possíveis em um corpo euclidiano como o W referido anteriormente Ou seja, as construções possíveis, com régua e compasso, no plano usual, são também possíveis no “plano” W x W. Dessa maneira, podemos formular os dois problemas da Antiguidade, na linguagem que descrevemos, assim:

W(A) É sempre possível, em W x W, trissectar um ângulo?

(B) Dado um segmento AB, em W x W, é possível construir um segmento CD, em W x W, tal que $\left(\frac{CD}{AB}\right)^3 = 2$?

Para responder a questão (a), vamos analisar a trissecção de um ângulo de 60° em W x W. Queremos saber se podemos obter um ângulo de 20° em W x W. Considere a figura a seguir, em que O, A, B e C estão em W x W.



Mostremos que a projeção ortogonal de A sobre o eixo-x, A', é um ponto-W. Como A' está no eixo-x, sua ordenada é 0; e como sua abcissa é a mesma de A e A está em W x W, então A' é um ponto-W. Por outro lado a distância OA' é a raiz quadrada de um número positivo de W, portanto OA' está em W. Segue disso que $\cos^2 20° = OA'/OA$ está em W. Vamos analisar melhor esse resultado. Sabemos da trigonometria que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Colocando $x = 20°$, obtemos: $\cos 60° = 1/2 = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$, o que equivale a $8\cos^3 20° - 6\cos 20° - 1 = 0$ ou a $(2\cos 20°)^3 - 3(2\cos 20°) - 1 = 0$. Fazendo $y = 2\cos 20°$, essa última igualdade fica assim: (1) $y^3 - 3y - 1 = 0$, que é uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Logo, pelo teorema das raízes racionais, as únicas raízes racionais possíveis são os divisores de 1: -1 ou +1. Mas esses não satisfazem à equação (1), então Concluímos que (1) não tem raiz racional e por conseguinte 2cos 20° e cos 20° não são racionais, o que contraria o teorema citado anteriormente:

"Se $z_1 \in K_i(\sqrt{d_i})$ é uma raiz de um polinômio f de grau três com coeficientes em $Q = K_0$, então existe uma raiz z_0 de f em Q." Na verdade, estamos usando aqui a forma negativa desse teorema: Se f não tem uma raiz em Q, então f não tem uma raiz em W. Concluímos, portanto, que é impossível fazer a trissecção de um ângulo de 60°, com apenas régua e compasso.

Vamos, a seguir, responder a questão (b).

A equação $\left(\frac{CD}{AB}\right)^3 = 2$ pode ser representada na forma mais geral: $x^3 - 2 = 0$. Essa equação é semelhante à equação do item (A) anterior. E como os divisores de 2 são 1, -1, 2 e -2, verificamos que não são raízes dessa equação. Portanto, $x^3 - 2 = 0$ não tem raiz racional. Mas esse resultado satisfaz ao teorema " Se f não tem uma raiz em Q, então f não tem uma raiz em W." Concluímos, pois, que é impossível a duplicação(volume) de um cubo, usando apenas régua e compasso.

Pode-se provar também, pelo mesmo método, que *é impossível se construir um polígono regular de 7 lados,* usando apenas régua e compasso. Isso se deve ao fato de $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ ser raiz da equação cúbica $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, a qual não tem raiz racional. Esse fato pode ser provado usando raízes da unidade, ou seja, raízes de $z^7 = 1$. Disso se obtém que $1 + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{6\pi}{7}) = 0$, que pode ser transformada, com o uso de fórmulas trigonométricas de arco duplo e triplo, na equação $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, em que $x = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$.

O método apresentado, embora de forma resumida, serve para ilustrar como na busca de solucionar um problema antigo, mas desfiador, os matemáticos tiveram que construir conceitos e teorias novas para conseguir sua resolução. Essa é a forma mais frequente de se construir novos tópicos da matemática, quer Intermediária, quer Superior. Também ela mostra a importância de se integrar ou aproximar tópicos diferentes para se descobrir novos resultados, o que reforça nossa visão das Aproximações e Transições Multifárias.

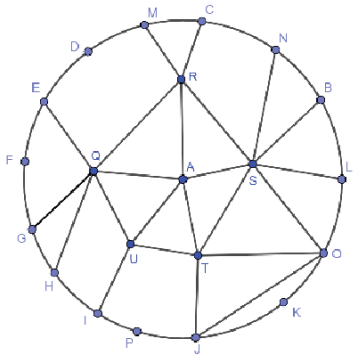
Obs.: Para uma visão mais detalhada desse tópico, veja as referências [Moise, 1990] e [Herstein, 1975].

NOTA (Extensão de corpo e espaço vetorial)

Acrescentamos ainda, que podemos interpretar as extensões quadráticas de um corpo K como espaços vetoriais sobre o corpo K. Perceba que esse tipo de espaço vetorial tem dimensão 2 sobre o corpo K. De fato, qualquer base do espaço vetorial $K(\sqrt{d})$ tem dois vetores linearmente independentes: um vetor u ∈ K e o vetor $\sqrt{d}$. Ou seja, todo vetor de $K(\sqrt{d})$ é da forma xu + y$\sqrt{d}$, que é uma combinação linear dos vetores da base {u, $\sqrt{d}$}. Observe que toda base de $K(\sqrt{d})$ tem essa forma. Se escolhermos u = 1, então teremos a forma que apresentamos acima: x + y$\sqrt{d}$. Adotando essa interpretação vetorial, podemos dizer que as extensões quadráticas sucessivas, construídas anteriormente para formar o corpo ordenado euclidiano, são todas espaços vetoriais com escalares em Q. Porém, se atentarmos bem para sua construção, cada extensão $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_{i+1}})$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre a extensão K_i. Decorre disso que na sequência de extensões quadráticas $K_0 = Q, K_1, K_2, ..., K_n$, o espaço vetorial K_n tem dimensão 2^n sobre Q.

GEOMETRIA DAS REDES CONEXAS NO PLANO

Considere um conjunto V de pontos no plano ligados por curvas contínuas, conforme ilustrado na figura mostrada a seguir. Perceba que dessa forma a figura toda é um conjunto conexo do plano, no sentido dado na introdução deste livro. Uma figura desse tipo representa uma **rede conexa**, os pontos de V são denominados de **vértices** da rede.



O percurso percorrido dentro da rede para se ir de um vértice a outro é chamado de **caminho** quando a sequência dos vértices desse percurso não tem vértices repetidos; e é chamado de **aresta** quando essa sequência tem só dois vértices. No caso de um caminho fechado, em que o primeiro e o último vértices coincidem, usamos o nome **ciclo.** Denominamos de **comprimento** de um caminho ao número de arestas determinadas pela sequência de seus vértices. Ao comprimento do caminho mais curto ligando dois vértices denominamos de **distância** entre esses dois vértices. E denominamos de **grau** de um vértice ao número de arestas que começam nele. Uma forma alternativa de compreender um caminho é *considerar a sequência de vértices não repetidos como sendo o próprio caminho*. Perceba que o conjunto V de vértices, dotado dessa distância, é um

espaço métrico discreto. Verifique que tal distância satisfaz às três propriedades que caracterizam uma distância. Com a distância podemos definir o **diâmetro** da rede. Vamos agora aplicar esses conceitos à rede W representada na figura mostrada anteriormente. Verificamos que W tem 21 vértices, que estão identificados pelas letras do alfabeto que vão de A a U, e tem 38 arestas. Qual é o comprimento do caminho DEFGQRS? Veja que é 6. Qual a distância entre D e S? Verifique que é 3. Exiba um ciclo de comprimento maior que o ciclo representado pela circunferência que passa pelos vértices da fronteira da figura. Uma resposta possível é o ciclo EFGQHIUTJKOSLBNCRMDE, tem comprimento 19, enquanto a circunferência tem apenas 15. Qual o grau de cada um dos vértices: D, G, S e T? Verifique que são 2, 3, 6 e 5, respectivamente. Qual o valor da soma dos graus de todos os vértices da rede W? Verifique que é igual a 76, que é o dobro do número de aresta. Será isso uma propriedade geral? A resposta é sim. Ou seja, *numa rede conexa a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número de suas arestas.* Com um pouco de atenção perceba que o argumento principal que justifica esse pequeno teorema é que toda aresta liga exatamente dois vértices. Ou seja, cada aresta contribui com uma unidade para o grau de cada um de seus vértices e, por conseguinte, com duas unidades para a soma dos graus deles. Portanto, as n arestas de uma rede contribuem com 2n unidades para a soma dos graus dos vértices dessa rede. Por fim, verifique que o diâmetro da rede W é 4. Percebe-se que quanto maior(em número de vértices e de arestas) for a rede, maior será o tempo de cálculo de distâncias, distância média, soma de graus, etc. Mas para isso foram construidos diversos algoritmos para rapidamente processarem os cálculos nos computadores.

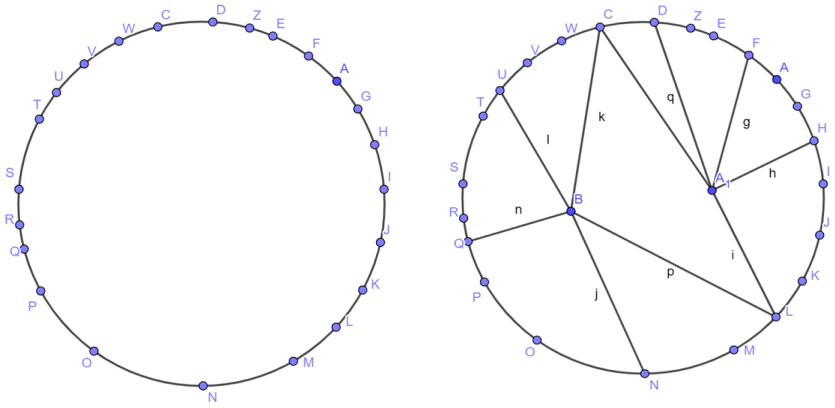
GEOMETRIA DO MUNDO PEQUENO

As denominadas redes de mundo pequeno fascinam a cultura popular e a ciência há décadas. Surgiram da observação de que no mundo, quaisquer duas pessoas estão conectadas por uma curta cadeia de laços sociais. Elas são usadas para se estudar muitos problemas em diversas áreas, como física, biologia, ciência da computação, sistemas de comunicação e de transporte, bem como as redes sociais. A propriedade de “mundo pequeno” é uma propriedade de redes em que, apesar de um grande número de nós(vértices), é possível encontrar caminhos curtos entre eles. Nas últimas décadas, foi provado que tanto em sistemas naturais quanto artificiais, muitas redes reais também são pequenas. Mas, todas as redes de mundo pequeno são pequenas, e como elas se comparam?

No mundo físico, avaliamos e comparamos o tamanho dos objetos, contrastando-os com uma referência comum, geralmente um sistema métrico padrão. No caso de redes complexas, a diferença é que cada rede possui seu próprio espaço métrico. Assim, a questão de saber se uma rede é menor ou maior do que outra implica a comparação de dois espaços diferentes entre si, em vez da situação mais familiar em que dois objetos são comparados dentro do espaço métrico que compartilham. Para simplificar e tornar mais compreensível essa ideia de rede de mundo pequeno, vamos construir duas redes sucessivas, sendo a segunda criada com o acréscimo de dois novos vértices que se ligam a

vários vértices da primeira. Observe que a primeira rede é formada por pontos de uma circunferência que se ligam através de arcos dessa. Verifique que a distância entre os pontos U e J é 11 e que ela é a maior distância entre dois pontos dessa rede. Mas perceba, que vários outros pares têm essa mesma distância. De modo análogo perceba que têm pares de pontos com distâncias respectivas de 10, 9, ..., 2,1. Agora observemos a segunda rede e verifiquemos o que aconteceu com as distâncias entre os pares de pontos de distâncias maiores, tais como 11, 10 e 9. as distâncias entre os vértices que estão na circunferência e os dois vértices novos, que a maior distância entre dois vértices quaisquer da segunda rede é 6. Em particular, a distância entre U e J é 4, conforme o caminho UBLKJ. Mas a distância entre S e J, bem como entre T e I, é 6. Veja que a distância, na primeira rede, entre S e J é 9 e entre T e I é 11. Este exemplo comparativo nos mostra, que a existência de novos vértices ligados a alguns vértices da primeira rede, reduz, em média, as distâncias entre os pontos da rede, tornando-a “pequena”.

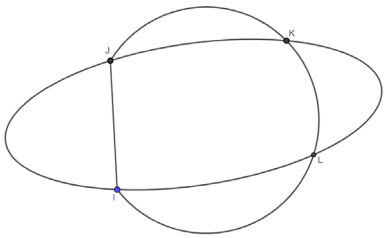
Há muita coisa disponível na Web sobre as redes do mundo pequeno e as redes(ou grafos) em geral. Consulte-a com o Google ou com o Bing para ampliar seus conhecimentos sobre redes e grafos.



QT-203.(JNCF). Construa uma rede conexa plana com 30 vértices, em que: o grau mínimo deles seja 3 e o máximo seja 6; a distância mínima entre eles seja 3 e a máxima seja 6; e que ela tenha pelo menos dois ciclos de comprimento 12.

QT-204.(JNCF). Construa uma rede conexa circular com 20 vértices de grau 2 cada um. A seguir acrescente 3 novos vértices de tal modo que se forme uma nova rede conexa com diâmetro igual a 3.

QT-205.(JNCF).(Redes ou Grafos eulerianos). Seja G uma rede conexa. Um percurso em G que atravessa cada aresta uma única vez é chamado de *trilha euleriana.*Denominamos de *grafo euleriano* a toda rede conexa que tem uma trilha euleriana que começa e termina no mesmo vértice. Um exemplo ilustrativo está na figura seguinte. Observe neste exemplo que de qualquer vértice(I, J, K ou L) você pode traçar uma trilha euleriana que começa e termina nele. e Verifique que todos os vértices têm grau par. Verifique ainda que, caso você exclua uma aresta JK, então o novo grafo terá dois vértices de grau ìmpar, J e K; e uma trilha euleriana que começa em um deles e termina no outro.



Prove as seguintes propriedades:

1) Seja G uma rede conexa cujos vértices têm todos grau par. Então G é um grafo euleriano;

2) Seja G uma rede conexa com apenas dois vértices de grau ímpar: A e B. Então G tem uma trilha euleriana que começa em A e termina em B;

3) Seja G uma rede conexa que não é um grafo euleriano. Mostre que é possível acrescentar um único vértice a G e algumas arestas desse novo vértice para alguns já existentes de maneira que a nova rede seja um grafo euleriano.

NOÇÕES SOBRE O GRUPO DE GALOIS DE CORPOS FINITOS

O CORPO FINITO Z_p

O exemplo mais simples de corpo finito é Z_p= {0, 1, 2, ..., p-1} que significa “inteiros módulo p”, onde p é um número primo. No próximo capítulo mostramos tabelas de adição e multiplicação desse tipo de corpo. Através do conceito de “congruência módulo p”(apresentado no próximo capítulo) aplicado no anel dos números inteiros, obtemos os corpos Z_p. De modo simples e direto, dado um inteiro x, você toma o resto r da divisão por p e escreve x $\equiv r$ (mod p), que se lê assim: x é congruente com r módulo p. Comumente, por simplicidade, usa-se = no lugar de $\equiv$. Desse modo todo o conjunto dos inteiros Z fica dividido em p classes de “inteiros módulo p”, que agora se tornam os elementos do conjunto Z_p, que com as operações + e . “ módulo p” tem a estrutura de um corpo, quando p é primo. Mais detalhes sobre isso será mostrado mais à frente. Verifiquemos isso com exemplos. Consideremos Z_5 = {0, 1, 2, 3, 4}. Então, 35 = 0 (mod 5), pois 35 dividido por 5 tem resto 0. De modo análogo, obtemos: 14 = 4 (mod 5), 8 = 3(mod 5) e 11 = 1(mod 5).

O QUE É UM GRUPO DE GALOIS?

Agora, vamos ao **grupo de Galois**. Imagine que você tem um corpo “base” (como Z_p) e quer estendê-lo para um corpo maior, adicionando elementos que resolvem equações polinomiais (semelhante a adicionar raízes quadradas aos racionais).

Um **grupo de Galois** é o conjunto de todos os “automorfismos” (funções bijetivas *f* que preservam as operações de adição e multiplicação do corpo: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x.y) = f(x).f(y)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$) de uma extensão de corpos, que fixam o corpo base. Em palavras simples: <u>são as simetrias do corpo estendido que não mudam a base</u>.

Propriedades gerais: a) É um grupo sob composição de funções (tem identidade, inversos e é fechado). b) Para corpos finitos, o grupo de Galois é sempre **cíclico** (pode ser gerado por um único elemento). c) O tamanho do grupo (ordem) é igual ao grau da extensão (quantos "novos" elementos você adiciona).

Para corpos finitos como Z_p, consideramos extensões Z_{p^n} (corpos com p^n elementos, onde *n* é um inteiro positivo). O grupo de Galois de Z_{p^n} sobre Z_p, denotado por Gal (Z_{p^n}/Z_p), é cíclico de ordem *n*, gerado pelo chamado **automorfismo de Frobenius**: $\varphi(x) = x^p$.

DETERMINANDO O GRUPO DE GALOIS

Vamos calcular para os primos dados, considerando extensões simples (por exemplo, *n* = 1 é trivial, então vejamos *n* = 2 para quadráticas).

1. **Para p = 2 (extensão Z_4/Z_2, com n = 2):** Z_4 tem 4 elementos: 0, 1, e duas raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ (chamemos de α e $\alpha + 1$). Observe que as raízes dessa equação não pertencem a Z_2. Grupo de Galois: Cíclico de ordem 2, gerado por Frobenius $\varphi(x) = x^2$. Elementos: Identidade(I) e φ (que troca α e $\alpha + 1$). Relação: Mostra que a extensão é "simétrica" de grau 2.
2. **Para p = 5 (extensão Z_{25}/Z_5, com n = 2):** Similarmente, grupo cíclico de ordem 2, gerado por $\varphi(x) = x^5$.

RELAÇÃO ENTRE GRUPO DE GALOIS E ESTRUTURA DE Z_p

O grupo de Galois revela a "anatomia" do corpo finito: Ele classifica as subextensões (corpos intermediários) via subgrupos. Os subcorpos de Z_{p^n} são exatamente os corpos da forma Z_{p^m} em que m$\backslash n$. Os subgrupos próprios do grupo de Galois de Z_{p^n} sobre Z_p são exatamente os grupos gerados por φ^m , com m$\backslash n$. Além disso, $\varphi^m(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in Z_{p^m}$. Assim, há uma correspondência biunívoca entre os subcorpos de Z_{p^n} e os subgrupos de seu grupo de Galois. Este é um caso particular do Teorema da Correspondência de Galois.

APLICAÇÕES E IMPLICAÇÕES

Álgebra e Criptografia: Em códigos QR ou RSA, corpos finitos são base para algoritmos seguros. O grupo de Galois é usado em criptografia de curvas elípticas sobre Z_p, garantindo simetrias que previnem ataques.

Implicações Práticas: Entender isso prepara para temas como teoria de códigos (correção de erros em transmissões) ou até física quântica, onde corpos finitos modelam estados.

Para um aprofundamento consulte o **Código QR**.

CAPÍTULO IV

COMPLEXOS E APROXIMAÇÕES

NÚMEROS COMPLEXOS E A FÓRMULA DE EULER

Denominamos de número complexo todo número da forma z = x + yi, em que x e y são números reais e i^2 = -1. Comumente, o i é chamado de unidade imaginária, o x de parte real e o y de parte imaginária de z. Indica-se com frequência x = Re(z) e y = Im(z). Dizemos que dois números complexos a + bi e c + di são iguais quando a = c e b = d. O conjunto dos números complexos, C, possui uma estrutura de **corpo**, quando acrescentamos as operações de *adição*(+) e *multiplicação*(.), definidas assim:

1) $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i;$

2) $(x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$

O conjunto C dos números complexos pode ser representado geometricamente por um plano, amiúde chamado de *plano de Argand-Gauss,* adotando como eixo horizontal(eixo real) o eixo dos x e como eixo vertical(eixo imaginário) o eixo dos y. Dessa forma, cada número z = x + yi se identificará pelo ponto P(x, y), que será chamado de seu *afixo*. Também poderá ser identificado com o vetor (x, y). Observe que a adição definida anteriormente é análoga à definição de adição de vetores no espaço vetorial R^2. O *módulo* de z, indicado por $|z|$, é definido por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o *conjugado* de z, indicado por $\bar{z}$, é definido por $\bar{z}$ = x – yi. O *inverso* de um complexo z é o número complexo, indicado por z^{-1}, tal que zz^{-1} = 1.

Se z = x + yi, então qual a expressão de z^{-1}? A *divisão* em C é definida assim: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$.

Verifique as seguintes propriedades:

$$|z|^2 = z.\bar{z};$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2};$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2| \text{ e}$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}.$$

Perceba que o conjunto dos números complexos C, dotado da distância definida por d(z, w) = $|z - w|$ é um espaço métrico. Para uma melhor compreensão, reveja o conceito de *espaço métrico* no capítulo anterior, no tópico Espaço Vetorial e Funções.

NOTA (SOBRE CORPO):

Um conjunto não-vazio K é um **corpo** se nele temos definidas uma adição e uma multiplicação que satisfazem, para quaisquer elementos a,b,c ∈ K, as seguintes propriedades:

Propriedades da adição:

I) Associativa: (a + b) + c = a + (b + c);

II) Comutativa: a + b = b + a;

III) Existe um elemento neutro: que será denotado por 0 e é tal que a + 0 = a;

IV) Existem simétricos ou inversos aditivos: o inverso aditivo de a é x ∈ K tal que a + x = 0 (x é denotado por −a, ou seja, −a ∈ K e a + (−a) = 0).

Propriedades da multiplicação:

V) Associativa: (a·b)·c = a·(b·c);

VI) Comutativa: a·b = b·a;

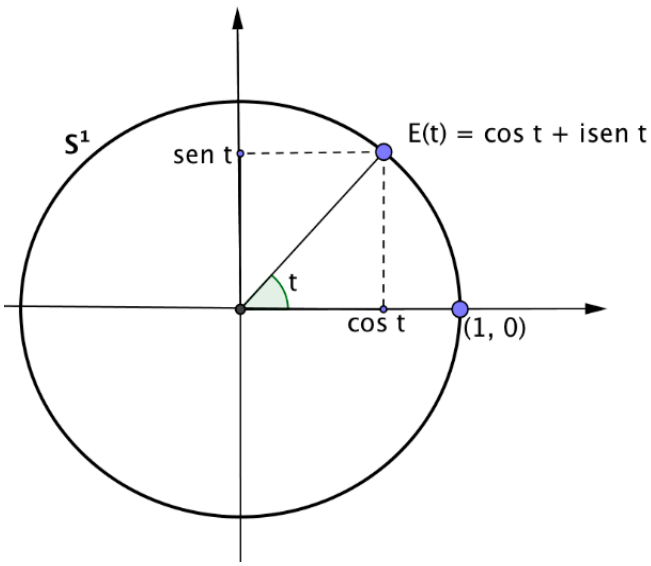
VII) Existe um elemento unidade, denotado por 1 e é tal que 1 · a = a;

VIII) Distributiva da multiplicação com relação à adição: a·(b + c) = a·b + a·c.

IX) Existe o inverso multiplicativo y ∈ K de todo $a \neq 0$, tal que a·y = 1, que é denotado por

$$y = a^{-1} = \frac{1}{a} \in K.$$

Se z e w são complexos com $|z| = |w| = 1$, então $|z.w| = 1$ e $|z^{-1}| = 1$. Logo, $\mathbf{S^1}$, com a operação de multiplicação dos complexos, se torna um grupo multiplicativo. Ou seja, se z, w $\in \mathbf{S^1}$, então z.w $\in \mathbf{S^1}$; para todo z $\in \mathbf{S^1}$ existe $z^{-1} \in \mathbf{S^1}$ tal que $z.z^{-1} = 1$ e a operação "." é associativa.



Agora, no plano complexo, a função de Euler *E* se expressa assim:

E(t) = cos t + isen t. Por conseguinte

$$E(u + v) = cos(u + v) + isen(u + v)$$

E(u) = cos u + isen u e E(v) = cos v + isen v.

Calculando E(u).E(v) obtém-se:

$$\text{E(u).E(v)} = (cos\ u)(cos\ v) - (senu)(\ senv) + i[(senu)(cosv) +$$
$$(\text{sen(v)})(\text{cos(u)}) = cos(u + v) + isen\ (u + v).$$

Disso se conclui que: E(u + v) = E(u).E(v).

Isso lembra a função exponencial.

Daí vem a fórmula genial de Euler: $\mathbf{e^{it}} = E(t) = \boldsymbol{cos}(t) + \boldsymbol{isen}(t)$.

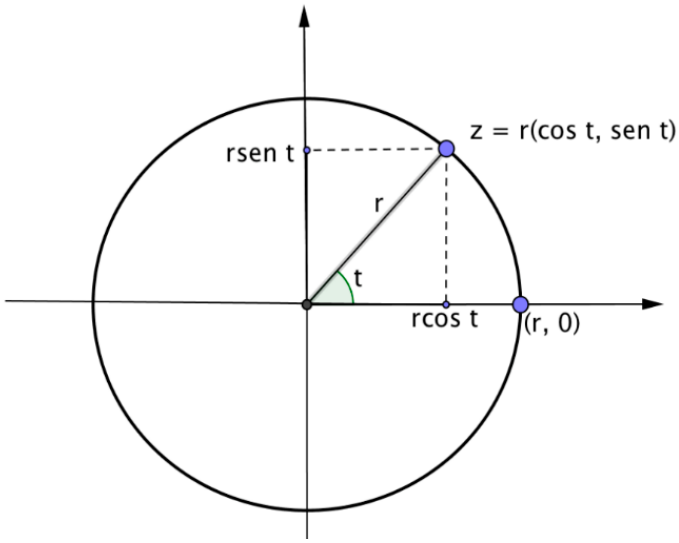
Da qual se obtém: $\mathbf{e^{z}} = e^{x}\big(\boldsymbol{cos}(y) + \boldsymbol{isen}(y)\big)$, onde z = x + iy.

Observe que $(e^{it})^n = (cos\ t + isen\ t)^n$. Mas $(e^{it})^n = e^{i(nt)} = cos(nt) + isen(nt)$, então $\boldsymbol{(cos\ t + isen\ t)^n = cos(nt) + isen(nt)}$, que é **a fórmula de Moivre** para os números complexos de $\mathbf{S^1}$.

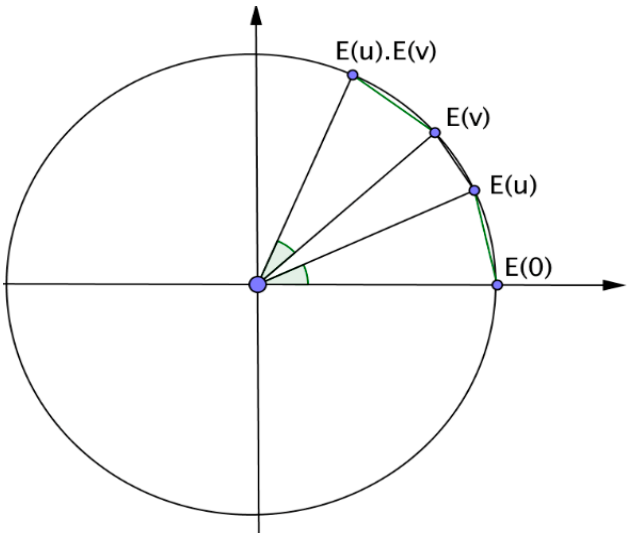
No caso geral, como representado na figura a seguir, se z = r(cos t + isen t), em que r é o módulo de z, então obtém-se:

$$\boldsymbol{z^n = r^n(cos(nt) + isen(nt)).}$$

Ela vale para um n inteiro qualquer. O ângulo t, comumente, é denominado de *argumento* de z. E se $0 \leq t \leq 2\pi$, então dizemos que t é o *argumento principal* de z.



Uma prova da propriedade **E(u + v) = E(u).E(v),** usando números complexos em S^1, apresentamos a seguir, com a ajuda da figura a seguir.



$$|E(u).E(v) - E(v)| = |E(u).E(v) - E(v).E(0)| =$$
$$|E(v)||E(u) - E(0)| = |E(u) - E(0)|.$$

Geometricamente, isso significa que o arco de E(0) a E(u), de medida u, é congruente com o arco que vai de E(v) a E(u).E(v). Na verdade, temos primeiro a congruência das cordas, que, por congruência LLL de triângulos, implica a congruência dos arcos.

Logo, o arco de E(0) a E(u).E(v) tem comprimento igual a u + v.

Portanto, **E(u).E(v) = E(u + v).**

Observe que com isso podemos deduzir as fórmulas:

$$cos(u + v) = (cos\, u)(cos\, v) - (sen\, u)(sen\, v) \quad e$$

$$sen(u + v) = (sen\, u)(cos\, v) + (cos\, u)(sen\, v).$$

Para isso, basta que verifiquemos o seguinte: $E(u + v) = cos(u + v) + isen(u + v)$ e $E(u).E(v) = (cosu + isenu)(cosv + isenv) = cosu.cosv - senu.senv + i(senu.cosv + senv.cosu).$

Descreva de modo breve, a partir da propriedade **E(u).E(v) = E(u + v**) a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos z_1 e z_2. A seguir, faça o mesmo para a divisão z_2 / z_1.

A FÓRMULA DE EULER

$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$sen\, x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n\ +\ 1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

As três últimas fórmulas vêm do Cálculo Infinitesimal, quando fazemos o desenvolvimento dessas funções em série de Taylor, que no capítulo sobre Polinômios falaremos um pouco mais. A primeira pode ser estendida para os Complexos, assim:

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$ Daí se obtém:

$$e^{iy} = \underbrace{(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6!} + \ldots)}_{\cos y} + i\underbrace{(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots)}_{sen\ y}.$$

Logo: $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$

Segue da fórmula de Euler este resultado extraordinário, que relaciona numa única igualdade, os cinco números mais famosos da matemática:

$e^{i\pi} + 1 = 0.$

Essa fórmula é considerada por muitos como a mais bela da Matemática!

A forma exponencial $z = re^{it}$ é muito adequada para se compreender e deduzir as propriedades mais conhecidas associadas à multiplicação dos complexos. Ela se torna "natural", em virtude de "herdar" as propriedades conhecidas da função exponencial real $f(x) = a^x$.

Por exemplo, se $z_1 = r_1e^{it_1}$ e $z_2 = r_2e^{it_2}$ e $n \in Z$, então $z_1z_2 = r_1r_2\,e^{i(t_1+t_2)}$, $z^n = r^ne^{nt}$, $z_1/z_2 = (r_1/r_2)\,e^{i(t_1-t_2)}$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ e $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$. Por outro lado, a forma vetorial ou a algébrica são mais adequadas para se compreender e deduzir certas propriedades associadas à adição dos complexos, tais como $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e a desigualdade triangular $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

O quadro mostrado a seguir, lista as principais funções trigonométricas e suas inversas, expressas segundo a fórmula de Euler.

FUNÇÃO	FUNÇÃO INVERSA
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	$\operatorname{arcsen} x = -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)$
$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$\arccos x = i\,\ln\left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)$
$\tan\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$	$\arctan x = \dfrac{i}{2}\ln\left(\dfrac{i+x}{i-x}\right)$
$\csc\theta = \dfrac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccsc} x = -i\ln\left(\frac{i}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$
$\sec\theta = \dfrac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arcsec} x = -i\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1-\frac{i}{x^2}}\right)$
$\cot\theta = \dfrac{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccot} x = \dfrac{i}{2}\ln\left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)$
$\operatorname{cis}\theta = e^{i\theta}$	$\operatorname{arccis} x = \dfrac{\ln x}{i} = -i\ln x = \arg x$

Duas formas fatoradas importantes:

$$i)\ cis\theta - 1 = 2isen(\theta/2).cis(\theta/2).$$
$$ii)\ cis\theta + 1 = 2cos(\theta/2).cis(\theta/2).$$

NOTA:

Perceba que a fórmula de Moivre pode ser apresentada também assim:

$$z^n = |z|^n cis(n\theta);$$
$$z^n = |z|^n e^{i(n\theta)}.$$

QI-1. A) Expresse, nas formas trigonométrica e exponencial, os seguintes números complexos:

I) z = cosθ + isenθ - 1; com π/2 < θ < π;

II) z = 2cosθ + isen3θ, sendo $|z^2| + |z| = 6$ e π/2 < θ ≤ 5π/6.

B) Mostre que:

I) cisθ – 1 = 2isen(θ\2).cis(θ\2).

II) cisθ + 1 = 2cos(θ\2).cis(θ\2).

III) $2\text{isen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$.

NOTA:

Verifique que (i) e (ii) são equivalentes a

1) $e^{i\theta} - 1 = 2isen\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{\frac{i\theta}{2}}.$

2) $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{\frac{i\theta}{2}}.$

QI-2. Prove que $cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

QI-3. Estenda as fórmulas da questão anterior para um complexo z qualquer e prove que

$$sen^2z + cos^2z = 1 \text{ e } sen(z_1 + z_2) = senz_1cosz_2 + senz_2cosz_1.$$

QI-4. Mostre que $cos\, i = \frac{1 + e^2}{2e}$ e $sen\, i = \frac{1 - e^2}{2ei}$.

QI-5. Usando as fórmulas de Moivre e do Binômio de Newton prove que:

I) $cos(nx) = cos^nx - \binom{n}{2}cos^{n-2}x.sen^2x + \binom{n}{4}cos^{n-4}x.sen^4x - \binom{n}{6}cos^{n-6}x.sen^6x + \ldots$

II) $sen(nx) = \binom{n}{1}cos^{n-1}x.senx - \binom{n}{3}cos^{n-3}x.sen^3x + \binom{n}{5}cos^{n-5}x.sen^5x + \ldots$

III) $(1 + i)^n = 2^{n/2}.cis\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

QI-6. A) Expresse cos5x e sen8x em termos de cos x e sen x.

B) Calcule os coeficientes A, B, C e D da seguinte identidade:

$$sen7x = Acos^6xsenx + Bcos^4xsen^3x + Ccos^2xsen^5x + Dsen^7x.$$

▸ **Resp.:** A = 7; B = -35; C = 21 e D = -1.

QI-7. Determinar as fórmulas que expressam as seguintes somas:

I) $1 + cosx + cos2x + cos3x + cos4x + \ldots + cosnx$.

II) $senx + 2sen2x + 3sen3x + 4sen4x + \ldots + nsennx$.

QI-8. Determinar a fórmula que expressa a soma da série:

$$\frac{1}{2}senx + \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}sen3x + \ldots + \frac{1}{2^n}sennx + \ldots$$

QI-9. Encontre o valor de A + B + D, admitindo a seguinte identidade:

$$A\,cos2x + Bcosx + D = \frac{(1 + cosx - i\,senx)^4}{cos2x - i\,sen2x}$$

▶ **Resp.: 16.**

QI-10. A) Encontre α tal que - 2π < α < - 3π/2 e que seja válida a igualdade:

$$3\text{tg}\,\alpha = |2003^i| + |2004^i| + |2005^i|.$$

B) Se z = $\left[\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right]^{36}$, calcule o valor de $\log_2(-z)$.

QI-11. Se z = x + iy é um número complexo, então descreva geometricamente e em coordenadas cartesianas, x e y, a curva que contém o conjunto solução da equação

$$\text{Arg}((z-2)/(z-2i)) = \frac{\pi}{3}.$$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS COMPLEXOS

QI-12. [JNCF]. Um número complexo z = x + iy pode ser representado na forma matricial assim:

$$Z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}, \text{ com } i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com essa forma, as duas operações usuais de matrizes, adição e multiplicação, substituem as operações correspondentes da forma algébrica. A matriz identidade I substitui o número 1, a matriz transposta substitui o conjugado, a matriz inversa substitui o inverso multiplicativo, etc.

A) Qual a expressão matricial de Z^n se Z estiver na forma trigonométrica?

B) Faça uma interpretação geométrica do determinante det(Z).

C) Nessa forma matricial, que tipo de matriz caracteriza os números imaginários puros? E os reais? Existe algum número complexo z, com $I_m(z) \neq 0$, cuja representação matricial seja uma matriz simétrica?

D) Que matriz representa um número complexo que multiplicado por $1 + i\sqrt{3}$ resulta em -2? Geometricamente, o que ocorreu nessa multiplicação?

E) Considere uma função F: C → C, em que C é o plano complexo, definida pela seguinte equação matricial F(Z) = M.Z, em que M = $\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Que tipo de transformação essa função produz sobre cada ponto do plano Complexo? Qual a imagem de um triângulo T = ABC do plano complexo que é dada por F? Qual a relação entre a área de T e a de F(T)? Para perceber melhor o que está acontecendo faça primeiro os cálculos para o triângulo T_1 de vértices A_1 = (0, 1), B_1 = (1, 3) e C_1 = (3, 1). Verifique que $[T_1] = 3$, $[F(T_1)] = 48$ e detM = 16.

F) Considere, ainda, a matriz M do item anterior. Obtenha a inversa dela pela fórmula usual do cálculo matricial: $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} adj(M)$, em que adj(M) é a adjunta de M, que por sua vez é a transposta da matriz dos cofatores de M. A seguir, interprete M como um número complexo, coloque-o na forma algébrica e obtenha o inverso de M com as operações algébricas usuais do corpo C. Compare agora os resultados.

NOTA (Matrizes 2 x 2 e transformações lineares de R^2 em R^2)

Como o número complexo z = x + iy pode ser interpretado como um vetor (x, y), então, podemos também pensar z como uma matriz coluna e o produto Mz ser uma matriz coluna também. Para visualizar bem a geometria da transformação F do item (E), coloque M na forma trigonométrica.

No estudo de matrizes e transformações lineares da Álgebra Linear, aprendemos que uma transformação linear F de R^2 em R^2 é uma função que tem a representação matricial na forma F(X) = MX, em que X = (x, y) é interpretado como um vetor ou matriz coluna e M é uma matriz 2 x 2. Por exemplo, F(x, y) = (2x + 3y, 4x – y) se representa na forma matricial assim:

F(X) = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, na base canônica de R^2. Observe que essa representação equivale a um sistema linear genérico com duas variáveis:

$$\begin{cases} 2x + 3y = u \\ 4x - y = v \end{cases}.$$

Ao colocarmos valores para u e v, obtemos um sistema linear típico da experiência que vivenciamos no ensino fundamental e até mesmo na vida prática. Por exemplo, no sistema acima, seja u = 2 e v = 5. Na linguagem das matrizes, resolver esse sistema, significa inverter a matriz M, pois sendo MX = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, segue disso que X = $M^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Usando a fórmula citada no item (F), obtemos: X = (17/14, -1/7). É claro que se a matriz M não for invertível o sistema não terá solução única. Para verificar isso, basta calcular o determinante de M. *Mesmo quando o sistema não for quadrado, podemos continuar usando a álgebra das matrizes para tratar de sistema lineares, com algumas adaptações dos métodos usados nos sistemas quadrados.* Basta lembrarmos do ensino médio quando lidamos com o método de eliminação de Gauss ou método do escalonamento e o Teorema de Rouché-Capelli. E lembre-se que um método de se obter a inversa de uma matriz quadrada é o método de eliminação de Gauss.

Sem dúvida, quando o sistema aumenta o número de variáveis, os métodos elementares de resolução deles precisam ser generalizados e, por consequência novos conceitos e propriedades surgem. A Álgebra das matrizes e os espaços vetoriais foram criados para facilitarem a nossa vida diante dos grandes sistemas lineares e suas aproximações para resolverem sistemas não lineares como falaremos depois. Com o uso dos computadores, não temos mais tanta preocupação com as “contas” e sim com o aperfeiçoamento dos métodos. Aliás, basta um aplicativo como o WolframAlpha ou GeoGebra para resolvermos sistema lineares de tamanhos razoáveis.

QI-13. [JNCF]. (**Representação Matricial dos Complexos-2)**

A) Verique que a transposta da forma matricial de um complexo z corresponde ao seu conjugado $\overline{z}$.

B) Deduza, com as operações usuais de matrizes, as seguintes propriedades dos números complexos: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(t_1 + t_2)}$, em que $z_1 = r_1 e^{it_1}$ e $z_2 = r_2 e^{it_2}$.

C) Mostre que $\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}sen\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}^n 2^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & -sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$.

D) Interprete o resultado de (C) nas formas: trigonométrica, exponencial e cis.

E) Compare os produtos, dados a seguir, e descreva de modo sucinto a interpretação geométrica deles.

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix};\ (cos\theta + isen\theta)(x + iy) = u + iw.$$

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS – I(1)

As DRN(Dicas/Resoluções/Notas) são **dicas, notas, comentários ou resoluções** relacionadas às questões propostas. Elas são as aproximações/transições preferenciais do presente texto. A partir delas os textos mais longos foram desenvolvidos como novas aproximações. Essas DRN têm vários papéis, entre eles:

1º) de ajudar, de modo ativo, o aprendente a resolver a questão específica;

2º) de treiná-lo no uso consciente e sistemático de estratégias, fórmulas, padrões, propriedades, teoremas e conceitos;

3º) de reduzir a frustração na busca de resolver/compreender questões mais difíceis; e

4º) de melhorar a **percepção da beleza** dos desafios e das construções matemáticas para enfrentá-los.

Quanto mais frequente esses papéis forem estimulados e assimilados pelo aprendente, mais integrado e profundo será o seu aprendizado, pois estará de acordo com a nova visão sistêmica integrada da realidade, com a concepção de **inteligência senciente**, que integra e unifica, numa única faculdade, o "sentir" e o "pensar" e, evidentemente, com o método ativo das Aproximações Multifárias.

DRN-I1- item-(A- I):

Mostre que $|z| = 2sen(\frac{\theta}{2})$ e z = $2sen(\frac{\theta}{2})$[- $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) + icos(\frac{\theta}{2})$].

Conclua que Z = $2sen(\frac{\theta}{2})$[$cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})$ + isen$(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})$], que é a forma trigonométrica de z.

Disso, segue que a forma exponencial é *z* = $2sen\left(\frac{\theta}{2}\right).\, e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$.

DRN-I1- item-(A-II):

Fazer z = r(cos$\alpha + isen\alpha$) e r = |z| para chegar em sen $\theta = \pm\frac{1}{2}$.

Resposta na forma expoencial: z = $2e^{\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}$, k inteiro.

DRN-I7 (item-I):

Considere a soma: S = 1 + $e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx} = \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1}$. Usando a fórmula de Moivre e cisx = e^{ix} podemos colocar S na forma:

$$S = \frac{(cisx)^{n+1} - 1}{cisx - 1} = \frac{cis(n+1)x - 1}{cisx - 1}.$$

E usando a fatoração cisθ – 1 = 2isen(θ/2).cis(θ/2) podemos escrever:

$$S = \frac{2isen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].cis[\frac{(n+1)x}{2}]}{2isen\left(\frac{x}{2}\right).cis(\frac{x}{2})} = \frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].cis(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Logo S = $\frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].cos(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)} + i.\frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].sen(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$, que implica

1 + cosx + cos2x + ... + cosnx = $\frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].cos(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$ e senx + sen2x + ... + sennx = $\frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].sen(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Portanto, a fórmula procurada é $\frac{sen\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].cos(\frac{nx}{2})}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$.

DRN- I7- item(II):

Seja z = cosx + isenx. Vamos considerar a soma: $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + ... + nz^n$. (1)
Multiplicando (1) por z, obtemos: $zS_n = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + ... + nz^{n+1}$. (2)

Por (1) e (2) vem: $S_n - zS_n = z + z^2 + z^3 + z^4 + ... + z^n - nz^{n+1} = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} - nz^{n+1}$.
Disso, segue:

$$S_n = \frac{z - z^{n+1}}{(1 - z)^2} - \frac{nz^{n+1}}{1 - z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1}(1 - z)}{(1 - z)^2}$$

$$S_n = \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{(z - 1)^2} \quad (3)$$

Substituindo z = cisx em (3), obtemos:

$$S_n = \frac{cisx - (n+1)cis(n+1)x + ncis(n+2)x}{(cisx - 1)^2}. (4)$$

Mas cisx – 1 = 2isen(x/2)cis(x/2) => $(cisx - 1)^2 = -4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)cisx$. Substituindo isso em (4) e simplificando o fator cisx, encontramos:

$$S_n = \frac{1 - (n+1)cis(nx) + ncis(n+1)x}{-4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-1 + (n+1)cis(nx) - ncis(n+1)x}{4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-1 + (n+1)[\cos(nx) + i.sen(nx)] - n[\cos(n+1)x + i.sen(n+1)x]}{4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(n+1)\cos(nx) - n\cos(n+1)x - 1}{4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} + i.\left[\frac{(n+1)sen(nx) - nsen(n+1)x}{4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right].$$

A soma procurada corresponde à parte imaginária de S_n que é $Im(S_n) = \frac{(n+1)sen(nx) - nsen(n+1)x}{4sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Reveja a resolução da QF-82.

DRN-I8:

Procedemos como no item-I da questão anterior, observando que aqui se trata da soma dos termos de uma PG infinita em que $a_1 = z = cisx/2$ e a razão $q = cisx/2$ tem módulo menor do que 1. Logo,

$$S = z + z^2 + ... + z^n + ... = \lim_{n \to +\infty} \frac{z - z^n}{1 - z} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{cisx}{2} - (\frac{1}{2})^n cisnx}{1 - \frac{cisx}{2}} = \frac{cisx}{2 - cisx} = \frac{cosx + isenx}{(2 - cosx) - isenx}$$

$$= \frac{(cosx + isenx)(2 - cosx + isenx)}{(2 - cosx)^2 + sen^2x} = \frac{2cosx - 1}{5 - 4cosx} + \frac{i.2senx}{5 - 4cosx}.$$

Logo, a soma dada é igual a $\frac{2senx}{5 - 4cosx}$. Observe que, se na soma dada, trocarmos seno por cosseno, teremos o seguinte resultado $\frac{2cosx - 1}{5 - 4cosx}$.

NOTA (Limite de uma Sequência de números complexos):

Toda sequência (z_n) de números complexos, em que $z_n = x_n + iy_n$, goza da propriedade:

lim $z_n = z_0 = x_0 + iy_0$, *se, e somente se lim* $x_n = x_0$ *e lim* $y_n = y_0$.

Essa propriedade é uma espécie de definição alternativa de limite de uma sequência de números complexos. Ela decorre da definição que é a mesma que adotamos para os espaços métricos R^n. Ou seja, *lim* $z_n = z_0 \Leftrightarrow lim|z_n - z_0| = 0$.

Em virtude disso, as sequências e as séries de números complexos possuem muitas propriedades análogas às das sequências e séries de números reais. Destacamos uma delas: "*Toda sequência limitada de números complexos possui uma subsequência convergente.*" Com isso podemos definir um conjunto *compacto* no plano complexo C. Dizemos que um conjunto $D \subset C$ é um conjunto compacto quando toda sequência (z_n) em D possui uma subsequência convergente em D. São exemplos de compactos em C os discos fechados e regiões retangulares fechadas como [a, b] X [c, d]. Também vale o Teorema de Weierstrass dos valores extremos, que demonstramos no capítulo 3, para as funções $f: D \subset C \to R$, em que D é um compacto de C. Esse teorema será usado na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, no próximo capítulo.

DRN-I10(A):

Queremos obter $\alpha \in (-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$ tal que $3\text{tg}\,\alpha = |2003^i| + |2004^i| + |2005^i|$.

Como $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$ e $a = e^{lna}$, para todo $a > 0$, então

$$2003^i = (e^{ln2003})^i = e^{iln2003}$$
$$2004^i = (e^{ln2004})^i = e^{iln2004}$$
$$2005^i = (e^{ln2005})^i = e^{iln2005}.$$

Mas $|e^{i\theta}| = 1$. Logo, $3\text{tg}\,\alpha = 1 + 1 + 1 = 3$ => $\text{tg}\,\alpha = 1$ => $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k inteiro.

Porém, $\alpha \in (-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$. Então, concluímos que $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$.

DRN-I10(B):

- 54.

DRN-I11:

Use tg(a - b).

▸**Resp.:** A circunferência de equação $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 - (2\sqrt{3}+2)x - (2\sqrt{3}+2)y + 4 = 0$.

Observe que pontos como z = 2 e z = 2i, que em coordenadas x e y são (2, 0) e (0, 2) respectivamente, não pertencem ao conjunto solução da referida equação original, embora pertençam à circunferência.

DRN -I12:

A) $\begin{pmatrix} cos(n\theta) & -sen(n\theta) \\ sen(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

B) O quadrado da distância do ponto (x, y) à origem (0, 0).

C) Anti-simétrica. Escalar. Não, pois y = - y ⇔ y = 0 ⇔ $I_m(z) = 0$.

D) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Uma rotação de 120º.

E) Uma homotetia de razão 4 composta com uma rotação de 30º em torno da origem. É um triângulo semelhante a ABC com razão de semelhança igual a 4. [F(T)] = det(T).[T].

Homomorfismos e isomorfismos

Perceba que toda matriz 2 x 2 que representa uma rotação "pura" no plano tem a forma padrão da representação matricial de um número complexo unitário. Quando combinamos(fazemos a composição) de homotetia(dilatação ou redução) com rotação, ainda assim, a matriz da transformação linear resultante tem a forma(matricial) padrão do número complexo. Portanto, no plano, podemos converter algumas transformações lineares em operações com números complexos e vice-versa. Observe ainda que a composição de duas transformações lineares de R^2 em R^2 corresponde à multiplicação de suas matrizes. E se as matrizes representarem números complexos, então seu produto representará o produto dos números complexos correspondentes. Esse tipo especial de correspondência tem pois uma grande importância em Matemática. Eles geralmente são chamados de **homomorfismos**. São funções que "preservam" ou associam operações e propriedades de um conjunto em outro. Quando bijetoras, geralmente são chamadas de *isomorfismos*. Por exemplo, quando temos uma transformação linear bijetora T entre dois espaços vetoriais, dizemos que eles são *isomorfos* e que T é um *isomorfismo* entre eles. Um isomorfismo clássico de anéis é o que existe entre o espaço das matrizes quadradas de mesma ordem e o espaço das transformações lineares associadas a essas matrizes. Nesse exemplo as operações de adição e multiplicação de matrizes correspondem às de adição e composição de transformações lineares.

No caso da representação matricial dos números complexos, nós estabelecemos exatamente um isomorfismo de anéis entre eles. Primeiro vamos indicar o espaço vetorial das matrizes M = $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ por V. Então existe uma aplicação T que preserva(associa) as duas operações(+) e (.) com suas propriedades definidoras de uma estrutura de anel entre V e C. Acontece que o produto de matrizes de V é comutativo e toda matriz de V diferente da matriz nula tem inversa. Portanto, há um *isomorfismo de corpos* entre V e C. Quando isso ocorre, podemos considerá-los como se fossem iguais em relação à "estrutura algébrica" preservada.

DRN-I13:

A) Perceba que a matriz $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ representa uma rotação no plano de um ângulo θ em torno da origem O = (0, 0). Seu efeito é equivalente ao de uma multiplicação por um número complexo unitário $cos\theta + isen\theta$. Ou seja, em virtude do isomorfismo comentado anteriormente temos a equivalência $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \Leftrightarrow (cos\theta + isen\theta)(x + iy) = u + iw.$

Fatoração de certas matrizes 2 x 2 e autovalores

Na nota anterior escrevemos: "Observe ainda que a composição de duas transformações lineares de R^2 em R^2 corresponde à multiplicação de suas matrizes. E se as matrizes representarem números complexos, então seu produto representará o produto dos números complexos correspondentes." Considerando, pois, o isomorfismo(T) de corpos entre C e o conjunto das matrizes reais da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, temos que a fatoração de um número complexo $z = x + iy$ na forma $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, que é a forma polar ou trigonométrica de z, corresponde a uma fatoração matricial dada por $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$, onde $\alpha = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe que $cos\theta = \frac{x}{\alpha}$ e $sen\theta = \frac{y}{\alpha}$.

Para ilustrar essa fatoração matricial, sem passar por números complexos, vamos fatorar a matriz $F = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Temos que $F = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

O que representa geometricamente a transformação linear associada à matriz F?

Perceba que $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ representa uma homotetia de razão 5 e $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ representa uma rotação anti-horária θ tal que $cos\theta = 3/5$. Portanto, a transformação linear F geometricamente representa a composta de uma rotação com uma homotetia. Ou seja, ela produz uma rotação θ tal que $cos\theta = 3/5$, seguida de uma ampliação(homotetia de razão 5) sobre um vetor qualquer do plano. Observe também que tal transformação tem a seguinte expressão funcional: $F(x, y) = (3x - 4y, 4x + 3y)$.

E as transformações lineares componentes tem, respectivamente, as seguintes expressões funcionais: $G(u,v) = (5u, 5v)$ e $H(x,y) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y,\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y)$. Logo, $F(x,y) = (GoH)(x,y)$.

Agora, considere a seguinte questão: é possível fatorar uma matriz não nula da forma $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ na forma PDP^{-1}, em que P é uma matriz invertível e D é uma matriz diagonal? Quando isso é possível dizemos que a matriz é *diagonalizável* e que D e A são *semelhantes*. Observe que se $A = PDP^{-1}$, então $D = P^{-1}AP$. Perceba também que det A = det D. Isso nos revela que se det A é diferente de 0, então as entradas da diagonal de D são diferentes de 0 também. Noutros termos, se A é invertível então é diagonalizável. Em Álgebra Linear aprendemos que uma maneira de resolver o problema da diagonalização é determinando os autovalores e autovetores da matriz A. A matriz diagonal com a diagonal formada pelos autovalores de A é a matriz D. Para obter P usamos os autovetores associados aos autovalores. Um vetor não nulo v de R^n é chamado de **autovetor** de uma matriz quadrada A de ordem n se $Av = \lambda v$, para algum escalar λ. Este escalar é chamado de **autovalor** da matriz A e v é chamado de *autovetor associado a* λ. Os autovalores, quando existem, são obtidos através da chamada *equação característica* de A $\det(\lambda I - A) = 0$, em que *I* é a matriz identidade de mesma ordem. No caso da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, temos que a equação característica é $(\lambda - a)^2 + b^2 = 0$.

Logo, os autovalores de A são os complexos $\lambda = a + bi$ e $\lambda' = a - bi$. Portanto, a matriz diagonal associada é D = $\begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}$, que é uma matriz complexa. Precisamos encontrar um autovetor v associado a $a + bi$ e um autovetor v' associado a $a - bi$. Esses dois vetores serão as colunas da matriz P. Para isso, precisamos resolver os sistemas $Av = \lambda v$ e $Av' = \lambda v'$. Vamos ilustrar isso com um exemplo numérico. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, os autovalores são $\lambda = 1 + 2i$ e $\lambda' = 1 - 2i$. Resolvendo os sistemas encontramos que v tem a forma geral $\begin{bmatrix} t \\ -ti \end{bmatrix}$ e v' a forma $\begin{bmatrix} t \\ ti \end{bmatrix}$. Colocando t = 1 a matriz P toma a forma $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ e sua inversa é $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Podemos, agora, escrever a fatoração de A na forma PDP^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{i}{2i} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{i}{2i} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix}.$$

Perceba que as matrizes A, P e P^{-1} não têm a forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *que representa um número complexo. Elas são matrizes complexas. Como explicar isso?* Pense no seguinte: é possível fatorar em C um número complexo z = a + bi, com b não nulo, na forma z = pdp^{-1}, em que d é um real? A resposta é clara: não, pois z = d é um absurdo(um real igual a um imaginário ou a um complexo não real). Combinando isso com o isormorfismo T entre C e o corpo das matrizes $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, concluímos que uma matriz desse corpo que tenha b $\neq 0$ não pode ser fatorada dentro dele na forma PDP^{-1}.

Mais uma coisa a comentar. Veja que se tivermos uma matriz diagonal D = $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ então a equação característica é $(\lambda - c)(\lambda - d) = 0$, o que nos leva a concluir, que c e d são os autovalores de D. Daí vem a importância da diagonalização de uma matriz que não é uma diagonal, mas é diagonalizável.

Potência de uma matriz

Também nas aplicações em que muitas vezes temos algoritmos com recorrências, tem importância calcularmos as potências de uma matriz A. Se a matriz é diagonalizável, então tudo fica mais fácil, pois de $A = PDP^{-1}$ segue que $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. E lembre-se, que a multiplicação de matrizes quadradas correspondem a uma composição de transformações lineares. Logo, quando fazemos a recorrência da composição de uma transformação T com ela mesma estamos gerando uma potência de sua matriz. Ou seja ToToTo...oT *n* vezes corresponde a A^n, em que *A* é a matriz associada a T numa certa base. E como você pode verificar, o cálculo da potência de uma matriz diagonal é muito parecido com o da potência de um número real ou complexo. Também *podemos calcular a raiz quadrada de uma matriz diagonalizável.* Dizemos que uma matriz B é **raiz quadrada** de uma matriz A, quando $B^2 = A$. Perceba que no caso de uma matriz diagonal a raiz quadrada é obtida extraindo a raiz quadrada dos elementos da diagonal principal. Verifique que se A = $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, então B = $A^{1/2}$ = $\begin{bmatrix} \sqrt{c} & 0 \\ 0 & \sqrt{d} \end{bmatrix}$. Vejamos um exemplo de uma matriz diagonalizável A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

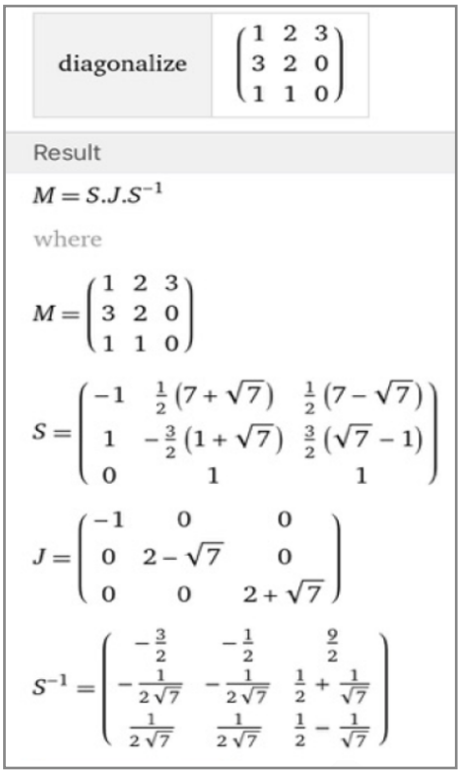
Diagonalizando-a obtemos $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Logo, a raiz quadrada de D é $\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Podemos generalizar isso para o caso de uma raiz enésima de uma matriz. De fato, trata-se de generalizar a potência para expoentes fracionários do tipo 1/n, n inteiro positivo. A regra é a mesma, pois basta obtermos a raiz enésima da matriz diagonal D e aplicar a fórmula

$$B^n = (PD^{\frac{1}{n}}P^{-1})^n = PDP^{-1} = A.$$

Como já falamos de outras vezes, para visualizarmos cálculos com matrizes maiores devemos utilizar computadores ou aplicativos como o WolframAlpha ou o Geogebra. O importante é compreendermos o essencial que ocorre nos cálculos. Daí nós mostrarmos exemplos de matrizes de ordem 2 para percebermos, por aproximação analógica, o que ocorre nos casos de ordens maiores. Por exemplo, mostramos a seguir, uma diagonalização de uma matriz de ordem 3, usando o WolframAlpha.



Diagonalização ortogonal e valores singulares

Sejam A e B matrizes quadradas. Dizemos que A e B são *ortogonalmente semelhantes* se existir alguma matriz ortogonal P tal que $P^TAP = B$. Se B for uma matriz diagonal, dizemos que A é *ortogonalmente diagonalizável* e que *P diagonaliza A ortogonalmente*.

Uma condição imprescindível para A ser ortogonamente diagonalizável é que ela seja simétrica. Vejamos porque. Suponha $P^TAP = D$ e que D seja uma matriz diagonal. Decorre disso que

$P(P^TAP)P^T = PDP^T$, o que equivale a $A = PDP^T$. Logo, $A^T = (PDP^T)^T = PDP^T = A$, e por consequência A é simétrica. A recíproca é também verdadeira: *toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.* Uma propriedade de toda matriz real simétrica é que seus autovalores são reais. Além disso os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Nosso objetivo aqui é indicar brevemente o que se faz para “diagonalizar” uma matriz m x n. A ideia nasce dessa última propriedade das matrizes simétricas. Então, dada uma matriz A do tipom x n, temos que A^TA é simétrica e , por conseguinte, é ortogonalmente diagonalizável. Mostra-se que os autovalores de A^TA são não negativos. As raízes quadradas positivas desses autovalores são chamadas de **valores singulares** de A. Vejamos um exemplo.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Os autovalores dela são 3 e 1 e seus valores singulares são $\sqrt{3}$ e 1.

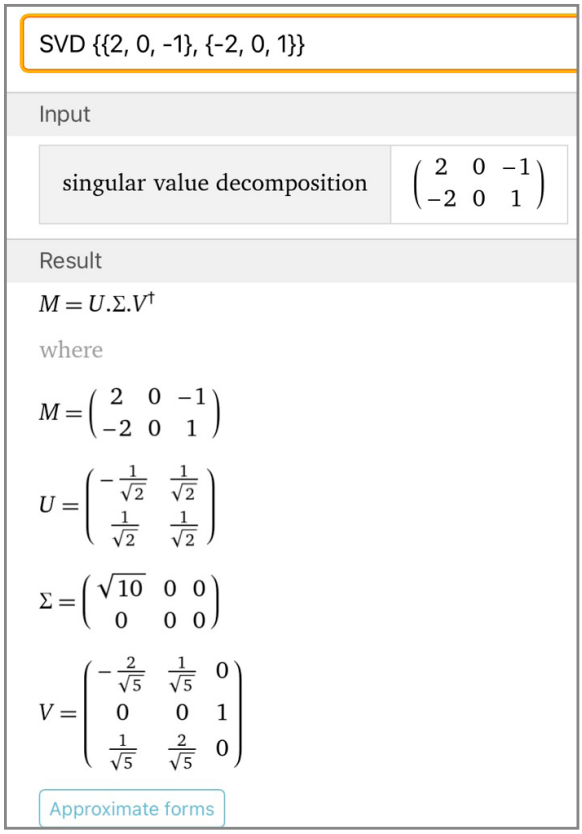
Existe uma fatoração de uma matriz A do tipo m x n chamada **decomposição em valores singulares**. Uma versão simplificada desse método é a seguinte:

"Se A é uma matriz real do tipo m x n, então A pode ser fatorada na forma A = UKV^T, onde U e V são matrizes ortogonais e K é uma matriz m x n cuja diagonal principal é formada pelos valores singulares e os demais elementos são nulos."

Observe que esse método pode ser usado para matrizes quadradas também. De modo simplificado, mostramos a decomposição em valores singulares da matriz A do exemplo anterior:

$$A = UKV^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Para maiores detalhes desse método veja em [Anton, 2012] ou [Carlen, 2009]. Essa fatoração tem aplicação atual na compressão de dados digitalizados para facilitar sua transmissão e armazenamento. Isso também tem grande utilidade no processamento de imagens. Na aplicação atual do método da decomposição em valores singulares muitas simplificações podem ser usadas, como a eliminação dos blocos nulos da matriz K. Utilizando o WolframAlpha vamos calcular o SVD(decomposição em valor singular) da matriz M = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



Agora vamos dar um exemplo usando a IA do GPT-4. Propomos a esse que determine os valores singulares da matriz A, 2 x 3, com as linhas (3, 4 5) e (1, 2, 1). Vejamos a resposta dada:

"Os valores singulares de uma matriz são os valores positivos da raiz quadrada dos autovalores da matriz transposta multiplicada pela matriz original. Para calcular os valores singulares da matriz A, 2 x 3, com as linhas: (3, 4, 5) e (1, 2, 1), você pode seguir os seguintes passos:

- *Primeiro, calcule a matriz transposta de A, que é A^T, 3 x 2, com as colunas: (3, 1), (4, 2) e (5, 1).*
- *Segundo, calcule o produto de A^T e A, que é uma matriz quadrada de 3 x 3, com os elementos: (10, 14, 16), (14, 20, 23) e (16, 23, 26).*
- *Terceiro, calcule o determinante da matriz A^T A - λI, onde λ é um escalar e I é a matriz identidade de 3 x 3. O determinante é uma função polinomial de λ, que é: -λ^3 + 56λ^2 - 343λ + 49.*
- *Quarto, encontre as raízes do polinômio, que são os autovalores de A^T A. As raízes são: λ1 = 49, λ2 = 7 e λ3 = 0.*
- *Quinto, calcule a raiz quadrada dos autovalores positivos, que são os valores singulares de A. Os valores singulares são: √49 = 7, √7 ≈ 2.65 e √0 = 0.*

Portanto, os valores singulares de A são: 7, 2.65 e 0. Você pode verificar o seu resultado usando a função svds do MATLAB."

Percebe-se aqui um algoritmo explicativo das etapas efetuadas para se chegar ao resultado. É claro, que com a disseminação desse tipo de IA, cada vez mais o processo de aprendizagem irá ser reconfigurado e facilitado para o aprendente, a ponto de que a recapitulação conceitual se dê no próprio processo de resolução das questões, por exemplo. Além disso, as resoluções deverão ocorrer nos tablets ou notebooks e não mais em papel. Teremos assim a oportunidade de dedicarmos mais tempo para o diálogo/debate e aprofundamento dos conceitos e suas propriedades nas salas(presenciais ou virtuais) de aula.

Mais uma vez, vemos como de forma implícita ou explícita tudo o que construímos ou formulamos em Matemática é feito por Aproximações Multifárias! O que são os homorfismos? Aproximações Multifárias. O que faz realmente uma diagonalização? Uma Aproximação Multifária de uma matriz quadrada A para uma matriz diagonal D. E isso acontece porque, fundamentalmente, aprendemos por meio de Aproximações Multifárias, frequentemente sucessivas. A novidade que aqui chamo a atenção desde a introdução deste livro, é que precisamos nos conscientizar disso e aplicar o método de modo sistemático, em todas as “faces poliedrais” do conhecimento e da vida. É preciso constantemente construir/tecer ramos de uma rede de aproximações/transições multifárias entre conceitos, propriedades e métodos, como numa “narrativa” de uma história ou conto. Tendo em mente o Princípio Holístico de Pascal Aproximado, fazer integrações aproximativas entre as partes e o todo de tópicos, áreas e contextos do conhecimento acumulado.

E fica muito evidente que com a popularização das novas IAs teremos a oportunidade de nos habituarmos ainda mais com o uso desse princípio para estudar, pesquisar e organizar novos e antigos conhecimentos das diversas áreas da Realidade.

Mesmo que um texto matemático tenha seu desenvolvimento bem "formal", ainda assim cabe comentários e correlações com conceitos e tópicos próximos que contribuem para maior compreensão e integração do conteúdo matemático. Precisamos vencer o preconceito de só nos expressarmos em matemática se tudo for demonstrado. Na verdade, quase nunca isso é feito à exaustão. Por isso mesmo, não vale a pena o esforço de completude com perda de compreensão e de curiosidade para seguir em frente estudando e aprendendo mais.

Método das Potências

Atualmente, com o uso generalizado dos algoritmos, os métodos que usam recorrências passaram a ser muito mais usados que certos métodos clássicos, como o do cálculo de autovalores de matrizes grandes. Eles aproveitam parte desses métodos e fazem novas adaptações. As razões principais são devidas às facilidades dos cálculos computacionais com os menores erros possíveis. Por isso, mais recentemente, usa-se uma sequência de potências gerada por uma matriz A: $v, Av, A^2v, .., A^kv, ...$, em que v é um *autovetor dominante* associado a um *autovalor dominante*. Um autovalor dominante de um conjunto de autovalores distintos de uma matriz é aquele que tem o maior módulo. Métodos que usam isso foram usados, por exemplo, para criar programas de busca na Internet, como o Google. Maiores detalhes sobre o método das potências você pode encontrar na referência [Anton, 2012] ou na [Carlen, 2009]. **Perceba aqui, mais uma vez, a relevância do conceito de sequência e de convergência de sequência, na construção de novos métodos em matemática.**

QI-14. Prove que a equação $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$, em que $\alpha \in C$, β é uma constante real e $z = x + iy$, representa uma reta no plano complexo.

Obs.: Denomina-se de *coeficiente angular complexo* ao número m = $-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$. Verifique que o coeficiente angular é igual a $(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}})i$.

QI-15. Prove que a equação de uma reta do plano complexo determinada pelos pontos $P_1(z_1)$ e $P_2(z_2)$ é $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

NOTA:

Decorre disso, que o coeficiente angular complexo dessa reta é dado por m = $\frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$ e que três pontos do plano complexo, $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ e $P_3(z_3)$ são colineares, se e só se $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

QI-16. Suponha que os números complexos z_1, z_2, z_3 são as coordenadas dos vértices do triângulo $A_1A_2A_3$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

A) $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero;

B) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;

C) $\left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right|$ e $\arg(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}) = \arg(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2})$;

D) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;

E) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$;

F) $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$;

G) $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, em que $\varepsilon = \cos(2\pi/3) + i\,sen(\frac{2\pi}{3})$;

H) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0$.

DRN-I16:

(c) ⇔ (e) (mesmo módulo e mesmo argumento); depois siga a sequência (e) ⇔ (d) ⇔ (g), (d) ⇔ (h) e (d) ⇔ (f); (a) ⇔ (b) ⇔ (c).

NOTA (Semelhança de Triângulos):

Dois triângulos $\Delta z_1z_2z_3$ e $\Delta w_1w_2w_3$ são semelhantes se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$, considerando a correspondência biunívoca dos vértices, na ordem numérica $z_1z_2z_3 \leftrightarrow w_1w_2w_3$.

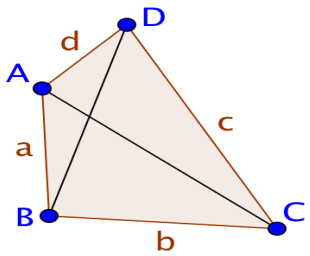
Isso significa que os itens (c) e (e) traduzem uma semelhança do triângulo equilátero com ele mesmo com uma correspondência de vértices na ordem $z_1z_2z_3 \leftrightarrow z_2z_3z_1$. Noutros termos, quando um triângulo satisfaz uma condição de semelhança interna dessa forma, ele é equilátero. E a recíproca é verdadeira. Por outro lado, procedendo de forma análoga, deduzimos, também, como condição necessária e suficiente para os dois triânglos $\Delta z_1z_2z_3$ e $\Delta w_1w_2w_3$ serem semelhantes a seguinte: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$.

A DESIGUALDADE DE PTOLOMEU

Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer. Então vale a seguinte desigualdade:

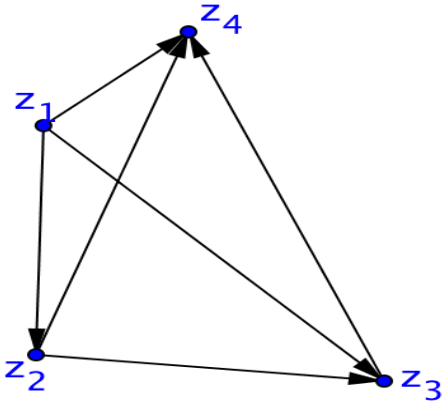
$$AC.BD \leq AB.CD + AD.BC\ .$$

Além disso, a igualdade ocorre, se e somente se, a soma de dois ângulos opostos é igual a 180º .



Representemos os pontos A, B, C e D pelos números complexos z_1, z_2 , z_3 e z_4. Interpretando vetorialmente os lados e as diagonais, podemos mostrar que a igualdade

$(*)(z_3 - z_1)(z_4 - z_2) = (z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ se verifica.



Vejamos:

$$(z_3 - z_1)(z_4 - z_2) = z_3z_4 - z_2z_3 - z_1z_4 + z_1z_2 \ (1)$$

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) = z_2z_4 - z_2z_3 - z_1z_4 + z_1z_3 \ (2)$$

$$(z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = z_3z_4 - z_1z_3 - z_2z_4 + z_1z_2 \ (3)$$

É imediato verificar que (2) + (3) = (1) [segundos membros].

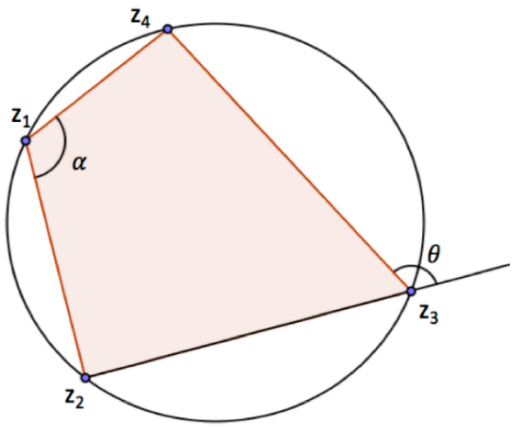
Logo, a igualdade (*) é verdadeira. Agora, podemos aplicar a desigualdade triangular para obter $|(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)| \leq |(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)| + |(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)|$ e concluir que (**) $|z_3 - z_1||z_4 - z_2| \leq |z_2 - z_1||z_4 - z_3| + |z_3 - z_2||z_4 - z_1|$.

Essa desigualdade equivale a **AC.BD ≤ AB.CD + AD.BC**.

Agora, falta mostrar a condição para a igualdade, que é o conteúdo do Teorema de Ptolomeu.

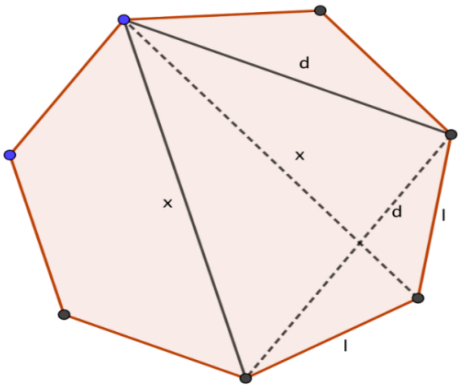
Para que ocorra a igualdade em (**) basta que $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ e $(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ tenham a mesma direção e o mesmo sentido. Noutros termos, existe um número real $r > 0$ tal que $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) = r\,(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$, o que equivale a $\frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = r > 0$.

Logo, o argumento desse quociente é 0°.



Se indicarmos os *argumentos* de $(z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$ e $(z_4 - z_3)/(z_3 - z_2)$ por α e θ, respectivamente, concluímos que $\alpha + \theta = 0^\circ$, o que implica $\alpha = \theta = 0°$ ou $\alpha = -\theta \neq 0$. No primeiro caso, os pontos são colineares. Então resta o segundo caso. *Como α e θ estão orientados em sentidos opostos e $|\alpha| = |\theta|$, então isso equivale a dizer que os ângulos opostos são suplementares.* Veja a figura anterior.

Na prova do **IME(2017/2018)** tinha uma questão que considerava um heptágono regular de lado l e menor diagonal d, e pedia o valor da maior diagonal. Usando a figura representativa a seguir conclua que a resposta é l.d/(d - l).



QI-17. (**IMO, lista curta, 1997**). Os comprimentos dos lados de um hexágono ABCDEF, satisfazem AB = BC, CD = DE e EF = FA. Prove que $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$.

Quando ocorre a igualdade?

DRN-I17:

Faça uma figura ilustrativa e coloque $a = AC, b = CE, c = EA$. Depois, use a desigualdade de Ptolomeu para chegar em $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Já vimos uma desigualdade relacionada com essa última expressão. Lembra?

Quanto à igualdade, ela só ocorre se é satisfeita à desigualdade de Ptolomeu e $a = b = c$. Logo, o Hexágono tem que ser regular.

QI-18. Prove que a equação de uma circunferência no plano complexo é

$$z.\bar{z} + \alpha.z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0, \text{em que } \alpha \in C \text{ e } \beta \in R.$$

NOTA-1 (Circunferência):

Verifique que essa equação é equivalente a $(\bar{z} + \alpha)(z + \bar{\alpha}) = r^2$, *em que* $r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$ *e o centro é* $-\bar{\alpha}$. *E fazendo* $a = -\bar{\alpha}$ *obtemos a forma* $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$, *que é equivalente a* $(z - a)(\overline{z - a}) = r^2$, *que equivale a* $|z - a|^2 = r^2$. *Observe ainda que no caso especial de* $a = 0$, *temos* $z.\bar{z} = r^2$, *que equivale a* $|z|^2 = r^2$.

NOTA-2 (Elipse e Hipérbole):

Se $z \in C$ *e* $a > 0$, *então a equação* $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, *com* $z_1 \neq z_2$ *e* $|z_1 - z_2| < 2a$, *representa uma elipse de centro* $(z_1 + z_2)/2$ *e focos* z_1 *e* z_2 *em relação aos eixos de* C. *E no caso de* $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$, *representa uma hipérbole.*

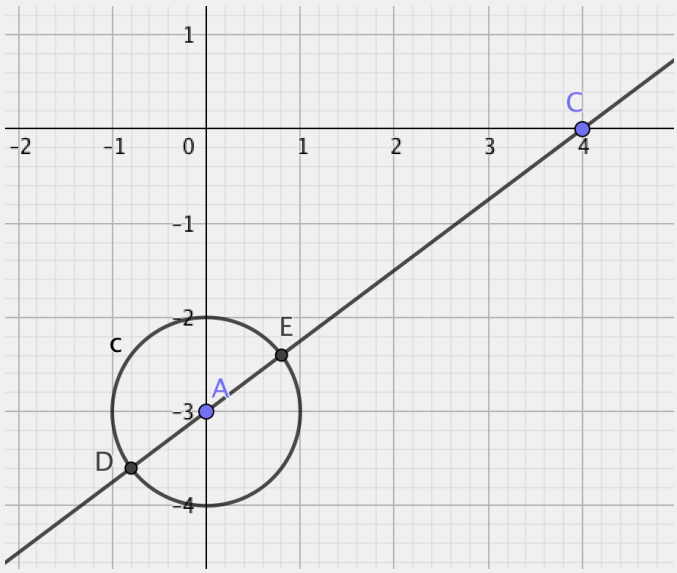
NOTA-3 (Discos):

Denominamos de **disco fechado** *de centro a e raio r > 0 a todo conjunto D =* $\{z \in C; |z - a| \leq r\}$. *Se D =* $\{z \in C; |z - a| < r\}$ *então D é um disco aberto.*

QI-19. (**IME-1978**). Determine os valores máximo e mínimo de $|z - 4|$ sabendo que $|z + 3i| \leq 1$, para $z \in C$.

DRN-I19:

$W_{min} = 4$ e $W_{max} = 6$, onde $W = |z - 4|$. Observe que $|z + 3i| \leq 1$ representa o disco unitário de centro em z = - 3i. Veja a figura esboçada a seguir. Perceba que CE = 4 e CD = 6.



A INVERSÃO DE STEINER E OS NÚMEROS COMPLEXOS

O conceito de Inversão do plano é devido ao grande geômetra suíço Jakob Steiner (1796 – 1863), de acordo com a referência [Boyer, 1974]. Para maiores informações sobre esse original matemático, **Acesse o Código QR**.

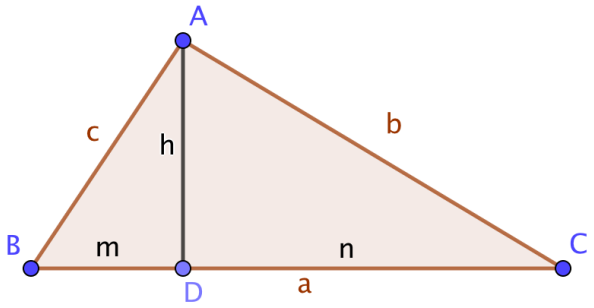
Considerando o desenvolvimento da Geometria Euclidiana sintética ao longo de dois milênios, é importante ressaltar aqui o impacto e implicações que um novo conceito pode realizar na configuração dela. De acordo, com a nossa teoria das Aproximações Multifárias, um conceito ou uma teoria é sempre uma aproximação da realidade estudada. Mas um novo conceito também propicia uma nova maneira de abordar e apresentar a realidade focada por ele. E isso, frequentemente, leva a um aprimoramento ou expansão do conhecimento acumulado sobre ela.

Aqui veremos um pouquinho da interação dialógica desse conceito com outros já apresentados e desenvolvidos ao longo do presente texto, revelando a beleza da Matemática, em especial da Matemática Intermediária, em sua evolução dinâmica ao longo da história humana.

Consideremos um ponto O de um plano W e uma circunferência C, contida em W, com centro O e raio k. Denominamos de **inversão** *do plano W em relação a C, à transformação J : W* → W*, onde W* = W – {O}, definida através da seguinte regra: para cada ponto X ∈ W*, J(X) = X' é o ponto da semirreta* $\overrightarrow{OX}$ *, para a qual vale:* $OX' . OX = k^2$ *, que é equivalente a* $OX' = \frac{k^2}{OX}$

Ao ponto O chamamos de **pólo** ou **centro** da inversão, ao número k^2 de **potência** da inversão e ao ponto X' de **inverso** do ponto X. Perceba que *k é a média geométrica de OX e OX'*. Isso nos sugere uma construção geométrica para se obter o inverso de um dado ponto X. Pois sabemos que algumas relações métricas do triângulo retângulo são apresentadas na forma de média geométrica. Conforme ilustrado na figura a seguir, as medidas dos catetos, b e c, bem como da altura h relativa à hipotenusa, são determinadas pelas médias geométricas expressas assim:

$$b^2 = n.a, c^2 = a.m \text{ e } h^2 = m.n .$$

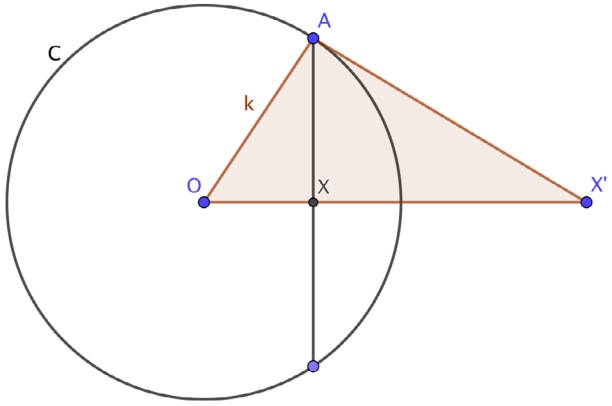


Essas relações são decorrentes da semelhança entre os triângulos ABC, DBC e DAC.

Para construirmos o inverso de um dado ponto X ≠ O, situado no **interior** da circunferência de inversão C, procedemos assim: seja A uma extremidade da corda por X, perpendicular a $\overrightarrow{OX}$, como ilustra a Fig.1. Então, a tangente em A intersecta $\overrightarrow{OX}$ no ponto X'. Como o triângulo OAX' é retângulo em A e k = OA, então $OX'.OX = k^2$.

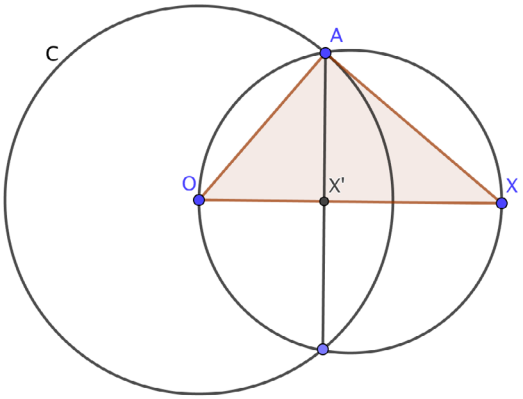
Portanto, X' é o inverso de X em relação a C.

Fig. 1



Para construir o inverso de um dado ponto X, situado no **exterior** de C, procedemos assim(-vide Fig. 2): seja A um dos pontos de interseção da circunferência C com a circunferência de diâmetro OX. Então, o ponto desejado X' é o pé da perpendicular de A a OX. Como se justifica este procedimento?

Fig. 2



Obs.: Hoje, com o acesso a programas como o Geogebra, que tem a função de inversão disponível, podemos construir, de modo fácil e rápido, não só a inversão de pontos, mas também a inversão de figuras planas, facilitando a compreensão de suas propriedades e o seu uso artístico.

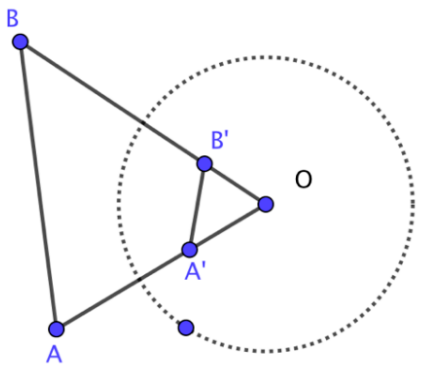
Veremos mais à frente, alguns exemplos. Aliás, as figuras apresentadas neste tópico, foram construídas com o Geogebra.

TEOREMA – I:

Se A' e B' são os inversos de A e B em relação a uma circunferência de raio k e centro O, então as distâncias AB e A'B' satisfazem à condição: $A'B' = \frac{k^2 AB}{OA.OB}$.

PROVA:

Em virtude da definição de inversão, temos que OA.OA' = k^2 = OB.OB', que implica $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$. Combinando isso com o caso LAL de semelhança de triângulos, concluímos que os triângulos OAB e OB'A' são semelhantes, na correspondência biunívoca O ↔ O, A ↔ B' e B ↔ A', como ilustrado na figura a seguir.



Isso implica: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.OA'}{OA.OB} = \frac{k^2}{OA.OB} \Leftrightarrow A'B' = \frac{k^2 AB}{OA.OB}$.

Vamos exemplificar, numericamente, essa transformação das distâncias entre pontos do plano que a inversão de Steiner provoca.

Considere uma circunferência W do plano cartesiano, dada pela seguinte equação: $x^2 + y^2 = 9$. Dados os pontos A = (2,1) e B = (1, 2), calcular a distância entre os pontos inversos de A e B em relação a W.

O resultado a ser encontrado é A'B' = $\frac{9\sqrt{2}}{5} \cong 2{,}55$. Verifique. A seguir, de modo análogo, calcule a distância entre os inversos de A e B em relação à circunferência D de equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$. O resultado a ser encontrado é A'B' = $9\sqrt{2} \cong 12{,}73$. Como você explica essa variação?

Corolário do Teorema-I:

Se A', B', C' e D' são os inversos dos pontos distintos A, B, C e D em relação a uma circunferência de raio k e centro O, então vale a igualdade:

$$\frac{A'C'.B'D'}{A'D'.B'C'} = \frac{AC.BD}{AD.BC}.$$

PROVA:

Pelo teorema-I, temos que $\frac{A'C'.\ B'D'}{A'D'.\ B'C'} = \frac{\frac{k^2AC}{OA.OC} \cdot \frac{k^2BD}{OB.OD}}{\frac{k^2AD}{OA.OD} \cdot \frac{k^2BC}{OB.OC}} = \frac{AC.BD}{AD.BC}$.

NOTA(Razão Cruzada):

Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos de um plano E. Denominamos de *razão cruzada* da quádrupla (A, B, C, D) ao número:

$$\{AB, CD\} = \frac{AC.BD}{AD.BC}.$$

Com esse conceito podemos interpretar o corolário anterior assim:

"A inversão preserva razões cruzadas."

NOTA:

Embora a razão cruzada de uma quádrupla(ordenada) de pontos tenha um único valor, para quatro pontos, a razão cruzada pode assumir 6 valores distintos, os quais, podem ser expressos assim: $\lambda, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Eles correspondem às 6 permutações circulares possíveis de 4 pontos.

Para exemplificar isso, numericamente, consideremos os quatro pontos A, B C e D do segmento AD, com as seguintes distâncias entre eles, em relação a uma dada unidade: AD = 6, AB = 1, BC = 2, CD = 3. Decorrem desses valores que as distâncias AC = 3 e BD = 5. Temos, pois, os seguintes valores para a razão cruzada de A, B, C e D:

A) {AB, CD} = $\frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

B) {AB, DC} = $\frac{AD.BC}{AC.BD} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

C) {AC, BD} = $\frac{AB.CD}{AD.BC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

D) {AC, DB} = $\frac{AD.BC}{AB.CD} = \frac{12}{3} = 4$.

E) {AD, BC} = $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

F) {AD, CB} = $\frac{AC.BD}{AB.CD} = \frac{15}{3} = 5$.

Fazendo $\lambda = \frac{4}{5}$, obtemos:

1 - $\lambda = \frac{1}{5}, \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{4}, \frac{1}{1-\lambda} = 5, \frac{\lambda}{\lambda-1} = 4$ e $\frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{1}{4}$.

TEOREMA – J:

Seja J a inversão de um plano W em relação a uma circunferência C, de centro O e raio k. Se L é uma reta de W* e S é uma circunferência contida em W*, então

I) J(L) = M*, onde M é uma circunferência que passa por O;

II) J(M*) = L;

III) J(S) é uma circunferência contida em W*.

Obs.: W* = W – {O} e M* = M – {O}.

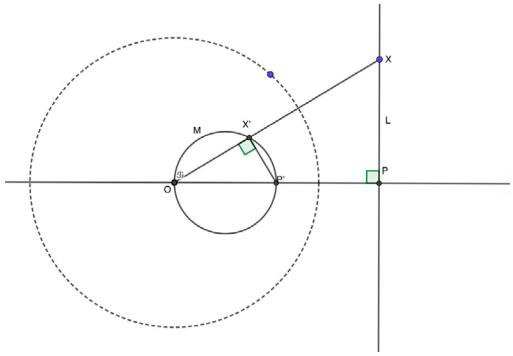
PROVA:

(i) Seja d > 0 a distância do pólo O à reta L. Então, existem P $\in$ L tal que OP = d. Se X é outro ponto qualquer de L, então ΔOPX é um triângulo retângulo, com $O\hat{P}X$ reto. Se J(P) = P' e J(X) = X', então temos: OX . OX' = k^2 = OP.OP'.

Segue-se que $\frac{OX}{OP} = \frac{OP'}{OX'}$.

Pelo caso LAL de semelhança de triângulos, concluímos que ΔOPX ~ΔOX'P'. Isso implica que $O\hat{X}P$ é reto e, por conseguinte, que ΔOX'P' é um triângulo retângulo em X'. Logo, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, todos os pontos X' pertencem à circunferência M de diâmetro OP' (vide Fig. 3).

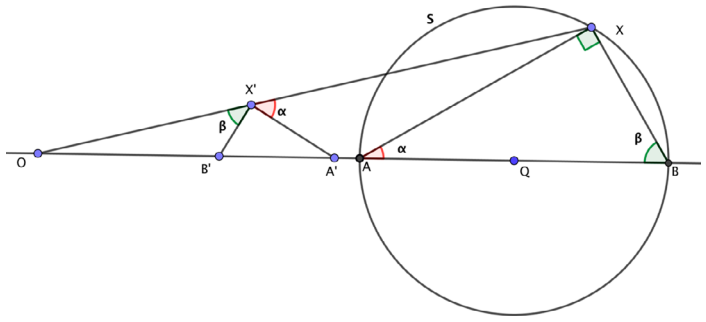
Fig.3



Na verdade, todos os pontos X' pertencem a M*, já que J(X') = X e X' ≠ O, por definição de J. Por outro lado se Y M* e Y ≠ P', então J(Y) = Y' é um ponto de L. Com efeito, sendo ∆OP'Y retângulo em Y, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, e ∆OP'Y ~ ∆OY'P, pelo caso LAL, segue-se que ∆OY'P é retângulo em P. E como por um ponto de uma reta, no caso $\overleftrightarrow{OP}$, passa uma única perpendicular num plano dado, segue-se que Y ∈ L. Concluímos assim, que J(L) = M*.

(ii) Sabemos que se J(X) = X', então J(X') = X. E pela parte (i), demonstrada, deduzimos que J(M*) = L.

Fig.4

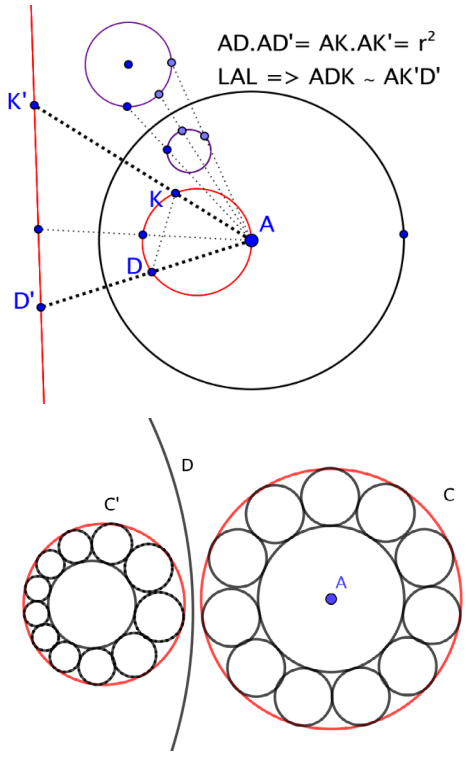


(iii) Seja Q, o centro de S. Consideremos a semirreta $\overrightarrow{OQ}$. Esta intersecta S nos pontos A e B, conforme ilustra a Fig. 4. Tomemos A' = J(A) e B' = J(B). Agora, seja X um ponto qualquer de S, diferente de A e de B. Então X' = J(X) pertence à semirreta $\overrightarrow{OX}$. Segue-se que OX.OX' = k^2 = OB.OB' = OA.OA', o que nos leva a $\frac{OX}{OB} = \frac{OB'}{OX'}$ e $\frac{OX}{OA} = \frac{OA'}{OX'}$. Pelo caso LAL de semelhança de triângulos temos que a ∆OXB ~∆OB'X' e ∆OXA ~ ∆OA'X'. Disso deduzimos a igualdade dos ângulos indicados por α e β na Fig. 4 . Por outro lado, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, $A\hat{X}B$ é reto. Então $\alpha + \beta = 90°$ e, por conseguinte, ∆B'X'A' é retângulo em X'. Portanto, X' pertence à circunferência de diâmetro B'A', contida em W*. Com uma argumentação análoga deduzimos que se Y pertence a esta circunferência de diâmetro B'A', então J(Y) = Y' pertence a S. Concluímos assim, que J(S) é uma circunferência contida em W*.

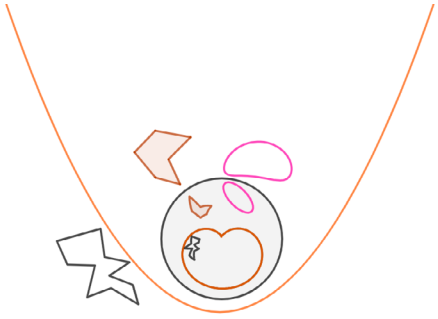
As duas figuras a seguir ilustram as propriedades descritas no Teorema-J, ou seja: *a Imagem por J de uma reta, que não passa pelo centro A, é uma circunferência que contém A e vice versa; a imagem por J de uma circunferência, que não contém o centro A, é também uma circunfe-*

rência que não contém A. A segunda figura destaca a inversão de circunferências tangentes a duas circunferências concêntricas em relação a uma circunferência D. Perceba que a tangência é preservada pela inversão. Esta situação está associada ao chamado **porismo de Steiner.** Algumas construções animadas usando Geogebra estão disponíveis no **Código QR(I).** Também na Wikipédia há vasto material em inglês sobre *geometria inversiva*. Para avançar neste tema, consulte, via Google, algumas páginas/textos disponíveis. Entre eles indicamos:

O **Código QR(II)** e **o Código QR(III)**.

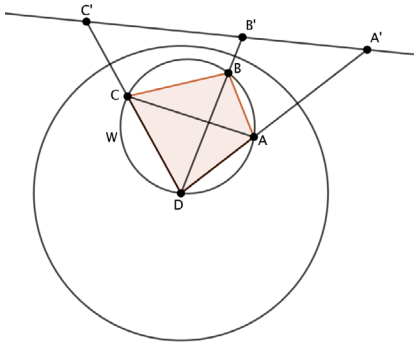


Usando o Geogebra para a prática com da geometria inversiva, os aprendentes(mestres e estudantes) poderão ter momentos de diversão e beleza, descobrindo, com rapidez, relações de proximidade entre diversas formas geométricas, o que gera novas questões e desafios. Eis algumas figuras ilustrativas delas a seguir. No interior da circunferência de inversão tem as imagens de uma parábola e dois polígonos que estão no exterior dela. E a elipse interior tem sua imagem inversa no exterior. Observar a correpondènciа das cores das figuras associadas pela inversão.



DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU POR INVERSÃO

Considere a figura a seguir. Nela temos o quadrilátero ABCD inscrito na circunferência W de raio r, de acordo com a hipótese do teorema de Ptolomeu. Fazendo a inversão dos pontos A, B e C em relação a uma circunferência de centro D e raio k > r, obtemos os pontos A', B' e C', que são colineares em virtude de W passar pelo centro de inversão D, conforme o Teorema-J.



Usando o Teorema-I da inversão, obtemos:

$$A'B' = \frac{k^2 AB}{DA.DB}\ ,\ B'C' = \frac{k^2 BC}{DB.DC} \text{ e } A'C' = \frac{k^2 AC}{DA.DC}\ .$$

Como A'C' = A'B' + B'C', então $\frac{k^2 AC}{DA.DC} = \frac{k^2 AB}{DA.DB} + \frac{k^2 BC}{DB.DC}$. (1)

De (1) segue $\frac{AC}{DA.DC} = \frac{AB}{DA.DB} + \frac{BC}{DB.DC} \Leftrightarrow \frac{AC.DB}{DA.DB.DC} = \frac{AB.DC}{DA.DB.DC} + \frac{BC.DA}{DA.DB.DC} \Leftrightarrow$ AC.DB = AB.DC + BC.DA, o que conclui a demonstração.

Obs.: Perceba que nesta demonstração não usamos trigonometria. Compare com a demonstração dada no capítulo anterior, em que se usou a lei dos cossenos. Compare também com a que usamos números complexos. Qual a mais simples? Qual a mais bela? A seguir, apresentamos uma generalização do Teorema de Ptolomeu, em que combinamos as técnicas de inversão com as de trigonometria.

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU

Em qualquer quadrilátero convexo ABCD vale a relação:

(*)AC^2. BD^2 = AB^2 . CD^2 + AD^2 . BC^2 – 2AB.BC.CD.DA.cos(B + D).

Observe que a desigualdade de Ptolomeu pode ser obtida como uma consequência imediata dessa relação (*). Basta ver que -cos(B + D) ≤ 1 => AC^2. $BD^2 \leq AB^2$. $CD^2 + AD^2$. $BC^2 + 2AB.BC.CD.DA = (AB.CD + AD.BC)^2 \Leftrightarrow AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$.

E a igualdade só ocorre se A + C = π, o que implica o teorema de Ptolomeu.

PROVA:

Agora, para provar (*) pode-se usar a **inversão de Steiner**, com centro em D e raio r = 1, para obter A', B', C', como ilustrado na figura a seguir. Temos, pois, que

DA'= 1/DA,

DB' = 1/DB e DC' = 1/DC.

E usando o Teorema-I da inversão, deduzimos:

$$\text{(i)} \quad A'C' = \frac{AC}{DA.DC}$$

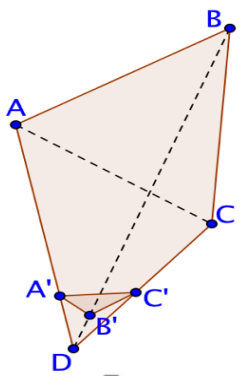
$$\text{(ii)} \quad B'C' = \frac{BC}{DB.DC}$$

$$\text{(iii)} \quad A'B' = \frac{AB}{DA.DB}.$$

Por outro lado, das semelhanças de triângulos implicadas na construção dos pontos inversos, decorrem as igualdades entre as medidas dos ângulos correspondentes, que implicam a condição:

$$\angle B' = \angle B + \angle D. \quad \text{(iv)}$$

Perceba que ∠B'= ∠A'B'C' = ∠B'DA' + ∠B'DC' + ∠B'C'D + ∠B'A'D, ∠B = ∠ABC = ∠B'C'D + ∠B'A'D e ∠D = ∠ADC = ∠B'DA' + ∠B'DC'.



Aplicando a lei dos cossenos em A'B'C', tem-se:

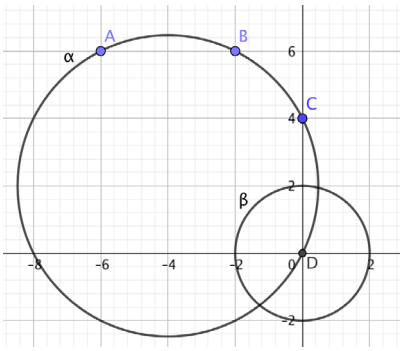
$$(A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2 \; 2(A'B').(B'C').\cos(B') \quad (1)$$

Substituindo em (1) os valores correspondentes obtidos nas igualdades (i), (ii), (iii) e (iv), tem-se $\frac{AC^2}{DA^2.DC^2} = \frac{AB^2}{DA^2.DB^2} + \frac{BC^2}{DB^2.DC^2} - 2\frac{AB.BC}{DA.DB^2.DC}.\cos(B+D)$, que simplificando, através do denominador comum $DA^2DB^2.DC^2$, resulta na relação (*):

$$AC^2.\ BD^2 = AB^2\ .\ CD^2 + AD^2\ .\ BC^2 - 2AB.BC.CD.DA.\cos(B + D).$$

Um exemplo com Coordenadas:

Considere os quatro pontos A, B, C e D da circunferência α, contida no plano cartesiano, conforme mostra a figura a seguir.



A) Encontre os inversos dos pontos A e B da circunferência α, determinados pela inversão do plano em relação à circunferência β de centro D e raio 2.

B) Calcule as coordenadas do centro da circunferência β', imagem de β obtida pela inversão do plano em relação à circunferência α.

C) Descreva geometricamente os pontos que pertencem à interseção da reta t com a circunferência β', em que t é a imagem de α obtida pela inversão do plano em relação a β.

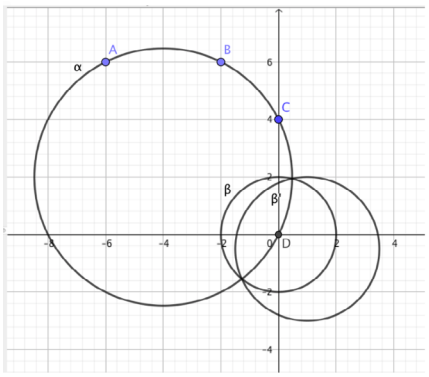
D) Calcule os 6 valores possíveis da razão cruzada dos pontos A, B, C e D.

Comentários:

A) Equações das retas DA e DB: y = - x ; y = - 3x. Inversos: A' = (-1/3, 1/3) e B' = (-1/5, 3/5).

B) A equação de β' é $(x - 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 6{,}25$ e o centro é $O_1 = (1, -1/2)$, conforme ilustra a figura a seguir, construída com o GeoGebra. Na obtenção das coordenadas desse centro use o mesmo método usado no item (a) para obter os inversos de E = (0, 2) e F = (-2, 0). Deduza que E' = (1, 2) e F' = (1 , -3). Perceba que O_1 está na reta y = - x/2 e faça O_1E' = O_1F' para encontrar $O_1 = (1, -1/2)$.

C) Perceba que t passa pelos pontos de $\alpha \cap \beta = \beta' \cap \beta$.



D) $\lambda = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{\lambda} = \frac{5}{3}$,$1 - \lambda = \frac{2}{5}$,$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{5}{2}$, $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{6}{25}$ e $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{25}{6}$.

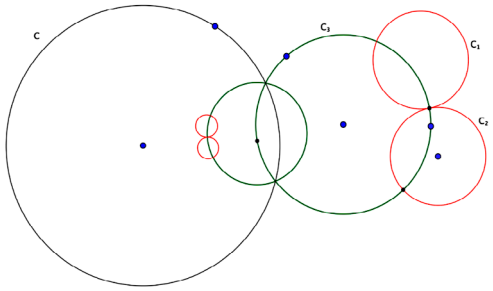
A INVERSÃO NO PLANO COMPLEXO

A inversão de Steiner pode ser traduzida na linguagem dos números complexos, preservando o padrão da definição mostrada anteriormente, nos termos que se seguem. Considere no plano complexo **C** uma *circunferência* γ *de centro* z_0 *e raio r*. Seja z um ponto do plano **C**. Seguindo o modelo já mostrado, seja z' o inverso de z em relação a γ; então a condição que deve ser satisfeita é $|z - z_0|.|z' - z_0| = r^2$, que implica $|z' - z_0| = \frac{r^2}{|z - z_0|}$. Mas, z' – z_0 e z – z_0 têm a mesma direção e o mesmo sentido. Logo

$$z' - z_0 = \frac{r^2}{|z - z_0|}\frac{(z - z_0)}{|z - z_0|} = \frac{r^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2} = \frac{r^2}{\bar{z} - \overline{z_0}}$$ ou, de modo equivalente, $z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \overline{z_0}} + z_0$.

Assim, podemos definir a inversão em **C** *como a transformação(ou função) J:* **C*** $\rightarrow$ **C***, em que* **C*** = **C** – {z_0}*, definida por* $J(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \overline{z_0}} + z_0$. No caso de raio unitário e centro $z_0 = (0,0) =$ 0 + 0.i = 0 a lei da inversão *J* fica mais simples: $J(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ou $J(z) = \frac{z}{|z|^2}$. Daremos ênfase nesse caso especial.

Evidentemente, todas as propriedades destacadas antes são válidas nessa nova apresentação. Uma propriedade muito relevante é a da preservação, em valor absoluto, das medidas dos ângulos formados por duas curvas*: se duas curvas se intersectam formando um ângulo ø, então suas imagens pela inversão J, também se intersectam formando um ângulo ø.* A seguir, temos uma ilustração dessa propriedade: a representação de duas circunferências(C_1, C_2) tangentes entre si e ortogonais(ø = 90º) com a circunferência C_3, bem como, em tamanho menor, as suas imagens obtidas pela inversão em relação à circunferência C. Observe que as imagens de C_1 e C_2 são tangentes entre si e ortogonais à imagem da C_3.



INVERSÃO E TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS

A função J : **C*** $\rightarrow$ **C*** tal que J(z) = $\frac{1}{z}$ tem as propriedades principais da inversão definida na figura mostrada. Por isso ela também é chamada de inversão. Mas observe uma diferença entre elas: a inversão J(z) = $\frac{1}{z}$ é composta da inversão original G(z) = $\frac{1}{\bar{z}}$ com uma reflexão H em relação ao eixo real-x dada por H(z) = $\overline{z}$. A vantagem dessa forma é que a variável z é a mesma no domínio e no conjunto imagem. No estudo mais geral das funções de variável complexa, ela é a forma preferida.

Aliás, a inversão nessa forma, faz parte de uma família mais ampla de funções M(z) denominadas de *Transformações de Möbius,* que se definem pela regra M(z) = $\frac{az+b}{cz+d}$, tal que $ad - bc \neq 0$, em que a, b, c e d são constantes complexas.

Essas transformações são válidas no plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty$ = **C** $\cup \{\infty\}$, que comumente se chama a *Esfera de Riemann,* em virtude de existir uma aplicação bijetiva(*projeção estereográfica*) da esfera $\mathbf{S^2}$ de R^3 em $\mathbb{C}_\infty$, conforme ilustrado na figura a seguir. Associa-se o polo norte N = (0, 0, 1) da esfera ao ponto ∞, Indicando essa projeção por P_E, temos que P_E (0, 0, 1) = ∞ e para os outros pontos vale a seguinte fórmula:

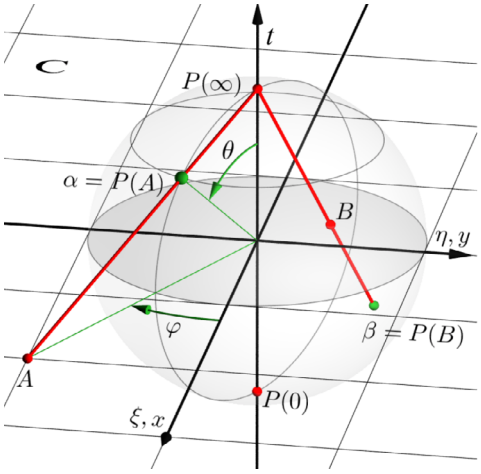
P_E (x, y, t) = $(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t}, 0)$, em que (x, y, t) $\in$ $\mathbf{S^2}$ e $(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t}, 0) \in$ **C.**

Também, pondo z = x + iy, podemos representá-la por P_E (z, t) = $\frac{z}{1-t}$.

A inversa de P_E tem a expressão a seguir para os pontos de **C** e $P_E^{-1}(\infty) = (0, 0, 1)$.

$$P_E^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

Assim, temos que as *Transformações de Möbius* são bijeções de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$. Elas também são conhecidas por *homografias* ou *funções homográficas.* As homografias, assim como as inversões, preservam ângulos entre curvas, levam circunferências/retas em circunferências/retas e também preservam razões cruzadas de quatro pontos distintos.



Uma propriedade destacada dessas transformações se enuncia assim:

"*Se M é uma transformação de Möbius, então M é uma composição de translações, rotações, homotetias e da inversão.*"

Um outro resultado interessante acerca dessas transformações é o seguinte:

Uma transformação de Möbius fica completamente determinada por seus valores em três pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$.

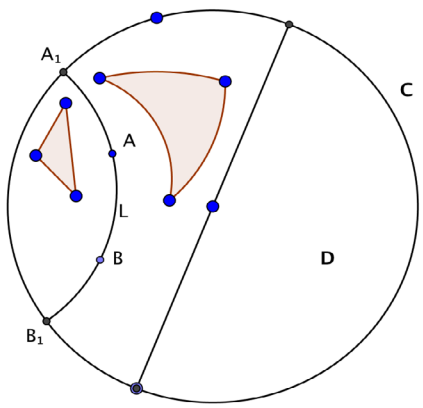
Mais detalhes sobre tais transformações podem ser vistos nas referências [Soares, 1999], [Araújo, 1998] e [Lins Neto, 1993]. Na internet há muito material sobre tais transformações, principalmente em inglês. Inclusive, há muitas construções artísticas envolvendo essas transformações, revelando muita beleza e afirmando a Matemática como Arte também.

Um trabalho que ajuda a ampliar os conhecimentos sobre tais transformações, de maneira didática, está disponível no **Código QR(I)**. Outro trabalho que aponta uma aplicação dessas transformações na otimização de imagens panorâmicas podem ser acessadas no **Código QR(II)**.

Como uma oportunidade para você leitor participar de forma mais ativa na compreensão dessas funções, prove que a composta de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius e que toda transformação de Möbius é invertível. Deduza que o conjunto dessas transformações, munido da operação composição de funções é um grupo. Lembre-se que a composição de funções é associativa. Algumas questões apresentadas neste capítulo ampliam o conhecimento sobre essas interessantes transformações do plano complexo estendido: QI-24, QI-69, QI-70, QI-71, QI-128, QI-129, QI-130 e QI-166.

A Inversão de Steiner e o Disco de Poincaré

O famoso matemático Henri Poincaré(1854-1912) criou um modelo de **geometria hiperbólica,** uma geometria não-euclidiana, baseado em um disco D de raio r = 1. Nesse modelo, *o análogo de "retas euclidianas" são os diâmetros de D ou os arcos de circunferências ortogonais à fronteira C de D*, como ilustrado na figura dada a seguir.



Nesta geometria não vale o V postulado de Euclides, o famoso postulado das paralelas. Nela, vale o seguinte: *por um ponto fora de uma dada reta* **L** *passa mais de uma reta paralela a* **L**; e *um triângulo hiperbólico tem soma dos ângulos internos menor do que 180º*. O interior de D é o que se denomina **plano hiperbólico.** A fronteira contém pontos ideais, pontos no infinito.

Poincaré definiu a **distância hiperbólica** entre dois pontos A e B do disco D assim:

$$d(A, B) = \left|\ln\left(\frac{\frac{AA_1}{AB_1}}{\frac{BA_1}{BB_1}}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{AA_1 . BB_1}{AB_1 . BA_1}\right)\right|$$ onde AA_1, AB_1, BA_1 e BB_1

QR (I) QR (II)

São distâncias euclidianas usuais, ln é o logaritmo neperiano e A_1, B_1, são pontos da fronteira C do disco D, conforme mostra a figura a seguir. Perceba que à medida que o ponto B se aproxima, ao longo de L, de B_1 a distância cresce para valores infinitos.

Lembremos agora, as três propriedades que caracterizam uma *função distância d* em um espaço métrico V:

(1) $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$, para todos $u, v \in V$;

(2) $d(u, v) = d(v, u)$, para todos $u, v \in V$;

(3) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$, para todos $u, v, w \in V$ (desigualdade triangular).

De fato, a *"distância hiperbólica"* definida no disco D, satisfaz a essas três condições.

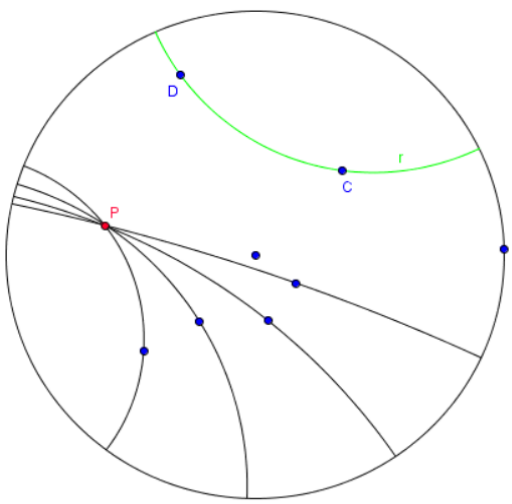
No caso de (1) e (2) é imediato, pois $\left|\ln\left(\frac{AA_1.BB_1}{AB_1.BA_1}\right)\right| \geq 0, \ln(1) = 0$ e $\left|\ln\left(\frac{AA_1.BB_1}{AB_1.BA_1}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{AB_1.BA_1}{AA_1.BB_1}\right)\right|$.

E a propriedade (3) decorre das propriedades dos logaritmos e da desigualdade triangular.

A razão $\frac{\frac{AA_1}{AB_1}}{\frac{BA_1}{BB_1}} = \frac{AA_1.BB_1}{AB_1.BA_1}$ é a **razão cruzada** da quádrupla (A , B, A_1, B_1). Um resultado interessante sobre essa razão cruzada, que vale a pena ser lembrado, é o seguinte: *a inversão euclidiana preserva a razão cruzada*. E isso acarreta, em virtude da definição de distância hiperbólica, uma propriedade que correlaciona Inversão e Disco de Poincaré: **as inversões euclidianas de D são isometrias hiperbólicas.** Uma outra propriedade da geometria hiperbólica de D, que também se relaciona com a Inversão euclidiana é:

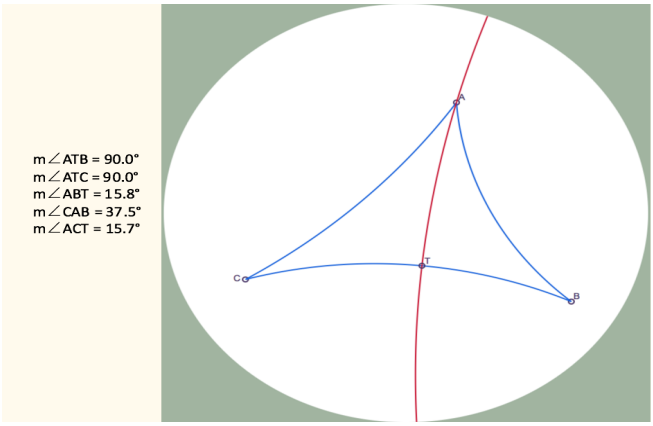
"A reflexão hiperbólica de uma figura F do disco D em relação a uma "reta" L, equivale à inversão euclidiana de F em relação à circunferência que contém L."

Na figura apresentada, ilustramos a reflexão de uma figura triangular em relação à reta L e na figura a seguir, ilustramos a propriedade: *por um ponto P fora de uma dada reta $\overleftrightarrow{DC}$, passa mais de uma reta paralela a $\overleftrightarrow{DC}$.*



Na figura a seguir, ilustramos a propriedade:

Um triângulo hiperbólico tem soma dos ângulos internos menor do que 180º.



A medida de cada "ângulo hiperbólico" interno de um triângulo hiperbólico é dada pela medida do ângulo formado pelas retas euclidianas tangentes às "retas hiperbólicas" no ponto de interseção dessas. As medidas dadas a seguir e o gráfico do triângulo hiperbólico foram feitos com a ajuda do software NonEuclid. Sobre este software, veja a publicação, na Web, de Joel Castellanos: **Acesse no Código QR(I)**. Para maiores detalhes sobre inversão reveja o tópico "A inversão de Steiner e os Números Complexos" do presente capítulo. Para ampliar seus conhecimentos sobre a geometria hiperbólica no Disco de Poincaré consulte a dissertação exposta no **Código QR(II)**.

Sobre Henri Poincaré(1854-1912), talvez o maior matemático de seu tempo, **Acesse no Código QR(III)**. Uma obra muito agradável de se ler que trata de Poincaré, Riemann e outros matemáticos, é "A Solução de Poincaré" de Donal O'Shea, publicada pela editora Record em 2009. Esse livro nos mostra o quanto a obra de Riemann foi importante para o desenvolvimento da matemática e da física do século XX.

Uma visão pictórica da geometria hiperbólica a partir de uma esfera você pode ver **no Código QR(IV)**.

QI-20. [JNCF] A) Mostre que a imagem da circunferência $|z - 2| = 1$ dada pela inversão J(z) = $\frac{1}{\bar{z}}$ é também uma circunferência. Reescreva as equações dessa circunferência na forma descrita da QI-18 e também em função de x e y, sendo z = x + iy.

B) Mostre, também, que a imagem, dada por J, da circunferência L dada por $|z - 1/2| = 1/2$ é uma reta vertical. Observe que L contém a origem (0,0) e seu centro está no eixo real.

C) Considere ainda uma circunferência dada por $|z - a| = 1$, em que $|a| = 1$ e $a \neq \pm 1$. Prove que sua imagem, dada por J, é uma reta não vertical. Compare com o item B.

D) Determine a imagem da circunferência $|z - 2| = 1$ dada pela inversão $J(z) = \frac{9}{\bar{z} - 2} + 2$. Esboce as três circunferências no plano de Argand-Gauss. A terceira circunferência é a

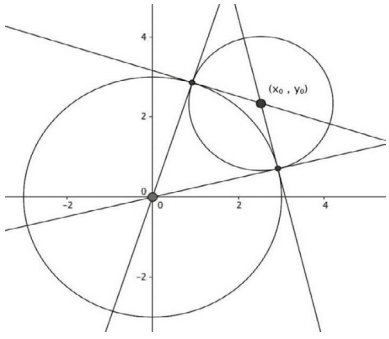
QR (I) QR (II) QR (III) QR (IV)

da inversão.

QI-21. [JNCF] A figura a seguir ilustra um tipo de arte que foi muito utilizada por um artista holandês do século XX: Escher. Ela, na verdade se inspira no chamado modelo de Poincaré da Geometria Hiperbólica, uma das geometrias não euclidianas. Ela está baseada na construção de circunferências ortogonais, que são aquelas que se intersectam em ângulos retos. Ou seja, as tangentes de ambas, nos pontos de interseção, são perpendiculares. E como se pode ver na figura, todos os arcos menores, dentro da circunferência, são ortogonais a esta.



Para maior clareza, na segunda figura, apresentamos as relações entre duas circunferências ortogonais, sendo uma de centro na origem (0, 0) e a outra de centro (x_0, y_0).



Suponha-se que um arquiteto resolveu decorar o interior do salão de festas de um edifício residencial com algumas figuras criadas com esta propriedade. E no projeto inicial ele precisa que o raio da circunferência maior seja igual a 3 e que uma das circunferências menores passe pelos pontos (3, 0) e $(\sqrt{5}, 2)$. Qual será o raio dessa circunferência, considerando o modelo mostrado na segunda figura? (Use $\sqrt{5} = 2{,}24$).

A) 1,14. **B)** 3,38. **C)** 4,48. **D)** 2,24. **E)** 3,24.

QI-22. **[JNCF]** Considere a questão anterior. Faça a seguinte mudança: mude do plano cartesiano real para o complexo. Descreva as equações das duas circunferências ortogonais em termos de números complexos z, em que z = x + iy. A seguir, obtenha a inversão delas pela função $J(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Verifique a propriedade citada acima da preservação dos ângulos entre as curvas: as imagens também são circunferências ortogonais. Por último considere a circunferência maior como circunferência de inversão e determine a inversa da menor

em relação a ela. O que de interessante aconteceu?

NOTA:

Se O_1 e O_2 são os centros de duas circunferências ortogonais do plano complexo e P é um ponto da interseção delas, então o produto interno dos vetores PO_1 e PO_2 é 0. Ou seja, $(O_1 - P).(O_2 - P) = 0$. Lembre-se que o cosseno do ângulo θ entre dois vetores u e v é dado por $\cos\theta = \frac{u.v}{|u|\,|v|}$.

QI-23. [JNCF] A) Prove a seguinte propriedade: Se duas circunferências C_1 e C_2 são ortogonais, então a inversa de C_2 em relação a C_1 é a própria C_2.

B) Qual ponto P do interior de um triângulo ABC é centro de uma circunferência, em relação à qual, a inversão de ABC resulta na união de três arcos de circunferências congruentes? Qual a medida de cada ângulo formado pela interseção de cada par de arcos?

QI-24. [JNCF] A) Adotando a expressão da razão cruzada para uma quádrupla (z_1, z_2, z_3, z_4) de números complexos distintos como o número $r = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$, verifique que a razão cruzada dos inversos deles, pela inversão $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$, é o conjugado de r.

B) Se essa razão cruzada r é um número real, então que propriedade geométrica característica tem esses pontos?

Obs.: Em relação a essa última pergunta veja a questão QI-62, mais à frente. Verifique também que se a inversão for definida por $f(z) = \frac{1}{z}$, então a razão cruzada é preservada. Lembre-se, que nessa forma a inversão é uma função homográfica.

AS RAÍZES DE $Z^n = 1$

Usando a fórmula de Moivre podemos obter as raízes n-ésimas de qualquer número complexo. Estudaremos agora um caso especial, **as raízes enésimas da unidade,** ou seja, as raízes de $\mathbf{z^n = 1}$. A partir delas podemos calcular as de todos os outros números complexos. Elas são uma espécie de "forma reduzida" das outras. E têm um charme singular: em sua forma simples integra vários tópicos da Matemática tais como Álgebra, Geometria, Trigonometria e Teoria dos Números. E através da Fórmula de Euler $\mathbf{e^{it} = cos(t) + isen(t)}$ integra o Cálculo e a Análise. Por tudo isso merece um tratamento destacado.

Desejamos obter os números complexos w tais que $w^n = 1$. Uma primeira observação é que $|w| = 1$, o que implica o seguinte: *todas as raízes enésimas da unidade estão em* $\mathbf{S^1}$, o grupo multiplicativo de que falamos, que geometricamente é a circunferência de raio 1 e centro (0, 0) do plano complexo.

Em consequência disso, a potência de qualquer uma delas está em $\mathbf{S^1}$, bem como o produto

de duas ou mais delas. Uma segunda observação: cada raiz w pode ser colocada na forma polar w = cos θ + i senθ e, portanto 1 = cos(0) + isen(0).

Pela fórmula de Moivre, w^n = 1 equivale a cos($n\theta$) + isen($n\theta$) = cos(0) + isen(0). Disso obtemos o sistema: **cos($n\theta$) = cos 0 e sen($n\theta$) = sen 0,** que equivale, em virtude do período 2π das funções seno e cosseno, a $n\theta$ = 0 + 2kπ, k ∈ Z. Logo $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ e w tem a forma **(1) w = cos($\frac{2k\pi}{n}$) + isen($\frac{2k\pi}{n}$).**

Quantas dessas raízes são distintas? Qual a representação mais simples para elas?

Busquemos as respostas para tais perguntas.

Atribuindo a k os valores 0, 1, 2,...,n - 1, obtemos os seguintes argumentos:

0, 2π/n, 4π/n, ..., 2(n - 1)π/n, que formam uma *progressão aritmética de razão 2π/n* e correspondem a pontos distintos de **S¹**, os quais representam as raízes w. Ao prosseguirmos com valores maiores de k, apenas vamos repetir os mesmos pontos de **S¹**, em virtude da periodicidade da função de Euler. Ou seja, **E(t) = E(t + 2kπ)**; e consequentemente, não estaremos obtendo novas raízes w de z^n = 1.

Desse modo, concluímos que **existem apenas n raízes distintas de z^n = 1** e que elas são obtidas atribuindo-se a k os valores 0, 1 , 2, ... n - 1 na fórmula (1).

Comumente, indicamos as raízes enésimas da unidade, na sua forma mais simples, por ε_k, k ∈ {0, 1, 2,..., n - 1}. Ou seja:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Como os arcos entre duas raízes sucessivas têm a mesma medida, 2π/n, então suas posições em **S¹** *são os vértices de um polígono regular de n lados, os quais são as cordas dos referidos arcos*. Em virtude disso e da fórmula de Moivre, temos que:

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon;$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2;$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon^{n-1}.$$

Veja assim, que **o conjunto das n raízes distintas de z^n = 1 é "gerado" pelas potências de expoentes 0, 2, 3,...,n - 1, de uma delas, ε_1. Comumente, a indicamos por ε.** Veja que ε^n = 1.

Para ilustrar, consideremos os casos: z^3 = 1 e z^4 = 1.

As raízes da primeira são para k ∈ {0 , 1, 2 } da forma $\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{3} + isen\frac{2k\pi}{3}$.

Ou seja

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \varepsilon_2 = cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

Observe que $\varepsilon^2 = \varepsilon_2$ e $\varepsilon^3 = \varepsilon_0 = 1$. E verifique que $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 0$

As raízes da segunda são:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + isen\, 0 = 1; \ \varepsilon_1 = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} = i;$$

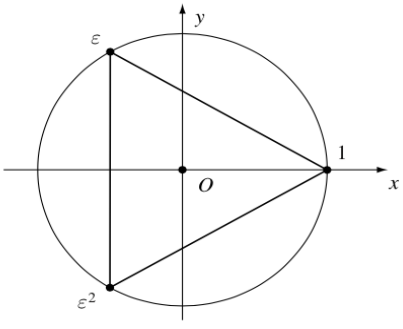
$$\varepsilon_2 = cos\,\pi + isen\,\pi = -1 \text{ e } \varepsilon_3 = cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2} = -i.$$

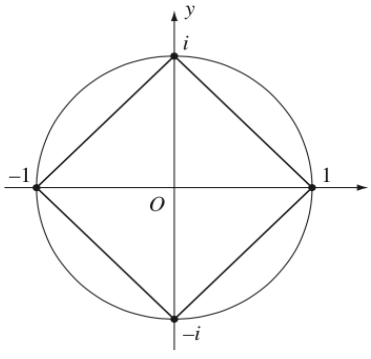
Observe que $\varepsilon^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon^3 = \varepsilon_3$, $\varepsilon^4 = 1$.

E verifique que $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$.

Prove que, em geral, vale $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^n = 0$.

As representações dessas raízes em **S¹** estão nas figuras a seguir:





As raízes da unidade gozam de várias propriedades: o produto de duas delas é uma raiz da unidade; o inverso de uma delas é também uma raiz da unidade. Prove essas afirmações.

As raízes da unidade têm as seguintes propriedades:

I) $\varepsilon_k \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$

II) $\varepsilon_k^l = \varepsilon_{lk}, \text{ para todo } l \in Z;$

III) $\varepsilon_k^{-1} = \overline{\varepsilon_k} = \varepsilon_{n-k}$.

IV) *As raízes enésimas de um z qualquer de C podem ser obtidas multiplicando uma raiz enésima qualquer fixada de z pelas raízes enésimas da unidade.*

V) *Se p não é múltiplo de n, então* $\varepsilon_0^p + \varepsilon_1^p + \cdots + \varepsilon_{n-1}^p = 0.$

Raízes Primitivas

As raízes de $z^n = 1$ que se comportam como $\varepsilon = \varepsilon_1$, cujas potências de expoentes 0,1, 2, ..., n – 1, são as n raízes enésimas distintas dela, são denominadas de **primitivas.** Noutros termos, denominamos de **raíz primitiva** da equação $z^n = 1$, a qualquer raiz ε_i dela, tal que ε_i^k gere todas as suas n raízes distintas, quando k varia de 0 a n - 1 ou quando k varia de 1 a n. Na verdade, mais geralmente, isso ocorre, quando k varia de *p* a *p + (n - 1)*.

Uma consequência imediata dessa definição é que o **mdc(n, k) = 1**. Para mostrar isso, suponha que mdc(n, k) $\neq$ 1. Então a fração k/n pode ser reduzida a p/q, com q < n. Em consequência, a raiz n-ésima da unidade $\varepsilon_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{2p\pi}{q}\right)}$ também é uma raiz q-ésima da unidade e com isso só pode gerar q raízes distintas, o que contraria a hipótese de ser primitiva de $z^n = 1$.

Verifique nos dois exemplos dados quais são as raízes primitivas. Percebeu alguma diferença entre as primitivas de $z^3 = 1$ e as de $z^4 = 1$? Todas as primitivas têm inversas? Verifique as propriedades (I), (II) e (III) nesses exemplos.

Para maior compreensão, analise as raízes de $z^6 = 1$ e $z^7 = 1$. Quais são suas primitivas respectivas? Verifique que para a primeira, as únicas raízes primitivas são: ε_1, e ε_5. Enquanto que para a segunda, temos: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ e ε_6. Sem construir explicitamente essas raízes, dá para saber quem são as inversas delas?

Onde está a grande diferença entre $z^6 = 1$ e $z^7 = 1$?

Há uma relação estreita das raízes da unidade com as propriedades dos Inteiros modulares, os Z_n.

Sabe-se da teoria desses números que o caso $Z_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$, com *p* primo, se comporta como um *grupo multiplicativo*, em que cada um dos seus elementos diferentes de $\overline{0}$ tem um inverso. Na verdade, com as duas operações(+ e X), esses conjuntos têm uma estrutura de *corpo.* Isso, de modo aproximado, significa que eles se comportam de forma semelhante ao conjunto dos racionais Q, munido das operações usuais de + e X. A partir da noção de **congruência** construiremos as tabelas de multiplicação e adição de Z_6 e Z_7, para visualizarmos melhor essa relação.

Z_6

(x)	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Z_6

(+)	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Z_7

(x)	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Z_7

(+)	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

NOTA (Propriedades das Congruências):

Sejam a, b, c, d, m e n inteiros, com m > 1.

1) $a \equiv b \ (mod\ m) \iff$ m divide a - b;

2) $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$ então a + c $\equiv$ b + d $(mod\ m)$;

3) $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$ então a. c $\equiv$ b.d (mod m);

4) $a \equiv b \ (mod\ m)$ então $a^n \equiv b^n$ (mod m), para n $\geq$ 1;

5) $a \equiv b \ (mod\ m)$ e se n divide m, então a $\equiv$ b (mod n), para n > 1;

6) $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $a \equiv b (mod\ n) \iff a \equiv b \ (mod\ mmc(m,n))$;

7) $a.c \equiv b.c \ (mod\ m)$ e mdc(c, m) = 1, então $a \equiv b (mod\ m)$;

8) Se d = mdc(c, m), então $a.c \equiv b.c \ (mod\ m) \iff a \equiv b \ (mod\ \frac{m}{d})$.

QI-25. Verifique nas tabelas de (X) que Z_6 tem apenas dois elementos invertíveis, $\overline{1}$ **e** $\overline{5}$, e que o Z_7, com exceção de $\overline{0}$, todos os seus outros elementos são invertíveis. Quem são os inversos deles? Observe a correspondência desses resultados com as raízes primitivas de $z^6 = 1$ e $z^7 = 1$. Veja também, que mdc(6, 1) = mdc(6, 5) = 1, o que não ocorre com 2, 3 e 4. Por outro lado, 7 é primo, logo mdc(7, 1) = mdc(7, 2) = ...= mdc(7, 6) = 1.

Estas relações nos levam a concluir que, em muitas questões envolvendo raízes da unidade, podemos usar propriedades correspondentes de Z_n.

DUAS PROPOSIÇÕES SOBRE RAÍZES DA UNIDADE:

P1. *Um complexo ε é, simultaneamente, raiz n-ésima e raiz m-ésima da unidade se, e somente se ε é raiz d-ésima da unidade e d = mdc(m, n).*

P2. *Suponha que $\varepsilon, \ \lambda \in C$ são raízes primitivas, respectivamente, p-ésima e q-ésima da unidade. Se mdc(p, q) = 1, então $\varepsilon.\lambda$ é raiz pq-ésima primitiva da unidade.*

Prova de P_1

Vamos provar a P1. Suponha que $\varepsilon^d = 1$. Sendo n = ad e m = bd para certos a e b em Z, segue que $\varepsilon^n = \varepsilon^{ad} = (\varepsilon^d)^a = 1$ e $\varepsilon^m = \varepsilon^{bd} = (\varepsilon^d)^b = 1$. Logo ε é raiz n-ésima e raiz m-ésima da unidade. Reciprocamente, suponha $\varepsilon^n = \varepsilon^m = 1$. Se d = mdc(m, n), então existem r e s em Z tais que d = r.m + s.n.

Isso implica $\varepsilon^d = \varepsilon^{rm+sn} = (\varepsilon^m)^r . (\varepsilon^n)^s = 1$.

Portanto ε é raiz d-ésima da unidade.

Obs.: Um corolário imediato de P_1 é o seguinte: *"Se mdc(m, n) = 1, então 1 é a única raiz simultaneamente n-ésima e m-ésima da unidade."*

Prova de P_2

Perceba que $(\varepsilon.\lambda)^{p.q} = (\varepsilon^p)^q(\lambda^q)^p = 1$. Logo $\varepsilon.\lambda$ é raiz pq-ésima da unidade. Falta provar que é primitiva. Suponhamos que $\varepsilon.\lambda$ não seja uma raiz pq-ésima primitiva da unidade. Então, existe m $\in N$ tal que 0 < m < pq e $(\varepsilon.\lambda)^m = 1$. E pela divisão euclidiana em Z, existem n_1, n_2, r_1, $r_2 \in$ Z tais que m = $pn_1 + r_1$ e m = $qn_2 + r_2$, com 0 ≤ r_1 < p e 0 ≤ r_2 < q.

Em virtude disso, temos que

$$(\varepsilon.\lambda)^m = (\varepsilon)^{pn_1+r_1}.(\lambda)^{pn_2+r_2} =$$

$$(\varepsilon^p)^{n_1}.(\varepsilon)^{r_1}.(\lambda^p)^{n_2}.(\lambda)^{r_2} = (\varepsilon)^{r_1}.(\lambda)^{r_2}.$$

Mas $(\varepsilon.\lambda)^m = 1$, então $(\varepsilon)^{r_1}.(\lambda)^{r_2} = 1$, que implica $(\varepsilon)^{r_1}$ ser inverso de $(\lambda)^{r_2}$, que é raiz q-ésima da unidade. Assim, temos que $(\varepsilon)^{r_1}$ é , ao mesmo tempo, raiz p-ésima e raiz q-ésima da unidade. E como mdc(p, q) = 1, então pelo corolário de P_1 temos que $(\varepsilon)^{r_1} = 1$. Por outro lado, ε é raiz p-ésima primitiva da unidade e 0 ≤ $r_1 < p$, o que nos leva a $r_1 = 0$. Procedendo de modo análogo, deduzimos que $r_2 = 0$. Isso implica que p e q dividem m; e como mdc(p, q) = 1, concluímos que pq divide m também, o que contradiz a condição 0 < m < pq.

Para exemplificar, numericamente a P_2, considere a raiz sexta primitiva da unidade ε = cos($\frac{2\pi}{6}$) + isen($\frac{2\pi}{6}$) e a raiz sétima primitiva da unidade λ = cos($\frac{2\pi}{7}$) + isen($\frac{2\pi}{7}$).

Então é **raiz 42-ésima primitiva** da unidade o número complexo $\varepsilon.\lambda$ = cos($\frac{13\pi}{21}$) + isen($\frac{13\pi}{21}$).

Outro exemplo numérico de P_2: ε = cos($\frac{2\pi}{8}$) + isen($\frac{2\pi}{8}$) é raiz oitava primitiva da unidade e λ = cos($\frac{2\pi}{15}$) + isen($\frac{2\pi}{15}$) é raiz 13-ésima primitiva da unidade. Comomdc(8, 15) = 1, então por P_2, temos que $\varepsilon.\lambda$ = cos($\frac{23\pi}{60}$) + isen($\frac{23\pi}{60}$) é **raiz 120-ésima primitiva** da unidade.

Um fato interessante que merece ser mencionado aqui, é que *o número de raízes n-ésimas primitivas da unidade é* $\phi(n)$, a **função totiente de Euler,** que conta o número de inteiros k tais que 0 < k < n e mdc(n, k) = 1. Nos exemplos ilustrados, vimos que $\phi(7) = 6$ e $\phi(6) = 2$.

Duas propriedades importantes dessa função, que se estuda em teoria dos números são as seguintes:

(1) Se *m* e *n* são inteiros positivos tais que *mdc(m, n)* = 1, então $\phi(m.n) = \phi(m).\phi(n)$.

(2) ***[Teorema de Euler]****.* Se *n* é um inteiro positivo e *a* é um inteiro tal que *mdc(a, n)* = 1, então $a^{\phi(n)} \equiv 1\ (mod\ n)$.

A tabela a seguir mostra alguns valores de $\phi(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Obs.: Um caso especial do Teorema de Euler é o **pequeno Teorema de Fermat:** $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ *ou* $a^p \equiv a\ (mod\ p)$, *p* primo.

QI-26. A) Verifique com ajuda da tabela anterior, os seguintes exemplos:

$\phi(3.4) = \phi(3).\phi(4)$ = 2.2 = 4

$\phi(2.5) = \phi(2).\phi(5)$ = 1.4 = 4

$\phi(5.12) = \phi(5).\phi(12)$ = 4.4 = 16

$3^{\phi(8)} = 3^4$ = 81 $\equiv 1\ (mod\ 8)$

$5^{\phi(9)} = 5^6$ = $125^2 \equiv (-1)^2$ (mod 9) = 1 (mod 9)

$2^{\phi(11)} = 2^{10}$ = 1024 $\equiv 1\ (mod\ 11)$.

B) Considerando a tabela anterior, determine:

1) quantas raízes nonas primitivas da unidade existem.

2) quantas raízes décimas primitivas da unidade existem.

3) quantas 11-ésimas raízes primitivas da unidade existem.

QI-27. Uma bela questão da **6ª IMO**, relacionada com Z_7 e o *Teorema de Euler*, pede duas coisas:

A) Ache todos os inteiros positivos *n* tais que *7* divida $2^n - 1$.

B) Prove que para qualquer inteiro positivo *n,* o número $2^n + 1$ não pode ser divisível por *7.*

NOTA (Teorema de Lagrange):

Os conjuntos Z_n, munidos com a operação de adição, têm estrutura de *grupo aditivo.* Analise a tabela correspondente de Z_6. Nela podemos verificar uma propriedade que é comum a todos esses grupos aditivos: o número mínimo de vezes que um elemento *x* é parcela da soma *x* + *x* + ...+ *x* = $\bar{0}$, em Z_n, é sempre um divisor do número de elementos do grupo $(Z_n, +)$. Ou seja, se *d* é o menor natural tal que *dx* = $\bar{0}$, então *d* é um divisor de n. No caso geral de um grupo multiplicativo finito (G, ⁕) de n elementos, essa condição fica na forma $x^d = 0$.

Esse número *d*, comumente, é chamado de *ordem do elemento x*. Também se denomina de ordem do grupo finito ao número de elementos dele. Com esses conceitos a propriedade se enuncia assim: "*A ordem de um elemento de um grupo finito G divide a ordem de G"*. Isso é uma boa aproximação do conhecido **Teorema de Lagrange**. O enunciado desse teorema é: *"Seja (H, ⁎) um subgrupo de um grupo finito (G, ⁎). Então a ordem de (H, ⁎) divide a ordem de (G, ⁎).* E ele vale para todos os grupos finitos, aditivos ou multiplicativos. Observe que no grupo aditivo (Z_6, +), por exemplo, $\overline{5}$ tem ordem 6, enquanto $\overline{3}$ tem ordem 2. Verifique também que o conjuntos das n raízes enésimas da unidade é um grupo multiplicativo de ordem n. Nesse último exemplo, temos um elemento gerador de todos os outros. Quando isso ocorre dizemos que o grupo é *cíclico.* Para ilustrar mais uma propriedade desse tipo de grupo, consideremos o grupo das raízes de $z^6 = 1$, apresentado assim: $U_6 = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\}$. Verifique que ε^2 tem ordem 3 e ε^3 tem ordem 2. Isso implica que ε^2 gera um subgrupo cíclico de ordem 3 e ε^3 gera um subgrupo cíclico de ordem 2, ambos de U_6. O 1 gera o subgrupo {1} e ε gera U_6. Esses são os subgrupos de U_6. Perceba que 1, 2, 3 e 6 são os divisores naturais de 6. Isso sugere uma correpondência biunívoca entre os divisores de n e os subgrupos de um grupo cíclico de ordem n. De fato, é verdadeira a propriedade: *Se G é um grupo cíclico finito de ordem n, então para cada divisor natural d de n, existe um único subgrupo de ordem d.* Vide referência [Dean, 1974]. Não aprofundaremos esse tópico aqui, mas é bom já ir percebendo sua riqueza e beleza. É assim que a rede de aproximações multifárias do conhecimento vai se revelando.

NOTA (Método de Rabin de Criptografia)

Um dos métodos de Criptografia de chave pública é o método de Rabin, que foi inventado por Michael Rabin em 1979. Nesse método, as mensagens são codificadas mediante elevação ao quadrado e decodificadas por meio da extração de raízes quadradas em Z_{pq}, em que p e q são primos tais que p = 3 (mod 4) e q = 3 (mod 4). Os métodos de Rabin e RSA, ambos de chave pública, têm em seus fundamentos o desafio de se fatorar números inteiros grandes(com milhares de dígitos), mesmo com os melhores computadores atuais. Isso reforça a importância que a fatoração, em suas formas multifárias, tem em todos os ramos da Matemática. Para saber mais sobre tais métodos consulte as referências [Coutinho, 1997] e [Scheinerman, 2016].

COMENTÁRIO SOBRE A EQUAÇÃO: $y^2 + y = x^3 - x^2$.

I) Número de soluções em Z_p de $y^2 + y = x^3 - x^2$(*)

Z_p, como já vimos antes, é o *corpo finito* de números {0,1, 2, …, p -1}, dotado das operações de adição e multiplicacão *módulo p*, em que p é um número primo.

Uma questão: de que maneira o número de soluções de (*) em Z_p depende de p?

Verifica-se que em Z_5 há 4 soluções de (*) e que, de um modo geral, **o número de soluções de (*) é aproximadamente igual a p**. Em 1954, o matemático alemão Martin Eichler descobriu que os a_p(diferença entre p e o número de soluções de (*) em Zp), são dados pelos coeficientes de ordem p da seguinte função geradora:

$$q(1- q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2(1- q^4)^2(1 - q^{33})^2(1 - q^4)^2(1 - q^{44})^2 \ldots$$

Ao multiplicarmos os fatores, obtemos a série:

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + \ldots$$

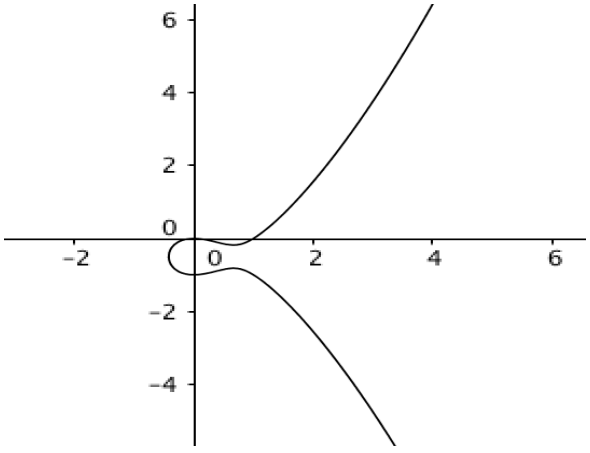
Verifique que as soluções de (*) em Z_5 são: $(\bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{4})$ e $(\bar{0}, \bar{4})$. E confirme que o número de soluções de (*) em Z_7 e Z_{13} é o mesmo. Algumas soluções de (*) em Z_7: $(\bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{6})$, $(\bar{4}, \bar{4})$, $(\bar{5}, 5)$, $(\bar{0}, \bar{6})$. Como são nove soluções de (*) em Z_7, então encontre as outras três. Tente obter todas soluções de (*) em Z_{13} .

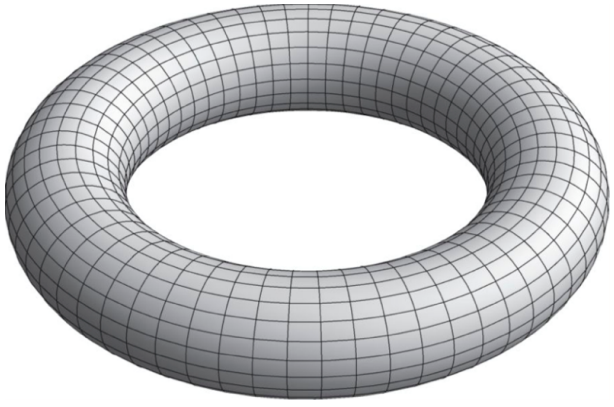
II) As soluções em **IR** e em **C** de $\mathbf{y^2 + y = x^3 - x^2}$ **(*)**

As soluções de (*) em **IR** formam uma curva elíptica, como mostra a figura.

Em $\mathbf{Z_p}$ ou em suas extensões finitas são também chamadas de ”curvas elípticas”. Elas têm aplicação em **criptografia**.

Um fato curioso e notável surge quando trocamos $\mathbf{Z_p}$ por **C**, o conjunto dos números complexos: **o conjunto das soluções de (*) em C forma uma superfície de Riemann → o toro.**





A conjectura Shimura-Taniyama-Weil é uma generalização do resultado de Eichler. E essa conjectura tem uma relação importante com a demonstração do último Teorema de Fermat. Esse teorema afirma que não existe três inteiros positivos a, b e c que satisfaçam a equação $a^n + b^n = c^n$ para qualquer valor inteiro de n maior que 2. Proposto pelo matemático Pierre de Fermat em 1637, ele permaneceu sem demonstração por mais de 350 anos, sendo finalmente provado em 1994 pelo matemático britânico Andrew Wile. Um relato, bem informal sobre isso e sobre a beleza da Matemática em geral, está na referência [Frenkel, 2016].

QI-29. Para quais pontos do plano complexo, a função f(z) = $\frac{z}{z^4+1}$ não está definida?

QI-30. Quais os valores máximo e mínimo que $|z+i|$ pode assumir, sabendo-se que $|z-2|=1$?

▸ **Resp.:** Mínimo é $\sqrt{5}$ - 1 e máximo é $\sqrt{5}$ + 1.

QI-31. Sabendo que z = $e^{i\theta}$, calcule o valor máximo de M:

$$M = \frac{1 + Re(z + z^2 + z^3)}{2cos\theta}$$

QI-32. Se tg($\frac{\alpha}{2}$) = 2, então calcule o valor de $e^{i\alpha}$.

QI-33. Resolva, em função de θ, a seguinte equação:

$$(x + \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^m + (x + \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)^m = 0.$$

QI-34. Prove a validade das seguintes somas:

A) $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}$;

B) $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right) = +\frac{1}{2}$.

C) $\cos(\frac{2\pi}{9}) + \cos(\frac{4\pi}{9}) + \cos(\frac{6\pi}{9}) + \cos(\frac{8\pi}{9}) = -\frac{1}{2}$.

D) $\cos(\frac{\pi}{11}) + \cos(\frac{3\pi}{11}) + \cos(\frac{5\pi}{11}) + \cos(\frac{7\pi}{11}) + \cos(\frac{9\pi}{11}) = +\frac{1}{2}$.

I-35. (**ITA-2013. Adaptada**). Considere a equação em *C* ,$(z - 5 + 3i)^4 = 1$.

Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então qual é o valor de $|z_0|$?

QI-36. (**ITA-2012.Adaptada**). Se *arg z = π/4*, então ache um valor de *arg(-2iz).*

QI-37. (**ITA- 2011. Adaptada**). Dado z = $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)$, calcule o valor de $\sum_{n=1}^{89} z^n$.

QI-38. (ITA-2011). Sejam *n* ≥ *3* ímpar, $z \in C - \{0\}$ e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|, i, j = 1, 2, .., n$, com *i* ≠ *j,* distintos entre si.

QI-39. (**ITA-2003. Adaptada**). Das afirmações a seguir, sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo, identifique as que são falsas.

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais;

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1;

III. Se n $\in N^*$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

QI-40. Prove que as raízes n-ésimas primitivas da unidade são duas a duas conjugadas.

QI-41. Calcule o valor da soma $\sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k \binom{6n}{2k+1} 3^k$.

QI-42. (**IME-2002/2003**). Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, em que *n* é um número inteiro positivo. Demonstre que $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

QI-43. (**IMO-1975**). É possível marcar 1975 pontos sobre um círculo de raio 1 tal que a distância entre quaisquer dois deles seja um número racional(as distâncias devem ser medidas ao longo das cordas)?

QI-44. Seja z um número complexo não real tal que $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ seja real. Prove que $|z| = 1$.

QI-45. Sejam $z_1, z_2, ..., z_n$ números complexos tais que $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$. E seja $z = (\sum_{k=1}^{n} z_k).\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$. Prove que z é um número real e que $0 \leq z \leq n^2$.

QI-46. Prove que para todo complexo z de módulo 1 vale a seguinte desigualdade:

$$\sqrt{2} \leq |1-z| + |1+z^2| \leq 4.$$

QI-47. Seja ABC um triângulo equilátero com circunraio igual a 1. Prove que para qualquer ponto P sobre a circunferência circunscrita temos $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$.

QI-48. Prove que $\cos(\pi/11) + \cos(3\pi/11) + \cos(5\pi/11) + \cos(7\pi/11) + \cos(9\pi/11) = 1/2$.

QI-49. (**IMO-1963**). Prove que $\frac{\cos\pi}{7} - \frac{\cos 2\pi}{7} + \frac{\cos 3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

QI-50. Prove que $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1/8$.

QI-51. Sejam z_1, z_2 e z_3 números complexos tais que $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$.

Prove que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

QI-52. Considere a raiz cúbica da unidade $\varepsilon = sen\frac{2\pi}{3} + i sen\frac{2\pi}{3}$.

Calcule $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)...(1+\varepsilon^{1987})$.

QI-53. Seja $\varepsilon \neq 1$ uma raiz cúbica da unidade. Calcule o valor do produto *P* dado por

$$P = (1-\varepsilon+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2+\varepsilon^4)...(1-\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}).$$

QI-54. Prove que o número complexo z = $\frac{2+i}{2-i}$ tem módulo igual a 1, porém, z não é uma raiz *n*-ésima da unidade, para qualquer que seja o inteiro *n* escolhido.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-I(2)

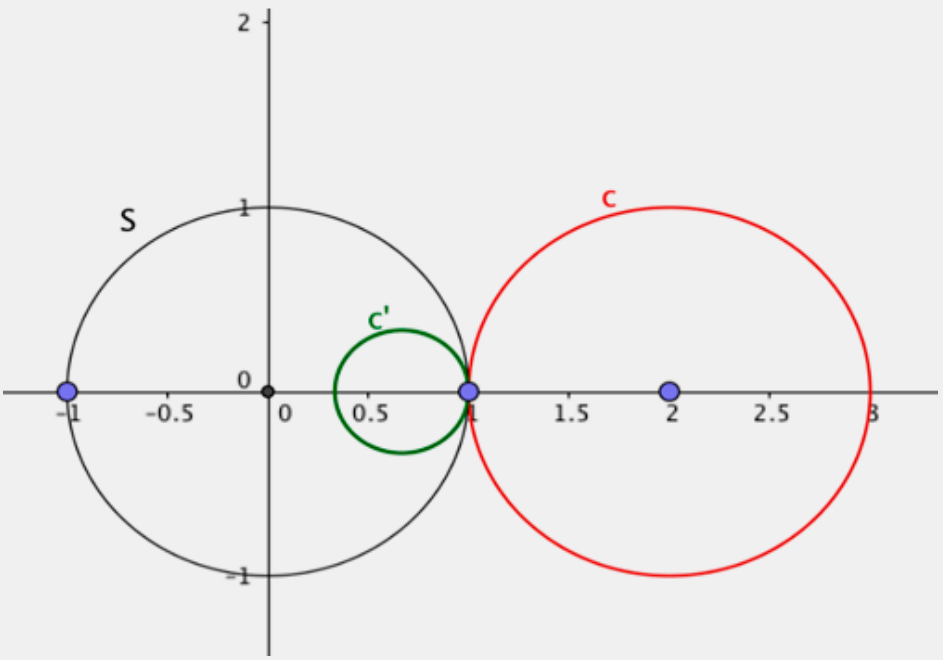
DRN-I20:

A) Seja w = J(z). Então w = $\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow$ z = $\frac{1}{\bar{w}}$. Substituindo esse valor de z em $|z-2|=1$, obtemos $|\frac{1}{\bar{w}}-2|=1 \Leftrightarrow \left(|\frac{1}{\bar{w}}-2|\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (\frac{1-\overline{2w}}{\bar{w}})\left(\frac{1-2w}{w}\right) = 1 \Leftrightarrow$ 1 - 2$\bar{w}$ - 2w + 3$\bar{w}w = 0 \Leftrightarrow \bar{w}w$ - $\frac{2}{3}w - \frac{2}{3}\bar{w}$ + $\frac{1}{3} = 0$.

E trocando de variável, temos: $z\bar{z} - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}\bar{z} + \frac{1}{3} = 0$.

Em termos de x e y: $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = (\frac{1}{3})^2 \Leftrightarrow \left|z-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$.

Veja a seguir a representação geométrica das circunferências relacionadas com essas equações.



Faça também a inversão da imagem para obter a circunferência original.

Obs.: Perceba que o procedimento/método usado na figura é geral, pode ser aplicado a qualquer circunferência do plano complexo dada por $|z-a|=r$. *Isto mostra que podemos provar o Teorema-J e outras propriedades da Inversão, apenas com as propriedades do corpo dos números complexos.* Ou seja, algebricamente. Fica como exercício para você.

B) Procedendo como no item A, encontre $2w + 2\overline{w} - 4 = 0$; e mudando de variável:

$$2z + 2\bar{z} - 4 = 0.$$

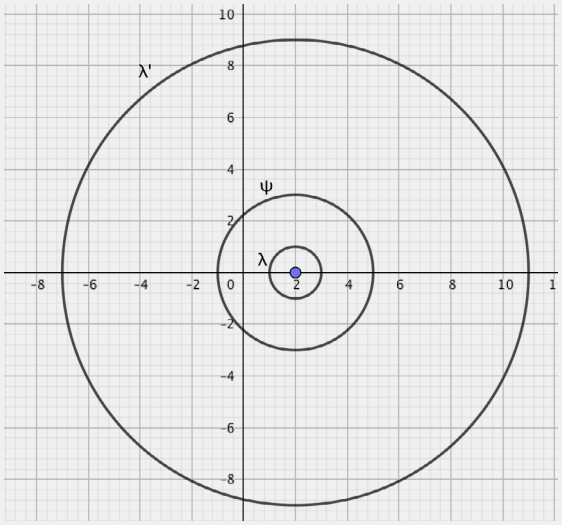
Substituindo $z = x + yi$ nesta última equação, obtemos: $x = 1$ ou $z = 1 + yi$, que é a equação de uma reta **vertical.** Observe que $\alpha = \bar{a} = 2$.

C) Procedendo como item A, encontre $\bar{a}z + a\bar{z} - 1 = 0$. E fazendo $\alpha = \bar{a}$, a equação da reta fica: $\boldsymbol{\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z - 1 = 0}$.

O coeficiente angular é $(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}})i \neq 0$, pois $a \neq \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$.

E em consequência disso a reta dada por $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z - 1 = 0$ é **não vertical**.

D) A imagem de (λ): $|z - 2| = 1$, pela inversão *J*, é (λ'): $|z - 2| = 9$. A circunferência de Inversão é (ψ): $|z - 2| = 3$. Veja a figura a seguir.



DRN-I21:

Pelos dados e a figura, temos que $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ (circunferência menor) e $x_0^2 + y_0^2 = r^2 + 9$.

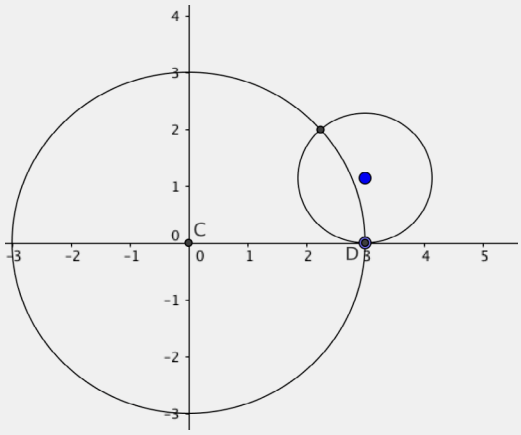
$(3, 0) \rightarrow (3 - x_o)^2 + (0 - y_o)^2 = r^2 \Rightarrow 9 - 6x_o + x_0^2 + y_0^2 = r^2 \Rightarrow 18 - 6x_o = 0 \Rightarrow x_o = 3.$

$(\sqrt{5}, 2) \rightarrow 4y_o = 18 - 6\sqrt{5} \Rightarrow y_o = 1{,}14$

$x_0^2 + y_0^2 = r^2 + 9 \rightarrow 9 + y_0^2 = r^2 + 9 \rightarrow r^2 = y_0^2 \rightarrow$ **r = 1,14**.

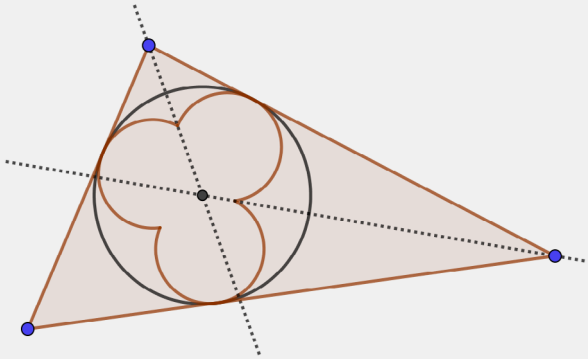
▸ **Resp.:** A.

A figura a seguir ilustra a situação.



DRN-I23:

C) É o incentro, que é equidistante dos lados do triângulo. E lembre-se do teorema-J da inversão. A figura a seguir ilustra a questão. Perceba que os pontos de tangência coincidem com seus inversos e os inversos dos vértices são os pontos de interseção de cada par de arcos, que estão na mesma bissetriz. Como a inversão preserva os ângulos entre duas curvas, em valor absoluto, então cada ângulo determinado por um par de arcos tem a mesma medida, em valor absoluto, do ângulo interno do vértice correspondente.



DRN-I27:

A) Pelo Teorema de Euler temos: $2^6 = 2^{\Phi(7)} \equiv 1 \pmod 7$. Isso significa que 7 divide $2^6 - 1$. Como $2^6 - 1 = (2^3 - 1)(2^3 + 1)$, então $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, que implica $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, para $k \geq 1$. Logo, o que procuramos são todos os inteiros positivos múltiplos de 3, isto é, da forma $n = 3k$, com $k \geq 1$.

B) Evidentemente, se $n = 3k$, com $k \geq 1$, o número $2^n + 1$ não pode ser divisível por 7.

Seja $n = 3k + r$, em que $r = 1$ ou $r = 2$. Então $2^n \equiv 2^{3k+r} \equiv (2^3)^k.2^r \equiv 2$ (ou 4) $\pmod 7$.

Disso segue que não podemos obter $2^n \equiv -1 \pmod 7$.

DRN-I29:

Precisamos determinar os pontos z tais que $z^4 = -1$, que equivale a $e^{i(4\theta)} = \cos(4\theta)$ + isen$(4\theta) = cos\pi + isen\pi$ => z = $e^{\frac{i(2k+1)\pi}{4}}$, k = 0, 1, 2, 3.

DRN-I31:

Use transformação soma/produto.

▸ **Resp.:** M_m = 2.

DRN-I32:

Pode ser mais rápido usando as fórmulas de sen x e cos x em termos de tg(x/2).

▸ **Resp.:** -3/5 + (4/5)i.

DRN-I33:

Antes de observar a resolução, tente resolver seguindo a dica:

Colocar na forma exponencial, primeiramente, e depois voltar para a forma trigonométrica. A seguir, usando transformações soma/produto obter o resultado.

▸ **Resp.:** $x = \frac{-sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2m}\right)}$.

Resolução:

Usando a forma exponencial, a equação fica na seguinte forma:

$$(x + e^{i\theta})^m + (x + e^{-i\theta})^m = 0 \Leftrightarrow (\frac{x + e^{i\theta}}{x + e^{-i\theta}})^m = -1 = e^{i\pi}. \quad (1)$$

De (1) obtemos: $\frac{x + e^{i\theta}}{x + e^{-i\theta}} = e^{i\frac{\pi}{m}} \Rightarrow x + e^{i\theta} = xe^{\frac{i\pi}{m}} + e^{i\left(\frac{\pi}{m} - \theta\right)} \Rightarrow x = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{m} - \theta\right)} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\frac{\pi}{m}}}$. (2)

Usando a fatoração $1 - cis(\frac{\pi}{m}) = -2isen(\frac{\pi}{2m})cis(\frac{\pi}{2m})$ e a forma trigonométrica, mudamos (2) para a forma:

$$x = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{m} - \theta\right) + isen\left(\frac{\pi}{m} - \theta\right) - cos\theta - isen\theta}{-2isen(\frac{\pi}{2m})[\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2m}\right)]}. \quad (3)$$

Aplicando transformações soma-produto, (3) fica assim:

$$x = \frac{-2sen\left(\frac{\pi}{2m}\right).sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right) + 2icos\left(\frac{\pi}{2m}\right).sen(\frac{\pi}{2m} - \theta)}{-2isen(\frac{\pi}{2m})[\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2m}\right)]}$$

que fatorando o numerador se transforma em

$$x = \frac{-2sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)\left[-icos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)\right]}{-2isen\left(\frac{\pi}{2m}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right]} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)\left[-icos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)\right]}{sen\left(\frac{\pi}{2m}\right)\left[i\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) - isen\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right]}.$$

Simplificando, concluímos: $x = -\frac{sen\left(\frac{\pi}{2m} - \theta\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2m}\right)}$.

DRN-I34:

(a) Aplicar QI-7(i) e sen$(\pi - x) = senx$. Por exemplo, $sen\left(\pi - \frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) = sen\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

DRN-I35:

$w^4 = 1$.

▸ **Resp.:** $z_0 = 5 - 4i$ e $|z_0| = \sqrt{41}$.

DRN-I36:

▸ **Resp.:** *7π/4.*

DRN-I37:

$z = \cos(2\pi/3) + i\,sen(2\pi/3)$.

▸ **Resp.:** 1.

DRN-I38:

As raízes são vértices de um polígono regular de n lados. Quantas diagonais de comprimentos distintos esse polígono tem?

▸ **Resp.:** 1 + (n - 3)/2 = (n - 1)/2.

Obs.: Veja que o método sugerido é o de usar a geometria plana para resolver um problema de números complexos. Muitas vezes, como já vimos, também usamos os números complexos para resolver problemas de geometria plana.

DRN-I39:

$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$.

▸ **Resp.:** I e II são falsas e III é verdadeira.

DRN-I41:

Usar 1 + i$\sqrt{3}$ para obter o resultado final: $\frac{1}{i\sqrt{3}} Im[2^{6n}(\cos(2n\pi) + isen(2n\pi))] = 0.$

DRN-I42:

Use a fatoração cisθ + 1 = 2 cos$\left(\frac{\theta}{2}\right)$. cis($\theta$/2).

DRN-I43:

Primeiro garanta a existência de infinitos pontos de coordenadas racionais sobre o círculo. Reveja QT-78. Depois prove, que a distância d entre dois deles quaisquer é um número racional.

Observe que d = 2sen($\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}$). Logo, para d ser racional é preciso que os senos e cossenos de $\frac{\alpha_i}{2}$ e $\frac{\alpha_j}{2}$ sejam racionais. Para isso use o resultado de QT-78. Essa condição também implica que os senos e cossenos de $\alpha_j \ e \ \alpha_i$ sejam racionais.

DRN-I44:

Mostre que $\frac{z}{1 - z + z^2}$ é real e use igualdade de números complexos.

DRN-I45:

Use $(\sum_{k=1}^{n} z_k)\overline{(\sum_{k=1}^{n} z_k)}$ = $|\sum_{k=1}^{n} z_k|^2$ e a desigualdade triangular.

DRN-I46:

Use z = cost + i sent e no final faça x = sen(t/2) para analisar $|x| + |1 - 2x^2|$ no intervalo [-1, 1]. Observe que a igualdade com $\sqrt{2}$ ocorre em t = $\frac{\pi}{2}$ e a igualdade com 4 ocorre em t = π.

DRN-I49:

Multiplique o primeiro membro por $sen\ \pi/7$ e use soma/produto.

DRN-I50:

Multiplique o primeiro membro por sen20°.

DRN-I51:

Use $z_1 + z_2 = - z_3$ e suas análogas para chegar em

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_3||z_1|.$$

DRN-I52:

Use a fatoração de cisx + 1. Perceba a periodicidade dos fatores do produto para simplificar os cálculos.

▸ **Resp.:** $2^{661}.(1 + i\sqrt{3})$.

DRN-I53:

Sabemos que $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ e $\varepsilon^3 = 1$. Disso, segue que $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 = -2\varepsilon, 1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = -2\varepsilon^2$ e $1 - \varepsilon^3 + \varepsilon^6 = 1$. Logo, o produto de três fatores sucessivos de *P* é igual a 2^2.

Se n for múltiplo de 3, então P = $(2^2)^{n/3}$;

se n $\equiv$ 1 (mod 3), então P = $(2^2)^{\left[\frac{n}{3}\right]}.(-2\varepsilon) = -2^{2\left[\frac{n}{3}\right]+1}.\varepsilon$;

e se n $\equiv$ 2 (mod 3), então P = $(2^2)^{\left[\frac{n}{3}\right]}.(-2\varepsilon)\,(-2\varepsilon^2) = 2^{2\left[\frac{n}{3}\right]+2}$.

DRN-I54:

Suponha que o número dado seja uma raiz n-ésima da unidade. Observe que isso implica $(2 + i)^n = (2 - i)^n$. Use o fato 2 + i = 2 - i + 2i. Após o desenvolvimento do binômio de Newton $(2 - i + 2i)^n$, teremos $(2 - i)^n + (2 - i)^{n-1}.2i + ... + (2 – i).(2i)^{n-1} + (2i)^n = (2 – i)^n \Leftrightarrow (2 - i)^{n-1}.2i + ... + (2 – i).(2i)^{n-1} + (2i)^n = 0 \Rightarrow (2 – i)[2i + ... + (2i)^{n-1}] = - (2i)^n$. Calculando os módulos de ambos os membros, teremos $|2 - i||a + bi| = 2^n \Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) = 2^{2n}$. Mas isso, em virtude do teorema fundamental da Aritmética, é um absurdo, pois a e b são inteiros.

Todo elemento de S^1 é raiz enésima da unidade?

Perceba, a partir do resultado dessa questão, que não vale a recíproca da afirmação: *Toda raiz enésima da unidade pertence a S^1.* Ou seja, a afirmação "Todo elemento de S^1 é raiz enésima da unidade" é falsa. Noutras palavras, o conjuntos W de todas as raízes n-ésimas da unidade, n $\in N$, é um subconjunto próprio de S^1. E perceba que existe uma infinidade de elementos em S^1 que não pertencem a W. Basta multiplicar as raízes enésimas da unidade por $\mu = \frac{2+i}{2-i}$. Por conseguinte, μW também é um subconjunto próprio de S^1. Além disso, sabemos que S^1, munido da operação multiplicação de números complexos, é um grupo multiplicativo. Também W, com essa mesma operação, é um grupo multiplicativo. Logo, W é um subgrupo próprio de S^1. Perceba que μW, com essa mesma operação, não é um grupo. Um outro modo de mostrarmos que W $\neq$

S^1 é observarmos que W é enumerável, por ser união enumerável de conjuntos enumeráveis, enquanto S^1 é não enumerável por ser equipotente ao intervalo real $[0, 2\pi)$. Lembre-se que a Função de Euler E : R → S^1 é bijetora quando restrita a $[0, 2\pi)$.

QI-55. Seja $\omega = cos\frac{2\pi}{2n+1} + isen\frac{2\pi}{2n+1}$, n ≥ 0, e seja $z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n$.

Prove que:

A) $Im(z^{2k}) = Re(z^{2k+1}) = 0$, para qualquer k natural.

B) $(2z + 1)^{2n+1} + (2z - 1)^{2n+1} = 0$.

QI-56. (**Olimpíada da Irlanda, 1988**). Se n é um inteiro positivo, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} cos^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{6n-5}{16}.$$

QI-57. Mostrar que $sen\frac{\pi}{n} + sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + sen\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

QI-58. Seja $z \neq -1$ um número complexo tal que $|z| = 1$. Mostre que existe um número real *t* tal que $z = \frac{1 + it}{1 - it}$.

QI-59. Considere a seguinte equação, em que *z* é um número complexo:

$$(z-1)^5 = 32(z+1)^5.$$

Mostre que todas as suas raízes estão na circunferência de raio 4/3 e centro em (-5/3; 0).

QI-60. Achar todas as raízes da equação $(z+1)^{2n} - (z-1)^{2n} = 0$.

QI-61. Provar que $sen(\frac{2\pi}{7}) + sen(\frac{4\pi}{7}) + sen(\frac{8\pi}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

QI-62. Prove que quatro pontos distintos z_1, z_2, z_3, z_4, *do plano complexo,* estão em uma circunferência ou em uma reta se, e somente se $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ é um número real não nulo.

QI-63. Resolva, em C, a equação: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

QI-64. Dois polígonos regulares estão inscritos em uma mesma circunferência. O primeiro polígono possui 4860 lados e o segundo possui 6075 lados. Se os polígonos possuem vértices em comum, quantos são esses?

QI-65. (**American Mathematics Contest 12A, 2002**). Ache o número de pares ordenados *(a, b)* de números reais tais que $(a + bi)^{2002} = a - bi$.

QI-66. (**IME-2008-2009- Adaptada**). Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que A, B e C são, respectivamente, os ângulos opostos aos lados a,b e c, mostre que

$$\frac{tgB}{tgC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}.$$

QI-67. Calcule a soma $\binom{n}{1}\cos a + \binom{n}{2}\cos 2a + \cdots + \binom{n}{n}\cos na$.

QI-68. (**American Mathematics Putnam, 1989**). Prove que se

$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, então $|z| = 1$.

QI-69. (**Ponto fixo de uma função**). Seja f é uma função. Um ponto p é denominado de ponto fixo de f se $f(p) = p$. Mostre que a inversão dada por $f(z) = \frac{1}{z}$ tem apenas dois pontos fixos.

QI-70. Considere uma *função homográfica* f qualquer, diferente da função identidade, definida no plano complexo estendido C_∞ por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Qual o número máximo de pontos fixos que f pode ter? Justifique sua resposta.

QI-71. Prove que uma função homográfica fica completamente determinada por seus valores em três pontos distintos de C_∞.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-I(3)

DRN-I56:

Use $\cos\theta = \frac{cis\theta + cis(-\theta)}{2}$ para colocar a soma na forma $\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}(4cos^2(2k\theta) + 8\cos(2k\theta) + 4)$.

A seguir, use $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$. Por fim, com $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$, aplique as fórmulas da QI-34.

DRN-I57:

Siga a resolução do item(i) de QI-7.

DRN-I58:

Faça t = tg(x/2) e expresse cos x e sen x em termos de tg(x/2).

DRN-I60:

Colocar na forma $z = \frac{w+1}{w-1}$ e usar as formas fatoradas:

$$cis\theta + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).cis(\theta/2) \text{ e } cis\theta - 1 = 2isen\left(\frac{\theta}{2}\right).cis(\theta/2).$$

▸ **Resp.:** $z = -i.cotg(\frac{k\pi}{2n})$, k = 1, 2, ..., 2n - 1.

DRN-I61:

Seja $\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, p = $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$, q = $\varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6$.

Então, o número desejado é Im(p). Mostre que p + q = -1 e pq = 2.

DRN-I62

PROVA-1:

Primeira parte(⇒):

Se $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ é real, então $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$ e seu simétrico $\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_4} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$ são reais também.

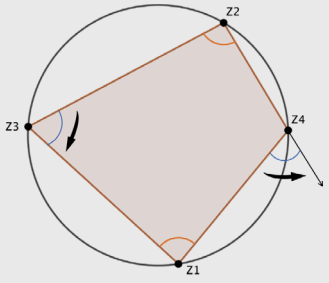
Logo, sem perda de generalidade, temos duas possiblidades gerais: $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_4} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}) = 0º$ ou $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}) = 180º$, que equivalem, respectivamente, a (1)$\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) + \arg(\frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_4}) = 0º$ ou (2)$\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}) + \arg(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}) = 180º$.

Segue da condição (1) que $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = \arg(\frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_4}) = 0º$ ou $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}) = -\arg(\frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_4}) \neq 0º$.

No primeiro caso, os 4 pontos são colineares, pois $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ e $\frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_4}$ são números reais. E no segundo caso eles são vértices de um quadrilátero cíclico, com os 4 pontos ordenados, no sentido horário, na sequência (z_1, z_3, z_2, z_4); pois $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ e $\frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_4}$ têm orientações opostas e o mesmo valor absoluto, o que implica os ângulos opostos serem suplementares. O terceiro caso decorre de (2), que significa dizer que os ângulos $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1})$ e $\arg(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2})$ são suplementares e por conseguinte o quadrilátero com vértices nos 4 pontos (z_1, z_3, z_2, z_4), ordenados assim, no sentido horário, é cíclico.

Visualize as afirmações do 2º e do 3º casos através da figura esboçada a seguir.

Obs.: Perceba que existem 6 permutações circulares para os 4 pontos.



Segunda parte(⇐):

Para provar a recíproca, consideremos o caso em que os quatro pontos estão numa circunferência na ordem (z_1, z_3, z_2, z_4), no sentido horário. Então eles são vértices de um quadrilátero cíclico, o que implica os ângulos opostos serem suplementares.

Ou seja, $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}) + \arg(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}) = 180^o$, que equivale a $\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}) = 180^o$ => $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ é real.

Por outro lado, se os quatro pontos estão sobre uma reta, então $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ e $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ são reais e, por conseguinte, $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ é real.

Obs.: Reveja a prova da Desigualdade de Ptolomeu usando números complexos.

PROVA-2:

Vamos agora apresentar uma demonstração, usando inversão do plano complexo.

(1) Sabemos que a inversão transforma uma reta, que não passa pelo pólo de inversão, em uma circunferência que passa por esse pólo e vice versa.

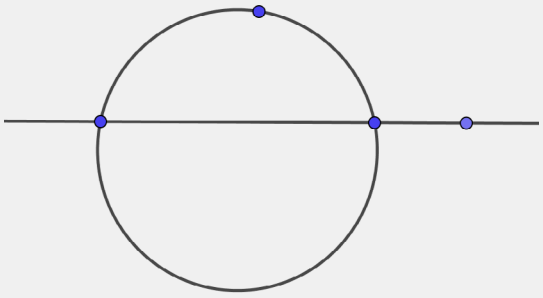
(2) Por outro lado, a razão cruzada r = $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} . \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ da quádrupla (z_1, z_3, z_2, z_4) de números complexos é preservada quando r é real. Isso é fácil de ser verificado usando a inversão na forma J(z) = $\frac{1}{\overline{z}}$. Ou seja, a razão cruzada dos inversos desses 4 pontos é $\overline{r}$ e, por conseguinte, se r é real então r = $\overline{r}$. Por conseguinte, r $\neq \overline{r} \Leftrightarrow$ r não é real.

(3) Sabemos também que se os quatro pontos são colineares, então r é real, pois $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ e $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ são reais. Por (1), (2) e (3) concluímos que r é real se, e somente se os pontos z_1, z_3, z_2, z_4 forem colineares ou cíclicos.

NOTA:

Uma "aproximação multifária", mais simples, da proposição apresentada na QI-62 é a seguinte:

"*Três pontos distintos do plano são colineares ou cíclicos.*" Isso equivale a dizer que "*Três pontos distintos do plano são colineares ou são vértices de um triângulo.*" Quando passamos de três para quatro pontos, surgem outras possibilidades: três pontos numa reta e o quarto fora dela; três pontos numa circunferência e o quarto fora dela, como ilustrado na figura a seguir.



Daí ser “quase natural” despontar a pergunta:

Que propriedade especial os quatro pontos devem ter para se “comportarem” como se fossem apenas três, isto é, serem colineares ou cíclicos? A construção dessa prova por inversão deve-se claramente à ideia de aproximação multifária, pois a razão cruzada está associada à inversão, que por sua vez associa retas com circunferências. É assim que a teoria das Aproximações Multifárias mostra seu grande potencial na prática cotidiana do processo de Aprender/Ensinar.

DRN-I65:

Usar a fórmula de Moivre para obter a equação $/z/^{2001}[(\cos(2003\theta) + i\,\mathrm{sen}(2003\theta)] = 1$. Como (0, 0) é uma solução da equação dada, então concluímos que existem 2004 pares ordenados (a, b) que a satisfazem.

DRN-I66:

Usar as leis do seno e do cosseno.

DRN-I67:

Usar as fórmulas de Moivre, do Binômio de Newton e *cis x + 1 = 2cos(x/2).cis(x/2).*

▸ **Resp.:** $2^n.cos^n\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{na}{2}\right) - 1.$

DRN-I68:

Escreva a equação na forma $z^9 = P/Q$ e avalie os casos $|z| > 1$ e $|z| < 1$, com z = a + bi. Verificando a contradição nos dois casos, conclua que /z/ = 1.

DRN-I69:

▸ **Resp.:** 1 e - 1.

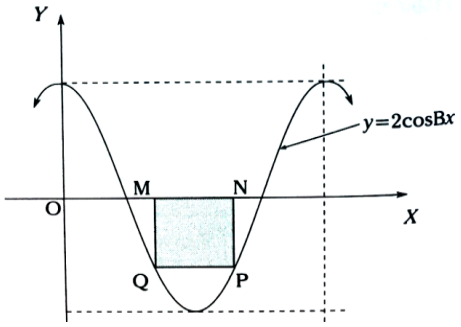
DRN-I70:

Precisamos resolver a equação $f(z) = z$. Excluindo a função identidade, temos que $z = \frac{az + b}{cz + d}$. Daí segue a equação do 2º grau $cz^2 + (d - a)z - b = 0$, que tem, no máximo, duas raízes distintas. Portanto, se f não é a identidade, então ela tem, no máximo, 2 pontos fixos.

DRN-I71:

Considere uma função homográfica $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ definida em C_∞ e três pontos distintos de C_∞: z_1, z_2 e z_3. Como f é bijetiva, então $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ e $w_3 = f(z_3)$ são pontos distintos também. Suponhamos que exista outra função homográfica g tal que $w_1 = g(z_1)$, $w_2 = g(z_2)$ e $w_3 = g(z_3)$. Então $(g^{-1} o f)(z_1) = z_1$, $(g^{-1} o f)(z_2) = z_2$ e $(g^{-1} o f)(z_3) = z_3$ e daí segue que a função homográfica $g^{-1} o f$ tem três pontos fixos. Logo, $g^{-1} o f$ é a função identidade e, por conseguinte, $g = f$.

QI-72. Determine o período da função f(x) = 2cosBx, sabendo que a área do quadrado MNPQ, indicado na figura a seguir, é igual a 3.



QI-73. Determine o conjunto imagem da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{4sen^2 x.cos^2 x}{(senx.cosx + 1)(senx.cosx - 1)}.$$

QI-74. (ITA-2019). Determine todas as soluções da equação **$sen^6x + cos^6x = 7/12$.**

QI-75. Calcule o período das funções trigonométricas definidas assim:

(I) f(x) = cos5x – sen3x – cos$\frac{4x}{3}$;

(II) g(x) = sen($\frac{\pi}{3}$ – 48x) + cos($\frac{24x-\pi}{5}$) + sen($\frac{12x}{7}$).

(III) h(x) = cos($\frac{\pi}{3}$ – 5$x/6$) + cos(7$x/3+1$) + sen($\frac{24x-\pi}{5}$).

(IV) j(x) = tg(2x/3) + cos(x/5) + sen(3x/4).

NOTA (MMC de reais Comensuráveis):

Dizemos que dois números reais não nulos, x e y, são **comensuráveis**, quando x/y é um número racional. E definimos o *Mínimo Múltiplo Comum* de x e y, indicado por mmc(x, y), assim: mmc(x, y) = $|mx| = |ny|$, em que n/m é a forma irredutível do racional x/y.

Uma consequência dessa definição é o seguinte teorema:

"Se $x = \frac{a}{b}$ *e* $y = \frac{c}{d}$ *são números racionais na forma irredutível, então vale a igualdade:*

$$mmc\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)}."$$

Vamos provar esse teorema para o caso de x e y positivos. Temos que x/y = $\frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'}$, em que $a' = \frac{a}{mdc(a,c)}$, $b' = \frac{b}{mdc(b,d)}$, $c' = \frac{c}{mdc(a,c)}$, $d' = \frac{d}{mdc(b,d)}$. Logo, $\frac{a'd'}{b'c'}$ é irredutível.

Usando a definição apresentada anteriormente, obtemos:

mmc(x, y) = x.b'c' = $\frac{a}{b}.\frac{b}{mdc(b,d)}.\frac{c}{mdc(a,c)} = \frac{mmc(a,c).mdc(a,c)}{mdc(b,d).mdc(a,c)} = \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)}$.

Podemos aplicar essas ideias para se obter uma regra que calcula o período de soma de funções periódicas. Ela pode ser enunciada assim:

"Sejam f:$R \rightarrow R$ *e g:* $R \rightarrow R$ *funções periódicas de períodos* p_1 *e* p_2*, respectivamente. Se* p_1 *e* p_2 *são números reais comensuráveis, então a função f + g é periódica de período mmc(*p_1*,* p_2*)."*

Vamos provar essa regra. Seja k = mmc(p_1, p_2). Então p_1/p_2 = n/m, em que n/m é um racional na forma irredutível. Logo, k = $mp_1 = np_2$. Seja h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x). Então, h(x + k) = f(x + k) + g(x + k) = f(x + mp_1) + g(n + np_2) = f(x) + g(x) = h(x), o que conclui a prova.

QI-76. Determinar o domínio, o conjunto imagem e o período da função de variável real definida por f(x) = $\sqrt{1+sen^2x}$ + $\sqrt{1+cos^2x}$.

QI-77. Ache o período das funções de variável real, definida por $f(x) = 2^{|tgx|} + 3^{|tg2x|} + 4^{|tg3x|}$, *g(x) = sen(cos(x/2)) + cos(sen(x/2))*.

▸ **Resp.:** $f \to \pi$; $g \to 4\pi$.

QI-78. Encontre uma fórmula geral fechada, de uma única sentença, para a função real f definida por várias sentenças, apresentada a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} sen\,2x, & se\ x \in [-2\pi,\ 0] \\ cos\,x, & se\ x \in (0,\ 2\pi] \\ 3sen\,x, & se\ x \in (2\pi, \frac{11\pi}{2}] \\ tg\,x, & se\ x \in \left(\frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right) \\ 5, & se\ x < -2\pi\ ou\ x \geq \frac{13\pi}{2} \end{cases}$$

DICA:

Use *função característica*.

NOTA (Função característica de um conjunto):

Seja W um conjunto qualquer. Se $E \subset W$, então a **função característica** de E, denotada por χ_E, é definida por:

$$\chi_E(x) = 1, se\ x \in E,$$
$$\chi_E(x) = 0, se\ x \in W - E.$$

Por exemplo, considere o intervalo A = [2, 4] $\subset R$. Sua função característica é $\chi_A: R \to R$; $\chi_A(x) = 1$, se x ∈ A e $\chi_A(x) = 0$, se x ∈ *R* - A. Agora, vamos considerar uma função real definida por várias sentenças:

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x \in (-\infty,\ 0] \\ 10, & se\ x \in (0,\ 4] \\ x, & se\ x \in (4, 50] \\ 13, & se\ x \in (50, 100) \\ x + 1, & se\ x \geq 100 \end{cases}.$$

Sejam, A = $(-\infty,\ 0]$, B = (0, 4], C = (4, 50], D = (50,100) e E = [100, $+\infty$). Então, podemos escrever g(x) com uma única sentença, assim:
g(x) = 2x. $\chi_A(x)$ + 10$\chi_B(x)$ + x. $\chi_C(x)$ + 13$\chi_D(x)$ + (x + 1) $\chi_E(x)$, para todo x ∈ *R*.

Observe que muitas funções reais definidas por várias sentenças, podem ser representadas usando a função modular f(x) = $|x|$, que também é definida por mais de uma sentença.

Por exemplo, f(x) = $2|x| + |2x + 1| - 3|x^2 - 1| + |x - 1|$, definida para todo x $\in$ *R*. Falaremos sobre tais funções mais à frente. Veremos que a função g, mostrada antes, poderia ser representada numa forma análoga à de f.

Algumas propriedades das funções características que você pode verificar:

$\chi_{A\cap B} = (\chi_A)(\chi_B)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - (\chi_A)(\chi_B)$ e $\chi_{A-B} = \chi_A - (\chi_A)(\chi_B)$, em que A, B $\subset W$.

QI-79. Achar o valor máximo e o valor mínimo da função real de duas variáveis reais definida por

F(x, y) = 6senx.cosy + 2senx.seny + 3cosx.

QI-80. Seja *f* : $C \to C$ uma função definida por *f(z).f(iz)* = z^2, para todo z $\in C$.

Prove que *f(z) + f(-z) = 0, para todo z* $\in C$.

QI-81. Prove que em qualquer triângulo ABC de lados a, b, c vale a desigualdade

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 4\left(sen^2\left(\frac{A}{2}\right) + sen^2\left(\frac{B}{2}\right) + sen^2\left(\frac{C}{2}\right)\right).$$

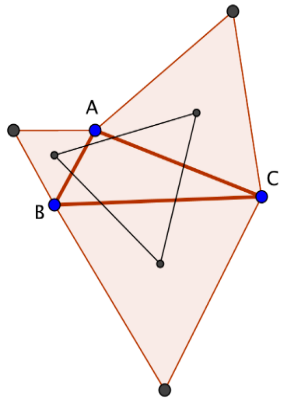
QI-82. Resolva a equação trigonométrica $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, em que $[y]$ significa o maior inteiro que não supera o real y.

QI-83. Resolver a equação $2^{1-x^2} + 2^{x^2-1} = 2sen\frac{\pi y}{2}$.

QI-84. Achar uma fórmula geral para a soma:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k + 1)cos(\frac{2\pi k}{n}).$$

QI-85. Demonstre, usando números complexos, o Teorema de Napoleão. Esse teorema afirma o seguinte: “Se sobre os lados de um triângulo ABC qualquer são construídos triângulos equiláteros, conforme a figura abaixo, então os baricentros desses triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero também.” Denomina-se esse triângulo equilátero de Triângulo de Napoleão.



QI-86. Considere a seguinte expressão:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.\text{(I)}$$

Mostre, justificando as passagens, que a expressão dada a seguir é uma forma fatorada de (I).

$(a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$, em que $\omega = \frac{\cos 2\pi}{3} + i sen \frac{2\pi}{3}$.

NOTA (Equação do 3° grau):

Podemos usar a fatoração anterior para resolver uma equação do terceiro grau da forma (*) $x^3 + px + q = 0$. Vejamos como.

Trocando a, b, c por $x,\ a, b$ em (I) da QI-86 e igualando a 0, teremos:

$$(x + a + b)(x + \omega a + \omega^2 b)(x + \omega^2 a + \omega b) = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx =$$

$$= x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0. \text{ (**)}$$

Disso se obtém as três raízes da equação (**):

$$\{- a - b,\ -\omega a - \omega^2 b,\ -\omega^2 a - \omega b\}. \text{ (1)}$$

Comparando (**) e (*) deduzimos que $p = -3ab$ ou $a^3 b^3 = -\frac{p^3}{27}$ e $q = a^3 + b^3$, o que permite formar a equação quadrática $z^2 - qz - p^3/27 = 0$ com raízes a^3 e b^3.

Resolvendo essa última equação, obtemos os valores de a e b:

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e } b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

E substituindo esses valores em (1) teremos as três raízes de (*).

No caso mais geral da equação cúbica, na forma $x^3 - bx^2 + cx + d = 0$, podemos fazer a mudança de variável, com $y = x - b/3$, para eliminar o termo de grau 2 e cair na forma (*).

QI-87. Considere um ponto X de uma circunferência M de raio 1. Um polígono regular de n lados é inscrito em M. Prove que

$\sum_{i=1}^{n} (XA_i)^2 = 2n$, em que A_i representa cada vértice do polígono.

QI-88. Prove que a área de um triângulo de vértices $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$ e $A_3(z_3)$, do plano complexo, é igual ao módulo do número

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Resolução:

Da geometria analítica plana sabemos que a área S de um triângulo ABC, em que A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) e C = (x_3, y_3), é dada por $|D|$, onde

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Agora mudemos para os complexos $z_j = x_j + iy_j$, com a ajuda das fórmulas $x_j = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2}$ e $y = \frac{z_j - \overline{z_j}}{2i}$, j = 1, 2, 3. Obtemos:

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2} & \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \overline{z_2}}{2} & \frac{z_2 - \overline{z_2}}{2i} & 1 \\ \frac{z_3 + \overline{z_3}}{2} & \frac{z_3 - \overline{z_3}}{2i} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} z_1 + \overline{z_1} & z_1 - \overline{z_1} & 1 \\ z_2 + \overline{z_2} & z_2 - \overline{z_2} & 1 \\ z_3 + \overline{z_3} & z_3 - \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$$

Adicionando a segunda coluna à primeira e colocando 2 em evidência chegamos em

$$D = \frac{1}{4i}\begin{vmatrix} z_1 & z_1 - \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & z_2 - \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & z_3 - \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

E por último, sendo $\frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$ e trocando a segunda coluna pela soma da primeira com o simétrico da segunda, obtemos o resultado esperado:

$$D = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

NOTA:

Se o triângulo estiver orientado positivamente, isto é, no sentido contrário aos dos ponteiros do relógio, então o determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$$

é positivo e seu desenvolvimento sendo igual, após simplificações, a $[(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) - \overline{(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1})}] = 2i.I_m(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1)$, *então deduzimos que a área do triângulo é igual a*

$$\frac{1}{2}I_m(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1).$$

QI-89. Dizemos que um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ é positivamente orientado se, para qualquer ponto P do seu interior, os triângulos PA_kA_{k+1}, k = 1, 2, ...,n, em que $A_{n+1} = A_1$, são positivamente orientados. A partir do resultado mostrado na nota, deduza que a área do polígono convexo $A_1A_2...A_n$ é dada por $\frac{1}{2}I_m(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \ldots + \overline{z_{n-1}}z_n + \overline{z_n}z_1)$.

Obs.: Para quaisquer números complexos w e z vale $I_m(\overline{z}w + z\overline{w}) = 0$. Verifique.

QI-90. Considere, no plano complexo, o triângulo $A_1A_2A_3$ e os pontos M_1, M_2 e M_3 situados nas retas A_2A_3, A_1A_3 e A_1A_2, respectivamente. Suponha que M_1, M_2 e M_3 dividem os segmentos $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$ e $[A_1A_2]$ nas razões $\lambda_1, \lambda_2 \text{ e } \lambda_3$, respectivamente. Então mostre que a razão entre a área S_M de $M_1M_2M_3$ e a área S_A de $A_1A_2A_3$ é dada por

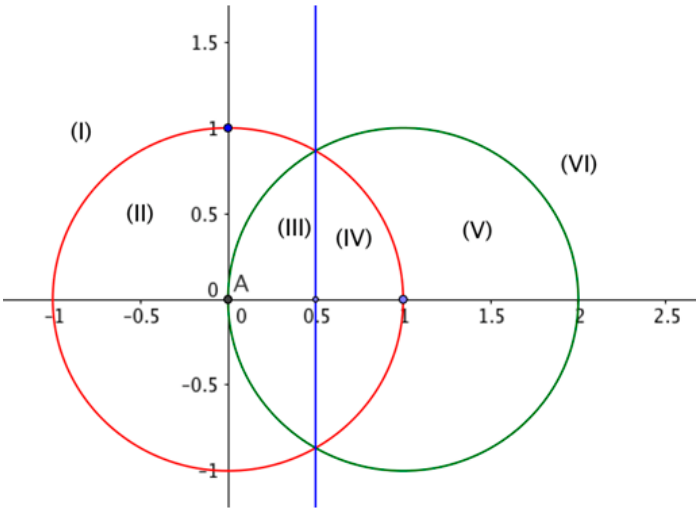
$$\frac{S_M}{S_A} = \frac{1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}.$$

QI-91. Considere o conjunto M das seis funções complexas, com $z \notin \{0, 1\}$, definidas a seguir.

$$f_1(z) = z,\ f_2(z) = \frac{1}{z},\ f_3(z) = 1 - z,\ f_4(z) = \frac{1}{1-z},\ f_5(z) = \frac{z}{z-1},\ f_6(z) = \frac{z-1}{z}.$$

Mostre que a inversa de qualquer uma delas pertence a M. Mostre também que a composição de duas quaisquer delas pertence a M. Isso significa que M, munido da operação "composição de funções" é um grupo. M é um grupo cíclico? Exiba 3 subgrupos de M de ordem 2 e um subgrupo de ordem 3. Esse exemplo contraria a propriedade citada no final da nota sobre o Teorema de Lagrange? Justifique suas respostas.

QI-92. Duas circunferências unitárias, uma centrada na origem e outra em z = 1, são traçadas no plano complexo. A seguir, traça-se a reta Re(z) = 1/2. Juntas, elas particionam o plano complexo em seis regiões. A figura a seguir, ilustra essa situação. Mostre que cada uma dessas regiões contém exatamente um dos seguintes seis valores: $w,\ \frac{1}{w},\ 1-w,\ \frac{1}{1-w},\ \frac{w}{w-1},\ \frac{w-1}{w}$, desde que w não esteja nas fronteiras dessas regiões.



QI-93. (ITA-2010). Se z é uma solução da equação em C,

$$z - \overline{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$$

Pode-se concluir que

A) $i(z-\overline{z}) < 0$.

B) $i(z-\overline{z}) > 0$.

C) $|z| \in [5, 6]$.

D) $|z| \in [6, 7]$.

E) $\left|z + \frac{1}{\overline{z}}\right| > 8$.

QI-94. Prove que a área S do paralelogramo determinado por dois vetores representantes dos números complexos z_1 e z_2 é dada por S = $|Im(\overline{z_1} z_2)|$.

QI-95. (**IME-2011**). O valor de $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$ é:

A) –1.

B) –0,5.

C) 0.

D) 0,5.

E) 1.

QI-96. (**IME-2011**). Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, em que i é a unidade imaginária e z um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Determine o módulo do número complexo (z – 7 – 9i).

Obs.: arg(w) é o argumento do número complexo w.

QI-97. (**IME-2014**). Calcule o determinante a seguir, no qual $\omega = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

QI-98. (**IME-2015**). Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação arg(z - z_1) - arg(z - z_2) - arg(z - z_3) = kπ, em que z_1 é real, z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro.

QI-99. Calcule a soma $\binom{n}{1}sen x + \binom{n}{2}sen(2x) + \cdots + \binom{n}{n}sen(nx)$.

QI-100. (**IME-2012**). As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são repesentadas por 1, ω e ω^2, em que ω é um número complexo. O intervalo que contém o valor de $(1 - \omega)^6$ é:

A) $(-\infty, -30]$. **B)** $(-30, -10]$. **C)** $(-10, 10]$. **D)** $(10, 30]$. **E)** $(30, \infty]$.

QI-101. (**IME-2016/2017**). Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de a,b e c, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

QI-102. (**ITA-2014**).

A) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|Z - 2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

B) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0.

QI-103. (**ITA-2015**). Se $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de 2 arcsen(Re(z)) + 5 arctg(2 Im(z)) é igual a

A) $-\frac{2\pi}{3}$. **B)** $-\frac{\pi}{3}$. **C)** $\frac{2\pi}{3}$. **D)** $\frac{4\pi}{3}$. **E)** $\frac{5\pi}{3}$.

QI-104. (JNCF) Existem números irracionais *x* e *y* tais que x^y seja racional? Justifique sua resposta.

QI-105. (JNCF) Seja Z_p, p primo, o corpo dos inteiros modulares (módulo p). Sabe-se que se $p = 3 \pmod 4$, então vale a seguinte propriedade: "Se w pertence a Z_p e tem raízes quadradas em Z_p, então elas sãos dadas por $[\pm w^{(p+1)/4}] \pmod p$." Usando tal propriedade calcule as raízes quadradas de 17 em Z_{59}. Mostre também que 18 não tem raiz quadrada em Z_{59}.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-I(4)

DRN-I72:

$f(\frac{\pi}{B} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$. A partir disso obtenha $B = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

▸ **Resp.:** $T = 6\sqrt{3}$.

DRN-I73:

Observe que $sen^2 x cos^2 x = (\frac{sen2x}{2})^2$ e $f(x) = 4(1 + \frac{1}{(sen^2 x cos^2 x - 1)})$. Disso, deduza que o conjunto imagem de f é [- 4/3, 0].

DRN-I74:

Mostre que sen6x + cos6x = 1 – $\frac{3}{4}$sen2(2x). Conclua que x = ½ arcsen($\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$) + k π, k $\in Z$.

DRN-I75:

Use MMC dos períodos.

▸ **Resp.:** (i) 6π. (ii) $35\pi/6$. (iii) 60π. iv) 120π.

DRN-I76:

Mostre que f(x) = $\sqrt{3 + 2\sqrt{2 + sen^2 x.cos^2 x}}$ lembre-se que -1≤ sen2x ≤ 1 e que 2sen²2x = 1 - cos4x.

▸ **Resp.:** D(f) = IR e Im(f) = [$\sqrt{2} + 1; \sqrt{6}$]; T = $\frac{\pi}{2}$.

DRN-I79:

Primeiro, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

-7 ≤ F(x, y) ≤ 7.

Depois, use a condição de igualdade da desigualdade de Cauchy-Schwarz para chegar no sistema:

$$\begin{cases} asenx.cosy = 6 \\ asenx.seny = 2 \\ acosx = 3 \end{cases},$$

em que a é uma constante real. Encontre a = 7 e com isso obtenha os valores de cosx, senx, seny e cosy para concluir.

▸ **Resp.:** F_{max} = 7 e F_{min} = -7.

DRN-I80:

Use iz no lugar de z para deduzir o resultado.

DRN-I81:

Lei dos cossenos e MA ≥ MG. Observe que $a^2 + 2bc.cosA = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{bc} + 2cosA = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2.$

DRN-I82:

É impossível uma igualdade entre um número racional e um irracional.

▸ **Resp.:** $x > \frac{\pi}{6}$.

DRN-I83:

Usar MA ≥ MG para obter um sistema de duas equações.

▸ **Resp.:** x = ± 1 ; y = 1 + 4n, n inteiro.

DRN-I84:

Use a questão QF-82, combinada com cisø ou $e^{i\phi}$. Rever QI-7.

DRN-I85:

Usar a seguinte condição(citada na questão QI-16):

$(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, em que $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,sen(\frac{2\pi}{3})$.

DRN-I90:

As coordenadas dos pontos M_1, M_2 e M_3 são

$$m_1 = \frac{z_2 - \lambda_1 z_3}{1-\lambda_1},\ m_2 = \frac{z_3 - \lambda_2 z_1}{1-\lambda_2} \text{ e } m_3 = \frac{z_1 - \lambda_3 z_2}{1-\lambda_3}.$$

DRN-I92:

Descrever as seis regiões com desigualdades relacionadas a $|w| = 1, |w-1| = 1$ e x = Re(w) = 1/2. Em seguida, escolher w em (I), o que significa x < ½, $|w| > 1$ e $|w-1| > 1$, e deduzir as regiões correspondentes dos outros cinco valores, na ordem: 1 - w, $\frac{w-1}{w}$, 1/w, $\frac{w}{w-1}$ e $\frac{1}{1-w}$.

Proceder em cada um desses casos assim: analise as desigualdades análogas relacionadas a $|w| = 1, |w-1| = 1$ e x = 1/2. Por exemplo, vamos analisar o caso de w' $= \frac{w-1}{w}$. Temos que, $|w'| = \left|\frac{w-1}{w}\right|$. Usando a forma algébrica w = x + yi, obtenha $|w'| > 1$.

Por outro lado, $|w' - 1| = \left|\frac{w-1}{w} - 1\right| = 1/|w| < 1$. Ou seja, $|w'| > 1$ e $|w'-1| < 1$. Com essas duas condições, temos que $\frac{w-1}{w}$ está situado em (V). Estudemos mais um caso: w'' = $\frac{w}{w-1}$.

Em virtude do caso anterior $|w''| < 1$. Por outro lado, $|w'' - 1| = 1/|w - 1| < 1$. Colocando w = x + yi, verificamos que Re(w'') = $\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2} > 1/2$, pois $2(x^2 + y^2 - x) > (x-1)^2 + y^2$.

Concluímos que $\frac{w}{w-1}$ está situado em (IV).

Seguindo a orientação anterior, o resultado final é:

$$w \to (I),\ 1 - w \to (VI),\ \frac{w-1}{w} \to (V),\ 1/w \to (II),\ \frac{w}{w-1} \to (IV) \text{ e } \frac{1}{1-w} \to (III).$$

Obs.: Perceba a relação(aproximação) desses valores com os valores possíveis da *razão cruzada* de quatro pontos e também com o grupo de funções citado na QI-91.

DRN-I93:

Colocar a expressão interna aos colchetes na forma exponencial e depois usar z = a + bi.

Com isso tem-se: $z - \bar{z} + |z|^2 =$

$$-\frac{1}{3^{12}}(3-3i)^{12} = -(1-i)^{12} = -2^6\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^{12} = -2^6 e^{i3\pi} = -2^6(-1) = 2^6 = 64,$$

de onde se deduz $a^2 + b^2 + 2bi = 64$ que implica b = 0 e $a = \pm 8$.

Logo $z = \pm 8$ e $\left|z + \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|8 + \frac{1}{8}\right| = \left|-8 - \frac{1}{8}\right| = 8 + \frac{1}{8} > 8$.

▸ **Resp.:** (E).

DRN-I95:

Usar raízes da unidade, com $\varepsilon = cis\left(\frac{2\pi}{7}\right)$: S = ε + ε2 + ... + ε7 + 1 = 0. Temos,

Re(S) = 0 $\Leftrightarrow cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2[cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}] = 0.$

▸ **Resp.:** (C).

DRN-I96:

Fique atento à expressão: $(a - 7)^2 + (b - 9)^2 = 18$.

▸ **Resp.:** $3\sqrt{2}$.

DRN-I97:

Teoremas de Jacobi, Laplace e Chió.

▸ **Resp.:** 0.

DRN-I98:

Sendo arg(z) não definido para z = 0, então z é diferente de z_1, de z_2 e de z_3. Designemos z = x + yi e as raízes assim: z_1 = d, que é real; z_2 = a + bi e z_3 = a – bi. Por outro lado, temos que $\text{Arg}(z - d) - \arg(z - z_2) = \arg\left(\frac{z - d}{z - z_2}\right)$ e $\arg\left(\frac{z - d}{z - z_2}\right) - \arg(z - z_3) = \arg\left(\frac{z - d}{(z - z_2)(z - z_3)}\right) = k\pi$.

Disso segue que $\arg\left(\frac{z - d}{(z - z_2)(z - z_3)}\right)$ é real e por conseguinte $\frac{z - d}{(z - z_2)(z - z_3)}$ é igual ao seu conjugado.

Portanto, podemos afirmar: $\frac{z - d}{(z - z_2)(z - \overline{z_2})} = \frac{\bar{z} - d}{(\bar{z} - \overline{z_2})(\bar{z} - z_2)}$, que implica

$$(\bar{z} - d)(z - z_2)(z - \overline{z_2}) = (z - d)(\bar{z} - \overline{z_2})(\bar{z} - z_2) \Leftrightarrow$$

$$(z - d)(\bar{z}^2 - (z_2 + \overline{z_2})\bar{z} + z_2\overline{z_2}) = (\bar{z} - d)(z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\overline{z_2}) \Leftrightarrow$$

$$(\bar{z} - z)(x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) - d(2x) + 2ad) = 0.$$

Disso, segue que (1) $\bar{z} = z$ ou (2) $(x - d)^2 + y^2 = (a - d)^2 + b^2$.

(1) É a equação da reta que é o eixo real. Deve ser excluído o ponto z_1 = d.

(2) É a equação de uma circunferência de centro (d, 0) e raio r = $|z_2 - d| = \sqrt{(a - d)^2 + b^2}$.

Devem ser excluídos os pontos z_2 e z_3. Portanto, o lugar geométrico procurado é a união de duas figuras: o eixo real sem o ponto z_1 e a circunferência descrita em (2) sem os pontos z_2 e z_3.

DRN-I99:

Use $(1 + e^{ix})^n$ ou (1 + cisx)^n e o item (b) de QI-1.

▸ **Resp.:** $2^n cos^n\left(\frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{nx}{2}\right)$.

DRN-I100:

Use a forma fatorada de cisø – 1.

DRN-I101:

Lembrar que 47 é primo e que 2210 não contém fator primo repetido.

▸ **Resp.:** a = 1, b = 4 e c = 52.

DRN-I102:

A) Faça uma figura e use soma vetorial para obter ½ $= \frac{y_0}{x_0 - 2}$ e o valor máximo pedido;

B) Faça $z_0 = x_0 + y_0 i$ e resolva o sistema.

▸ **Resp.: A)** 1 + $\sqrt{5}$. **B)** $2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} i$.

DRN-I103:

Use a forma cis e a fórmula de Moivre para obter z = $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Observe o conjunto imagem de arcsenx e arctgx.

▸ **Resp.:** (D).

DRN-I172:

Use o número $a = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ e analise os dois casos: a racional e a irracional. Se a é racional, então a resposta é sim. Se a é irracional, então faça $b = \sqrt{2}$ e verifique que $a^b = 3$, que é racional.

Obs.: Em 1934, dois matemáticos(A. Gelfond e Th. Schneider), de forma independente, provaram que um número da forma $a = x^y$, em que *x* e *y* são algébricos (com exclusão dos casos especiais *x = 0, x = 1 e y* racional), é transcendente. Há alguma contradição o que acabamos de ver e esse resultado?

DRN-I173:

- **Resp.:** Raízes: 28 e 31.

QI-106. (IME-1975/1976). Considere E = $\left[sen\frac{1\pi n}{N}\right]^2 + \left[sen\frac{2\pi n}{N}\right]^2 + ... + \left[sen\frac{N\pi n}{N}\right]^2 = \sum_{k=1}^{N}\left[sen\frac{k\pi n}{N}\right]^2$. N e n são números inteiros, tais que 0 < n < N. Calcule E em função de N.

QI-107. (IME-1977/1978). Seja o conjunto A = { z $\in$ C; $|z|$ = 1 }. Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que g(z) = (4 + 3i)z + 5 – i.

QI-108. (**IME-2005-2006**) Sejam as soma S_o e S_1 definidas por

$$S_{\circ} = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + ... + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + ... + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_o e S_1 em função de n, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

QI-109. Calcule o valor de H:

$$H = \sqrt{cos^4\left(\frac{\pi}{9}\right) + cos^4\left(\frac{2\pi}{9}\right) + cos^4\left(\frac{3\pi}{9}\right) + cos^4\left(\frac{4\pi}{9}\right)}.$$

QI-110. (IMO-1967, lista longa). Se x, y, z são números reais satisfazendo as relações x + y + z = 1 e arctgx + arctgy + arctgz = $\frac{\pi}{4}$, prove que $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 1$, para todos os inteiros positivos n.

QI-111. (IMO-1965). Achar todos os números reais $x \in [0, 2\pi]$ tais que

$$2cosx \leq \left|\sqrt{1+sen2x} - \sqrt{1-sen2x}\right| \leq \sqrt{2}\ .$$

QI-112. (JNCF) Usando propriedades do corpo dos Números Complexos, demonstre o Teorema de Bramagupta(Matemático hindu do século VII): “Se a e b são números naturais e cada um deles é a soma de dois quadrados perfeitos, então ab também é uma soma de dois quadrados perfeitos.”

QI-113. Sejam x, y e z números reais tais que $senx + seny + senz = 0$ e $cosx + cosy + cosz = 0$.

Prove que $sen2x + sen2y + sen2z = 0$ e $cos2x + cos2y + cos2z = 0$.

QI-114. (IME-2013/2014). Para o número complexo z que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade $|z - 26i| \leq 10$, sejam α_1 e α_2 os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 - \alpha_2|$ é

A) $\pi - tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$. **B)** $2tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$. **C)** $tan^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$. **D)** $2.\ tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$. **E)** $2.\ tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$.

QI-115. (IME-2017/2018). Seja a função H: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $H(s) = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + a_0}$ com a_j e b_k reais, para j = 0,1,2,3 e k = 0,1, 2. Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que f(w) é a parte real de H(iw) em que i = $\sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e w $\in \mathbb{R}$. A afirmação correta a respeito de f(w) é:

A) *f(w)* é uma função impar.

B) *f(w)* é uma função par.

C) *f(w)* é sempre negativa.

D) *f(w)* é sempre positiva.

E) *f(w)* é uma função periódica.

▸ **Resp.:** (B)

QI-116. (IME-2017/2018). Seja o número complexo z que satisfaz a relação

$2(z - i)^{2017} = (\sqrt{3} + i)(iz - 1)^{2017}$. Determine z, sabendo-se que $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

QI-117.(JNCF). Considere a função $f: C - \{5\} \to C$, definida por $f(z) = \frac{2z+1}{z-5}$, em que C é o corpo dos números complexos. Determine a imagem da figura L definida pela equação $|z - 2| = 3$, com $z \neq 5$, produzida pela função f. Represente, no plano de Argand-Gauss, L e sua imagem $f(L)$.

QI-118. (JNCF). Seja f a função descrita na questão anterior. Qual é a imagem, produzida por f, da reta M definida pela equação $(3 + 2i)z + (3 - 2i)\bar{z} - 6 = 0$?

QI-119. (IMO-1967, lista longa). Um binômio linear f(z) = Az + B, com coeficientes complexos A e B, é dado. Sabe-se que o valor máximo de $|f(z)|$ no intervalo -1 ≤ x ≤ 1 (y = 0) da reta real no plano complexo (z = x + iy) é igual a M. Prove que para todo z $|f(z)| \leq Md$, em que d é a soma das distâncias do ponto P = z aos pontos Q_1(z = 1) e Q_2 (z = -1).

QI-120. (34ª OBM, Nível Universitário). Determine o maior valor possível de

$$|sen^2(x).sen(2x)|, \text{ para } x \in R.$$

QI-121. Seja (x_n) uma sequência com $x_1 = 1$ e seja x um número real tal que $x_{n+1} = x^n + nx_n$, $n > 1$. Prove que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}\right) = e^{-x}$.

QI-122. (ITA-2006). Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{cosx}(4sen^2x - 1) - \log_{cosx}(4 - sec^2x) > 2.$$

▸ **Resp.:** $\frac{\pi}{6} < |x| < \frac{\pi}{4}$.

QI-123. (ITA-2008). Determine todos os valores $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ tais que a equação(em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}\,x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ admita apenas raízes reais simples.

▸ **Resp.:** $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

QI-124. (ITA-2013). Determine o maior domínio D ⊂ R da função $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4\,\operatorname{sen}x\,\cos x - 1)$.

▸ **Resp.:** $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$.

QI-125. (IME-2008/2009). Sabe-se que $z_1\bar{z}_2 = \frac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_4 e z_2 são ortogonais.

Obs.: Números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\bar{z}$ é o número complexo conjugado de z.

QI-126. (ITA-2009).

Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, então o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A) a + bi
B) − a + bi
C) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$
D) a − bi
E) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$

▸ **Resp.:** (B)

QI-127. (JNCF). Considere no plano complexo de Argand-Gauss a circunferência L de equação $|z - 4 - 2i| = \sqrt{20}$. Prove que a imagem de L pela função f(z) = $\frac{2}{\bar{z}}$, com $z \neq 0$, é a reta de equação $(8 + 4i)\,\bar{z} + (8 - 4i)z - 4 = 0$.

QI-128. (JNCF). Mostre que todas as seis funções listadas na QI-91 são funções homográficas. Conclua que o conjuntos dessas funções, munido da operação "composição de funções" é um subgrupo finito do grupo infinito das funções homográficas, citado anteriormente.

QI-129. (JNCF). Sabemos que a equação $|z-4-2i| = \sqrt{20}$ representa uma circunferência L no plano complexo C. Obter a imagem de L pela função $f(z) = \frac{2iz-3+2i}{z+2-3i}$.

QI-130. (JNCF). Descreva o lugar geométrico da imagem de L, em que L é a circunferência de equação $|z-2i| = 4$, dada pela função $h(z) = (fog)(z)$, em que f é a função referida em QL-129 e $g(z) = \frac{2z-2i}{z+2-3i}$, ambas as funções definidas de C_∞ em C_∞.

QI-131. (JNCF). Seja A uma matriz real quadrada 2 x 2. Prove que se A é simétrica então todos os seus autovalores são números reais.

QI.132. Achar o domínio e o conjunto imagem da função real definida por

$$f(x) = \sqrt[4]{\log(\arccos x)}.$$

▸ **Resp.:** $[0, \sqrt[4]{\log \pi}]$.

QI.133. Considere a função real definida por f(x) = $\text{sen}(\pi[x] + \pi/12) + \cos(\pi[x] + \pi/12)$.

Encontre a diferença $f_{máx} - f_{min}$.

QI-134. Se a média aritmética dos valores máximo e mínimo da função f(x) = sen[x], no intervalo $[0, 2\pi]$, tem a forma a.b, com a e b irracionais, então determine o menor desses números.

QI.135. (JNCF). Diagonalize a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ utilizando os autovalores e autovetores associados.

QI-136. Sendo x e y ângulos agudos, resolva o sistema:

$$\frac{1}{2}\text{sen}^2 x - \text{sen}^2(y/2) = 0;$$

$$\text{tg } x + \sec^2 y = 5.$$

QI-137. (IME-2019). Determine todas as soluções da equação:

$4\text{sen}^2(7x).\cos(2x) + 2\text{sen}(9x) + 8\text{sen}^2(x) + 5\cos(2x) + 2\text{sen}(5x) = 4$ no intervalo $[3\pi/2, 2\pi]$.

QI-138. (ITA-2019). Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leq 15$.

▸ **Resp.:** $z_o = 12 + 16i$.

QI-139. Considere o número complexo z = r(cosx + i senx), com r > 0 e $0 \leq x \leq 2\frac{\pi}{3}$. Encontre o valor de

$$K = \frac{Arg(z^2) + Arg(2z^3)}{Arg\left(\frac{z}{10}\right)}.$$

▸ **Resp.:** K = 5.

QI-140. Calcule as somas A = $\sum_{k=1}^{n} q^k.cos kx$ e B = $\sum_{k=1}^{n} q^k.sen kx$.

QI-141. (JNCF). Calcule a raiz cúbica da matriz M = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

QI-142. Se z = a + bi é um número complexo, em que a > 0 e b > 0, calcule sec[arg(lnz)], sabendo que ln(z) = $\ln|z| + i\arg(z)$.

Resp.: $\sqrt{1 + \left(\frac{arctg\left(\frac{b}{a}\right)}{ln\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2}$

QI-143. (JNCF). Prove que a composta de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius e que toda transformação de Möbius é invertível. Deduza que o conjunto dessas transformações, munido da operação composição de funções é um grupo. Lembre-se que a composição de funções é associativa.

Obs.: Releia o comentário sobre essas transformações feito anteriormente, neste capítulo.

QI-144. (IME-1975/1976). Dada a equação $\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3} = b$,

Em que a é um número real maior do que 1, calcule todos os valores reais ou complexos de y que satisfazem essa equação, sabendo-se que a^4 é a média geométrica entre $(1 + b)$ e $\left(\frac{1}{b}\right)$.

QI-145. (ITA-2008). O conjunto imagem e o período de f(x) = 2sen²(3x) + sen(6x) – 1 são, respectivamente,

A) [-3, 3] e 2π. **B)** [-2, 2] e $-\frac{2\pi}{3}$. **C)** [- $\sqrt{2}, \sqrt{2}$] e $\frac{\pi}{3}$.

D) [- 1, 3] e $\frac{\pi}{3}$. **E)** [- 1, 3] e $\frac{2\pi}{3}$.

QI-146. (JNCF). Seja M a representação matricial de um número complexo z. Prove que os autovalores de M são os números complexos z e $\bar{z}$ e fatore M na forma AB, onde A é uma matriz escalar e B é uma matriz de rotação.

QI-147.(JNCF). Seja k um inteiro positivo. Se λ é um autovalor de uma matriz quadrada A com autovetor associado $\boldsymbol{v}$, então prove que λ^k é um autovalor de A^k e $\boldsymbol{v}$ é um autovetor associado a ele.

QI-148. Sejam a, b e c números complexos distintos tais que $(a - b)^7 + (b - c)^7 + (c - a)^7 = 0$. Prove que a, b e c são as coordenadas dos vértices de um triângulo equilátero no plano complexo.

QI-149. (IME-1976/1977). Seja f : C → C tal que f(z) = iz + 2 + 3i.

Seja o conjunto A = { x + iy ∈ C ; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ }.

Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

QI-150. (ITA-2020) A parte real da soma infinita da progressão geométrica cujo termo geral a_n é dado por $a_n = \frac{\cos n + i.sen\, n}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ é igual a

A) $\frac{-1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$ **B)** $\frac{-2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$ **C)** $\frac{4-2\cos 1}{5-4\cos 1}$ **D)** $\frac{1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$ **E)** $\frac{2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$

QI-151. Seja x < 1 um número real positivo. Prove que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$.

QI-152. Sejam $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ as raízes n-ésimas da unidade, com n natural ímpar. Prove que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(A + B\varepsilon_k) = A^n + B^n.$$

QI-153. Sejam $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ as raízes n-ésimas da unidade, com n natural ímpar. Prove que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(A + B(\varepsilon_k)^2) = A^n + B^n.$$

QI-154. Prove a identidade $\left(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right)^2 = 2^n$.

QI-155. Considere os inteiros a_n, b_n, c_n, em que

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots,$$

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots,$$

$$c_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots.$$

Mostre que: $1)\ a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n.$
$2)\ a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 1.$

Mostre também que dois dos três inteiros a_n, b_n, c_n são iguais e a diferença entre o terceiro e um desses dois é 1.

QI-156. (Olimpíada de Matemática Rioplatense, 1997). Um turista viaja ao longo de uma cidade em estágios. Cada estágio consiste de três segmentos de medida 100 metros separados por um desvio de horário de 60º. Entre o último segmento de um estágio e o primeiro segmento do próximo estágio, o turista faz um desvio anti-horário de 60º. Qual a distância que o turista irá ficar da sua posição inicial após 1997 estágios?

QI-157. (ITA-1999). O conjunto de todos os números complexos z, $z \neq 0$, que satisfazem a igualdade $|z+1+i| = \big||z| - |1+i|\big|$ é:

A) $\{z \in C; \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$.

B) $\{z \in C; \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$.

C) $\{z \in C; |z| = 1 \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\}$.

D) $\{z \in C; |z| = \sqrt{2} \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$.

E) $\{z \in C;\ \arg z = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$.

QI-158. (Romênia "Grigore Moisil", 1992). Seja $A_1A_2...A_n$ um polígono regular de circunraio igual a 1. Encontre o valor de max $\prod_{j=1}^{n} PA_j$ quando P percorre o circuncírculo.

QI-159. Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos distintos entre si, tais que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = k$. Prove que $\frac{1}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_2 - z_1||z_2 - z_3|} + \frac{1}{|z_3 - z_1||z_3 - z_2|} \geq \frac{1}{k^2}$.

QI-160. Resolva a equação $z^2 + |z| = 0$, em que z é um número complexo.

QI-161.(IME-2020) Seja A = $\{z \in C; 2 \leq |x - 3 - 4i| \leq 3\}$ em que C é o conjunto dos números complexos. O valor do produto entre o simétyrico do complexo de menor módulo do conjunto A e o conjugado do complexo de maior módulo do mesmo conjunto A é:

A) – 16. **B)** – 8. **C)** – 16/5. **D)** 1. **E)** 16.

QI-162.(ITA-2020) Sabe-se que -2 + 2i é uma das raízes quartas de um número complexo z. Então, no plano de Argand-Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de z, é igual a

A) $4(\sqrt{3}+1)$. **B)** $6\sqrt{3}$. **C)** $8(\sqrt{3}-1)$. **D)** $10\sqrt{3}$. **E)** $12\sqrt{3}$.

OS INTEIROS GAUSSIANOS

Denominamos de inteiro gaussiano ao número complexo da forma a + bi, com a e b inteiros. O conjunto dos inteiros gaussianos dotado das duas operações usuais dos complexos, adição e multiplicação, é indicado por Z[i]. Ele tem propriedades análogas às de Z. Em Z[i] temos a divisão com resto e a propriedade de fatorar qualquer um de seus elementos não invertíveis em fatores primos. Se um elemento de Z[i] é produto de dois ou mais fatores primos, dizemos que ele é *redutível*. Chamamos de *norma* de um inteiro gaussiano z = a + bi ao número real N(z) = $|a + bi|^2 = a^2 + b^2$. Observe que N(z) é inteiro não negativo.

A divisão com resto em Z[i] é feita com uma pequena diferença em relação à divisão com resto em Z: no lugar de módulo usa-se norma. Para maior clareza:

Sejam z e w elementos de Z[i] com w ≠ 0. Então existem q e r em Z[i] tais que:

z = w.q + r, com N(r) < N(q).

Em virtude disso, podemos obter o mdc de dois elementos de Z[i] pelo método de Euclides e consequentemente resolver equações diofantinas lineares em Z[i] de modo análogo ao que fazemos em Z. Dois números q e p de Z[i] são ditos associados, quando existe um elemento invertível u de Z[i] tal que q = up. As três questões apresentadas a seguir serão relacionadas a Z[i].

QI-163. (JNCF)

A) Mostre que os únicos elementos invertíveis de Z[i] são: 1, -1, i e -i.

B) Prove que todo elemento primo de Z[i] divide um número primo de Z.

C) Prove que se z ∈ Z[i] e N(z) é primo em Z, então z é primo em Z[í].

Obs.: Em virtude do item A, os associados de p terão as seguintes formas: p, - p, ip e -ip.

QI-164. (JNCF) Seja p um número primo de Z.

A) Prove que p é soma de dois quadrados se, e somente se, p é redutível em Z[i].

B) Prove que p é soma de dois quadrados se, e somente se p ≡ 2 ou p ≡1 (mod 4).

C) Prove que os associados de p tais que p ≡ 3 (mod 4) são elementos primos de Z[i].

D) Prove o teorema: Dados k números inteiros que são somas de dois quadrados, o seu produto é soma de dois quadrados.

NOTA:

Um número inteiro x é soma de dois quadrados se existem inteiros a e b tais que $x = a^2 + b^2$.

QI-165. Resolva em Z[i] a seguinte equação diofantina linear:

$$(-8 + 14i)x + (5 + 5i)y = -1 + 23i.$$

QI-166. (JNCF). Considere as funções homográficas H_a, definidas por $H_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}\, z}$, para todo $z \in C, z \neq \frac{1}{\bar{a}}$ e $|a| < 1$.

(I) Mostre que a inversa de H_a é dada por $H_{-a}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}\, z}$.

(II) Prove que a imagem da circunferência S^1 de equação $|z| = 1$, produzida por qualquer função H_a é a própria S^1.

(III) Obtenha a imagem da circunferência L de equação $|z| = \frac{1}{4}$ produzida por uma função H_a. Verifique que a imagem de L está no interior de S^1.

(IV) Obtenha a imagem da circunferência L de equação $|z| = \frac{1}{4}$ produzida pela inversão f(z) = 1/z. Compare com o resultado de (iii).

NOTA (Bijeções do Disco unitário)

Prova-se, também, que essas funções homográficas aplicam o disco unitário aberto D(0, 1) sobre si mesmo. Esta afirmação é uma consequência do Princípio do Módulo Máximo, que apresentamos no próximo capítulo. Ou seja, elas são bijeções de D[0, 1] em D[0, 1]. Além disso, o que é algo admirável, qualquer função complexa holomorfa(tem derivada diferente de 0 em D) que seja uma bijeção de D(0, 1) em si mesmo, tem a forma $f(z) = \lambda H_a(z)$, em que λ é um complexo com $|\lambda| = 1$. Detalhes sobre isso veja em [Soares, 1999] ou em [Lins Neto, 1993].

Perceba que a inversão $f(z) = 1/z$ é uma homografia que não goza dessa propriedade, embora ela leve também S^1 em S^1. Aliás, ela leva o D(0, 1) no complementar de D[0, 1] que é o exterior desse disco no plano complexo. No próximo capítulo falaremos sobre funções holomorfas.

QI-167. (16ª IMO). Prove que o número $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ não é divisível por 5 para todo inteiro $n \geq 0$.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-I(5)

DRN-I106:

$2\text{sen}^2x = 1 - \cos 2x$.

▸**Resp.:** E = N/2.

DRN-I107:

Faça g(z) = w. Assim temos que w = (4 + 3i)z + 5 – i.

Disso vem $z = \frac{w - (5 - i)}{4 + 3i} \Rightarrow |z| = \left|\frac{w - (5 - i)}{4 + 3i}\right| = 1 \Rightarrow |w - (5 - i)| = |4 + 3i| \Leftrightarrow |w - (5 - i)| = 5.$

Portanto, a imagem de A pela função g é uma circunferência de centro 5 – i e raio 5.

Obs.: Tente visualizar a resposta, sem desenvolver os cálculos, a partir das transformações que a função afim g faz no plano complexo.

DRN-I108:

Use 1 + cisx = 2cos(x/2).cis(x/2), aplique Moivre e compare com o binômio de Newton.

Lembre-se: $S_0 + S_1 + S_2 = 2^n$, em que $S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \cdots + C_n^{3\left[\frac{n-2}{3}\right]+2}$.

Observe que $S_0 - \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) = \text{na}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

▸ **Resp.:** $S_0 = \frac{2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}$ e $S_1 = \frac{2^n + \sqrt{3}\,sen\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}$.

NOTA:

S_0, S_1 e S_2 correspondem, respectivamente, às somas dos coeficientes binomiais de k $\equiv 0$ (mod 3), k $\equiv 1$ (mod 3) e k $\equiv 2$ (mod 3).

DRN-I109:

Rever QI-56. ▸ **Resp.:** $\frac{\sqrt{19}}{4}$

DRN-I110:

Obtenha a expressão de tg(a + b + c) a partir de tg(a + b). Depois, compare com (x – 1)(y – 1)(z – 1) = 0 para concluir.

DRN-I111:

Indique assim: 2cosx ≤ D ≤ $\sqrt{2}$. Resolva D ≤ $\sqrt{2}$, com $D^2 \leq 2$. Para a outra, analise os dois casos: cosx ≤ 0 e cosx > 0.

▸ **Resp.:** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

DRN-I112:

Sejam A = $a^2 + b^2$ e B = $c^2 + d^2$. Faça z = $a + bi$, w = $c + di$ e depois calcule z.w e os módulos deles.

DRN-I113:

Use z_1 = cosx + isenx e seus análogos para mostrar que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Obs.: $z_1.\overline{z_1} = 1$.

DRN-I114:

Faça uma figura ilustrativa e trace as tangentes ao disco $|z - 26i| \leq 10$ que passam pela origem dos eixos. Sendo θ a diferença entre os valores máximo e mínimo do argumento de z, temos que tg $(\frac{\theta}{2})$ = 5/12. Logo θ = 2arctg(5/12).

Outro caminho: cotgα_1 = 5/12 ⇒ α_1 = arccotg(5/12) = $\frac{\pi}{2}$ − arctg(5/12).

Então α_2 = $\pi - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ + arctg(5/12). Logo θ = 2arctg(5/12). ▸ **Resp.:** (D).

DRN-I116:

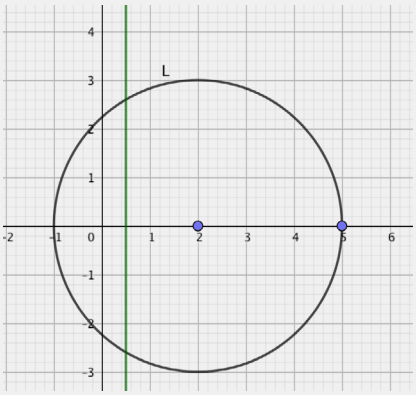
Faça w = $\frac{z-i}{iz-1}$. Logo $w^{2017} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $|w| = 1$. Isso implica z = $\bar{z}$ e, por conseguinte, z é real. Disso, e do dado da questão segue: z = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou z = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Verifique que $w^{2016} = 1$, nos dois casos, usando a forma trigonométrica. Se z = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, então w^{2017} = w = $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \neq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; e se z = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, então w^{2017} = w = $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Conclui-se que z = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Obs.: z = $\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ = cis($\frac{5\pi}{6}$) e z = $-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ = cis($\frac{\pi}{6}$).

Logo, usando a fórmula de Moivre, obtemos: w^{2016} = cis(1680 π) = cos2 $\pi = 1$ = cis(336 π).

DRN-I117:

A imagem de L é a reta de equação 3w + 3$\overline{w}$ – 3 = 0, que mudando de variável fica 3z + 3$\bar{z}$ – 3 = 0, que equivale a z = ½ + yi, pondo z = x + yi. Gráficos de L e de sua imagem por f estão esboçados na figura mostrada a seguir.



DRN-I118:

A imagem da reta M é a circunferência de equação $\left|w - \frac{7-6i}{8}\right| = \frac{\sqrt{117}}{8}$ menos o ponto w = 2.

DRN-I119:

Use $|Az + B| = \frac{1}{2}|(z+1)(A+B) + (z-1)(A-B)|$ e desigualdade triangular.

DRN-I120:

Use derivada para obter o máximo em x = $\frac{\pi}{3}$. Valor máximo = $3\sqrt{3}/8$.

DRN-I121:

Faça $P_k = \prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{x^n}{x_{n+1}}\right)$. Observe que $P_k = \prod_{n=1}^{k}\left(\frac{nx^n}{x_{n+1}}\right) = \frac{k!}{x_{k+1}}$.

Use $\frac{1}{P_{k+1}} - \frac{1}{P_k}$ para obter a expressão de $\frac{1}{P_{k+1}}$. E lembre-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots .$$

DRN-I125:

Coloque $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ e obtenha $|1 + z_1\bar{z}_2| = |z_1\bar{z}_2 - 1|$. Disso, conclua que $ac + bd = 0$, o que equivale $(a,\ b).(c,\ d) = 0$.

DRN-I128:

Mostre que $h(x) = 2(na(x) + 1)^2 - 3$ e verifique, pelo ciclo trigonométrico, que $-¾ \leq \text{senx} \leq 1$.

▸ **Resp.:** $I_m(h) = [-23/8,\ 5]$.

DRN-I129:

Perceba que f é uma função homográfica.

DRN-I130:

Perceba que g é uma função homográfica também.

DRN-I133:

Analise os casos: [x] = 2n é par ; [x] = 2n + 1 é ímpar.

▸ **Resp.:** $\sqrt{6}$.

DRN-I134:

No intervalo $[0, 2\pi]$, perceba que f_{max} = na(2), f_{min} = na(5). E usando transformação soma-produto, verique que a.b $= \frac{sen(2)+sen(5)}{2} = sen(3{,}5).\cos(1{,}5)$. E com a ajuda do ciclo trigonométrico verifica-se que o menor é na(3,5), pois $\frac{3\pi}{2} > 3{,}5 > \pi$ está no 3º quadrante, enquanto $1{,}5 < \frac{\pi}{2}$ está no 1º quadrante.

DRN-I135:

Autovalores: $3 \pm \sqrt{10}$; D = $\begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{10} \end{bmatrix}$; P = $\begin{bmatrix} -1-\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

DRN-I136:

Transforme o sistema para: $\sec^2 x = \sec y$ e $tg^4 x + 2tg^2 x + tg\, x - 4 = 0$.

▸ **Resp.:** $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{3}$.

DRN-I137:

Use Transformação soma/produto e $1 - 2sen^2x = \cos 2x$ para chegar na forma

$$\cos(2x)(4sen^2(7x) + 4sen(7x) + 1) = 0.$$

Soluções: $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{67\pi}{42}$, $\frac{79\pi}{42}$, $\frac{71\pi}{42}$ e $\frac{83\pi}{42}$.

DRN-I140:

Calcule 1 + A + iB = $\sum_{k=0}^{n} q^k.(coskx + isenkx) = \sum_{k=0}^{n} q^k.(cosx + isenx)^k$.

DRN-I141:

Diagonalizando a matriz M , obtemos: M = $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

A raiz cúbica de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} \end{bmatrix}$. Logo $M^{1/3}$ = $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

DRN-I144:

Perceba que o somatório expressa a soma dos termos de uma PG infinita de razão q = $a^{-y^3} < 1$, supondo $y^3 > 0$. Disso, chegue em $y^3 = 8$, que implica y = 2 ou y = - 1 $\pm i\sqrt{3}$.

DRN-I145:

Verifique que f(x) = na6x – cos 6x = $\sqrt{2}(6x - \frac{\pi}{4})$.

▸ **Resp.:** C

DRN-I146:

Lembre-se que arc senx + arc cosx = $\frac{\pi}{2}$ e que arc cosx é decrescente em [0, π].

▸ **Resp.:** D(f) = [1; 3] e Im(f) = [0; 1].

DRN-I147:

Perceba que $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Use indução finita para concluir a prova.

DRN-I148:

Faça x = a – b, y = b – c e z = c – a. Com isso e a hipótese, deduza que $(x + y)^7 – x^7 – y^7 = 0$. Agora use a fatoração $(x + y)^7 – x^7 – y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$. Como a, b e c são distintos, então $xy \neq 0$ e $x + y = -z \neq 0$. Logo, $x^2 + xy + y^2 = 0$, o que implica $x^3 = y^3$, pois $x^3 – y^3 = (x – y)(x^2 + xy + y^2)$. A troca de variáveis não altera o resultado, isto é, o problema tem simetria nessas variáveis. Portanto, $z^3 = x^3 = y^3$, donde se conclui $|x| = |y| = |z|$.

DRN-I149:

A função f faz uma rotação anti-horária de 90º pelo fator i e uma translação de 2 + 3i. Portanto, a elipse A se transforma na elipse B com semi-eixo maior vertical e centro 2 + 3i. Ou seja, B é o conjunto dos pontos z = x + iy do plano C tais que $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$.

Outro caminho de resolução é o puramente algébrico:

Fazer w = f(z) = iz + 2 + 3i e obter w = - y + 2 + (x + 3)i. Pondo x' = - y + 2 e y' = x + 3, tem-se y = 2 – x' e x = y' – 3. Substituir esses valores na equação da elipse A para obter, trocando de variáveis, a equação da elipse B: $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$.

DRN-I150:

Verifique que q = $\frac{cis\ 1}{2}$ e S = $\frac{\cos 1 + isen\ 1}{2 - \cos 1 - isen\ 1}$. Deduza, após simplificações, que Re(S) = $\frac{-1 + 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$.

DRN-I151:

Defina $P_k = (1 - x)\prod_{n=1}^{k}(1 + x^{2^n})$ e verifique, por indução, que $P_k = 1 - x^{2^{k+1}}$. Sendo $x < 1$, $\lim_{k\to\infty} P_k = 1 \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$.

DRN-I152:

Use a identidade $x^n - 1 = (x - \varepsilon_0)\dots(x - \varepsilon_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \varepsilon_k)$ e faça $x = -A/B$. Com isso se obtém:

$$-\frac{(A^n + B^n)}{B^n} = (-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(A + B\varepsilon_k)}{B^n}.$$

Observe que n é ímpar. Logo $\prod_{k=0}^{n-1}(A + B\varepsilon_k) = A^n + B^n$.

DRN-I153:

Perceba que, se mostrarmos que a função $f(x) = x^2$ é injetiva de U em U, em que $U = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ e n é ímpar, então usando o resultado da questão anterior teremos:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(A + B(\varepsilon_k)^2) = \prod_{k=0}^{n-1}(A + B\varepsilon_k) = A^n + B^n. \qquad (1)$$

Provemos, pois que $f(x) = x^2$ é injetiva de U em U.

Podemos provar por indução ou por contradição. Usando este último método, suponhamos que $f(a) = f(b)$.

Disso segue $a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow a - b = 0$ ou $a + b = 0$.

Mas $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow a^n = (-b)^n \Rightarrow 1^n = (-1)^n$.

E como n é ímpar, então 1 = - 1, o que é um absurdo.

Portanto, $a = b$, o que implica f ser injetiva e, por conseguinte, (1) é verdadeira.

DRN-I154:

Use $(1 + i)^n = A + Bi$. Disso, usando módulo, obtenha $2^n = A^2 + B^2$. E com o binômio de Newton conclua que $A = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots$ e $B = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$

DRN-I155:

Façamos $a = a_n,\ b = b_n$ e, $c = c_n$. Sabemos que:

$$(*)\ \begin{cases} a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) \end{cases}, \text{onde } \varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{isen}\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Por outro lado,

$$(1)\qquad (1+\varepsilon)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \varepsilon^p = a_n + b_n\varepsilon + c_n\varepsilon^2 = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$$

$$(2)\qquad (1+\varepsilon^2)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\varepsilon^2)^p = a_n + b_n\varepsilon^2 + c_n\varepsilon = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon.$$

De (*) obtemos: $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$. E por (1) e (2) deduzimos:

$$(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon^2)^n\ (1+\varepsilon^2+\varepsilon+\varepsilon^3)^n = (\varepsilon^3)^n = 1^n = 1.$$

Logo, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 1$, o que combinado com (*) implica

$a^3+b^3+c^3-3abc = a+b+c = 2^n$.

Por outro lado, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 1$,

que equivale a $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2$. (3)

Como a, b, c são inteiros, então uma das três parcelas de (3) é igual a zero, o que implica a igualdade das outras duas. Supondo $a = b$, teremos $2(b-c)^2 = 2$, que implica $|b-c| = 1$.

DRN-I156:

Use o complexo w = $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)$ para medir o deslocamento(vetorial) x de cada estágio: x = 100 + 100$\overline{w}$ + 100$(\overline{w})^2$. O deslocamento total é z = xw^2 e a distância pedida é igual a 200 metros.

DRN-I157:

Faça z = x + iy e deduza que x = y < 0.

Logo z = x(1 + i) = - x(-1 – i) = - x$(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)$. Disso segue

Que arg z = $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$. ▸ **Resp.:** A.

DRN-I158:

Use raízes da unidade, fatoração de polinômio e $/z^n - 1/ \leq /z/^n + 1 = 2$. E perceba que esse valor máximo ocorre em $z^n = -1$, o que corresponde aos pontos médios dos arcos A_jA_{j+1}, j = 1, 2,..., n, em que $Na_{+1} = A_1$. Lembrar que $2\sqrt{ab} \leq a + b$ e $2\sqrt{ab} = a + b \Leftrightarrow a = b$.

DRN-I159:

Use representação geométrica dos números complexos.

DRN-I160:

Use a forma algébrica de z. Raízes: 0, i e – i.

DRN-I161:

Observe que A é a coroa circular $2 \leq |x - (3 + 4i)| \leq 3$, de centro $z_0 = 3 + 4i$. A reta que passa pela origem (0, 0) e z_0 intersecta a circunferência maior(raio 3) nos pontos $z_m = 2(3/5 + 4i/5)$ e $z_M = 8(3/5 + 4i/5)$. Disso segue que $– z_m . \bar{z}_M = -16$.

DRN-I162:

Temos a condição $w^3 = (-2 + 2i)^4$. Disso, segue $|w| = 4$. Logo, o triângulo equilátero está inscrito na circunferência de raio 4. Usando o teorema dos cossenos, obtemos a medida de um lado $m = 4\sqrt{3}$. Portanto a área do triângulo é $S = 12\sqrt{3}$.

DRN-I163:

A) Se z = a + bi é invertível, então existe z' tal que z.z' = 1. Disso, segue N(z.z') = N(1) = 1. Mas N(z.z') = N(z).N(z') e N(z) ≥ 0 é inteiro. Logo, N(z) = 1 e por consequência $a^2 + b^2 = 1$, o que nos leva, em Z x Z, às soluções: -1, 1, i e -i.

B) Seja $N(z) = {p_1}^{a_1}.{p_2}^{a_2} \ldots {p_r}^{a_r}$. Sendo $N(z) = z\bar{z}$, segue que z divide N(z); e como z é primo, ele divide um dos fatores ${p_j}^{a_j}$ e por conseguinte divide o primo p_j.

C) Provemos a contra-recíproca. Suponha que $z \neq 0$ não seja primo em Z[i]. Então, $z = z_1.z_2$, com z_1 e z_2 não nulos e não invertíveis. Logo $N(z) = N(z_1).N(z_2)$, com $N(z_1) > 1$ e $N(z_2) > 1$, em virtude de (A). Portanto, N(z) não é primo em Z.

DRN-I164:

A) Mostre primeiro que p = $z\bar{z}$, com z primo em Z[i]. Depois, prove que esse resultado implica que p é soma de dois quadrados. Por fim, prove que deste último resultado segue que p é redutível em Z[i]. Nos argumentos das provas use os resultados da questão anterior. Como exemplo, provaremos a primeira afirmação. Se p = z.w, com z, w $\in$ Z[i] e não invertíveis, então temos p^2 = N(p) = N(z.w) = N(z).N(w), o que implica N(z) = N(w) = p. Logo, pelo item C da questão anterior deduzimos que z é primo em Z[i]. E como w = p/z = p.$\bar{z}$/N(z) = $\bar{z}$, então concluímos que p = z.w = z$\bar{z}$.

B) Para p = $a^2 + b^2 > 2$, a e b têm paridades distintas; logo, p = $(2n + 1)^2 + (2m)^2$.

C) Use os resultados dos itens A e B.

D) Perceba que n = $a^2 + b^2 \Leftrightarrow$ n = $|a + bi|^2$ = N($a + bi$) = N(z), em que z = $a + bi$.

Obs.:

Para uma iniciação mais ampla sobre os inteiros gaussianos consulte a referência [Hefez, 2002].

DRN-I165:

Use o algoritmo de Euclides para obter mdc(-8 + 14i, 5 + 5i) = 3 + i. E usando esse algoritmo de trás para frente, obtenha a solução particular: x_0 = - 2 – 7i e y_0 = -12 + 11i. A partir desta solução escreva a solução geral: x = x_0 + z.$(\frac{5+5i}{3+i})$ e y = y_0 – z.$(\frac{-8+14i}{3+i})$, z $\in$ Z[i]. Ela pode ser escrita assim: x = - 2 – 7i + (2 + i)z e y = -12 + 11i – (-1 + 5i)z, z $\in$ Z[i].

DRN-I166:

I) Verifique que $(H_a o H_{-a})(z) = z = (H_{-a} o H_a)(z)$.

II) Devemos provar que $|H_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$. Para isso, basta provarmos que

$$|z - a| = |1 - \bar{a}z|, \text{ o que equivale a } |z - a|^2 = |1 - \bar{a}z|^2.$$

Mas $|z - a|^2 = (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 1 + |a|^2 - (\bar{a}z + a\bar{z}) = (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) = |1 - \bar{a}z|^2$.

Observe que $|z| = 1$. De modo análogo, obtemos também que $|H_{-a}(z)| = \left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| = 1$. Assim se conclui a prova.

DRN-I167:

Desde que $2^3 \equiv -2\ (mod\ 5)$, um problema equivalente é provar que $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-2)^k$ não é divisível por 5. Expandindo $(1+i\sqrt{2})^{2n+1}$ e separando os termos pares dos ímpares, obtemos: $(1+i\sqrt{2})^{2n+1} = R_n + i\sqrt{2}S_n$, em que $R_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-2)^k$. Aplicando módulo, encontramos $3^{2n+1} = R_n^2 + 2S_n^2$.

Como $3^2 \equiv -1\ (mod\ 5)$, então $R_n^2 + 2S_n^2 \equiv \pm 3\ (mod\ 5)$.

Suponhamos, por contradição, que $S_n \equiv 0\ (mod\ 5)$, para algum inteiro n > 0.

Então, $R_n^2 \equiv \pm 3\ (mod\ 5)$, o que é absurdo, pois qualquer quadrado módulo 5 é congruente com 0, 1 ou 4.

A EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ DIAGONALIZÁVEL

Sabemos que a função exponencial real f(t) = $e^{at} = e^{ta}$, em que a é uma constante real, tem a seguinte representação em série de potências:

$$e^{ta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k a^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k a^k.$$

Como já definimos antes uma potência de uma matriz quadrada A, então podemos, inspirados nessa fórmula, definirmos a exponencial de A, assim:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k A^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k A^k.$$

Esse limite tem o seguinte significado: cada entrada d_{ij} de e^{tA} é a soma da série numérica correspondente das entradas da série do segundo membro da fórmula. Para facilitar a essa visualização, vamos considerar uma matriz A, 2 x 2, diagonalizável. Seja A = PDP^{-1}, com D = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Então, $A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}P^{-1}$.

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k A^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k\ P\begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}P^{-1} = P\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{k!}t^k a^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!}t^k b^k \end{bmatrix}\right)P^{-1} =$$

$$= P.\begin{bmatrix} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k a^k & 0 \\ 0 & \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^k b^k \end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{tb} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

Evidentemente, para uma matriz n x n, diagonalizável, o padrão é similar. A partir dessa definição, definimos a derivada de e^{tA} como sendo a matriz formada pelas derivadas das entradas dela. Sendo assim, a regra tem o mesmo formato da derivada da exponencial real: $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Ilustremos esses conceitos com exemplos numéricos.

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Calculemos a exponencial e^{tA} e a sua derivada. Primeiramente, vamos diagonalizar a matriz. Através de sua equação característica det(A - ëI) = 0 encontramos os autovalores 6 e 1. Disso, segue que

A = P $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$P^{-1}. Resolvendo essa equação matricial obtemos P = $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ e P^{-1} = $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$.

Logo $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ = $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{6t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4e^{6t}+e^{t} & 4e^{6t}-4e^{t}\\ e^{6t}-e^{t} & e^{6t}+4e^{t}\end{bmatrix}$.

E a sua derivada é $Ae^{tA} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4e^{6t}+e^{t} & 4e^{6t}-4e^{t}\\ e^{6t}-e^{t} & e^{6t}+4e^{t}\end{bmatrix}$.

Um segundo exemplo, é resolver o seguinte sistema linear de equações diferenciais:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \end{cases}, (*)$$

sujeito às condições iniciais $y_1(0) = 2$ e $y_2(0) = 3$.

Na forma matricial, (*) fica assim: Y'(t) = AY(t) , Y(0) = $\binom{2}{3}$ e A = $\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

Como $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$, então Y(t) = $e^{tA}B$, onde B = Y(0), pois Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t).

Como já calculamos, no exemplo anterior, e^{tA}, então $Y(t) = \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4e^{6t}+e^{t} & 4e^{6t}-4e^{t}\\ e^{6t}-4e^{t} & e^{6t}+4e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$, o que nos dá $y_1(t) = 4e^{6t} - 2e^{t}, y_2(t) = e^{6t} + 2e^{t}$.

Para ampliar os conhecimentos sobre equações diferenciais ordinárias há muitos livros. Algumas referências são [Apostol, 1969], [Boyce, 1998] e [Doering, 2007]. Mas na Web há vários textos disponíveis.

QI-168. Seja a matriz A uma matriz 2 x 2 em que a primeira linha é [1, 2] e a segunda linha é [-1, 0]. Calcule a exponencial e^{tA} e a sua derivada.

▶ **Resp.:** e^{tA} é igual a: $\begin{pmatrix} \frac{e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right)}{\sqrt{7}} + e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right) & \frac{4\,e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right)}{\sqrt{7}} \\ -\frac{2\,e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right)}{\sqrt{7}} & e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right) - \frac{e^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right)}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$

CAPÍTULO V

POLINÔMIOS E APROXIMAÇÕES

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

Polinômio de Taylor e série de Taylor

Seja f uma função de variável real com derivadas (f', f'', f''', ... ,$f^{(n)}$, ...) de todas as ordens em algum intervalo aberto contendo um ponto a . Então, a **série de Taylor** gerada por f, em x = a, é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

A soma parcial dessa série, indicada abaixo, é o **Polinômio de Taylor de ordem n** da função f.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Perceba que o polinômio de Taylor é uma *aproximação polinomial* da função *f.* O polinômio de Taylor de 1º grau, $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, representa geometricamente a tangente ao gráfico de *f* em x = a; do mesmo modo que o de 2º grau, $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2$, representa geometricamente a parábola tangente ao gráfico de *f* em x = a. Logo, é razoável esperarmos que para pontos x, muito próximos de a, esses polinômios tenham valores muito próximos dos valores de $f(x)$.

Sabendo que (sen x)' = cosx, (cosx)' = - sen x e (e^x)' = e^x, verifique com a fórmula de Taylor, pondo $a = 0$, os resultados:

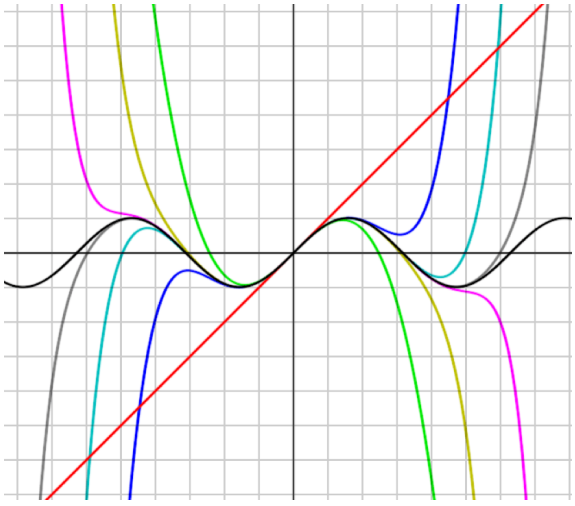
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$sen\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

A figura a seguir ilustra a aproximação polinomial da função $f(x) = sen\, x$, em torno do ponto x = 0, por polinômios de Taylor de várias ordens(1, 3, 5, 7, 9, 11 e 13). Perceba a aproximação progressiva das curvas polinomiais da senóide, à medida que aumenta o grau do polinômio. Ela foi copiada da Wikipédia.

Acesse o Código QR.



Convergência de uma Série de Potências

Uma série de potência é uma generalização “natural” de um polinômio. Denominamos de *série de potências* a toda série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, em que c_n e a são números reais. Comumente, dizemos que essa série é uma *série de potências em x, centrada em* a*, com coeficientes* c_n*.* Os exemplos mais comuns desse tipo de série são as séries de Taylor. A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é o exemplo mais simples de uma série de potências. Ela é convergente quando $|x| < 1$. Nesse caso sua soma é igual a $\frac{1}{1-x}$. Se $|x| \geq 1,$ ela é divergente. Temos pois, que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ representa a função $\frac{1}{1-x}$ no intervalo (-1, 1), isto é,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

O que desejamos mostrar aqui é o critério de convergência das séries de potências em geral. Observe que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é uma série de potências centrada em $a = 0,$ que converge no intervalo $(a-1, a+1) = (-1, 1)$ e diverge fora dele. Perceba que o número r = 1 se comporta como o raio do intervalo simétrico, com centro em $a = 0.$ A pergunta quase natural é: todas as séries de potências têm um comportamento de convergência aproximado(análogo) ao dessa série geométrica? A resposta, felizmente, é sim. Apresentamos na forma de um teorema esse comportamento. Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, usaremos $a = 0.$ No caso geral, basta fazer a mudança $y = x - a.$

Teorema da convergência de uma série de potências:

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *ou converge apenas para x = 0 ou existe r,* $0 < r \leq +\infty$ *, chamado de raio de convergência da série, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto (-r, r) e diverge fora do intervalo fechado [-r, r]. Nos extremos - r e r, a série pode convergir ou divergir. Se existir L =* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, *então r = 1/L. Além disso, tem-se* $0 < \rho < r \Leftrightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < 1/\rho$ *, para todo* n *natural suficientemente grande.*

Valem também as seguintes propriedades. *Se* $r > 0$, *então em todo intervalo compacto* $[-\rho, \rho] \subset [-r, r]$ *a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$:

I) converge uniformemente para uma função contínua f;

II) é integrável termo a termo e derivável termo a termo.

Em virtude disso, a série de potências de uma função, em um ponto $x = a$ do intervalo de convergência, é única. Usa-se o nome *função* analítica para toda função representada por uma série de potências convergente. Portanto, as funções exponencial, seno e cosseno são funções analíticas em todo o R.

O exemplo dado a seguir ilustra essas propriedades.

Sabemos que a derivada da função $f(x) = arctg(x)$ é $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

As séries de Taylor, em x = 0, dessas funções são:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \text{ (*)}$$

$$\text{e } arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. \text{ (**)}.$$

Perceba nesse exemplo que, se derivarmos termo a termo a série (**), obteremos a série(*). Por outro lado, se fizermos a integração termo a termo da série (*), obteremos a série (**). Estas séries são convergentes no intervalo fechado [-1, 1]. Fazendo na série (**) x = 1, se obtém a conhecida *série de Leibniz*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots.$$

Verifique também, que a derivação termo a termo da série de Taylor da função $senx$, em x = 0, é igual à série de Taylor de cosx, assim como a integração termo a termo da série de Taylor de cosx é igual à série de Taylor de senx.

Essas propriedades é que fazem com que as série de potências sejam tão importantes na Matemática, em especial, na Análise. Afinal de contas, as funções reais mais destacadas, como a exponencial e as duas trigonométricas principais, seno e cosseno, são dadas por suas séries de Taylor em qualquer ponto da reta real, pois têm raio de convergência infinito. Por isso, podemos apresentar, analiticamente, por meio de suas séries de Taylor, as funções seno e cosseno, e a partir delas desenvolver a Trigonometria. Evidentemente, isso não diminui a importância da construção geométrica clássica que fizemos anteriormente no presente texto. Pois, do ponto de vista pedagógico e à luz da teoria das Aproximações Multifárias, essa construção clássica tem uma aproximação maior com a realidade cotidiana. Referente a isso, falamos na Introdução da **"**importância de se apresentar conceitos novos(e suas propriedades principais), sempre fazendo comparações(aproximações) com outros conceitos(e suas propriedades principais), ampliando a compreensão e a integração de vários conteúdos afins. Dessa forma desenvolveremos, de fato, a arte de aprender de forma crítica e aberta qualquer conhecimento da Realidade Estudada.

Por isso, devemos nos esforçar para preservar a "memória essencial" dos principais conceitos e ideias construídos ao longo da história da Matemática e das outras ciências, respeitando os traços culturais mais significativos, no processo de organização do conhecimento acumulado e na construção de novos conhecimentos, realizando aproximações multifárias para aprimorá-los ou superá-los com conceitos melhores e mais compreensíveis da Realidade estudada."

Desenvolvimento de P(x) em potências de (x - a):

Podemos usar a fórmula de Taylor para expressar ou desenvolver um polinômio P(x) em potências de x - a. Uma propriedade que nos ajuda nisso é a seguinte: *o polinômio de Taylor P(x) de uma função polinomial real f(x) satisfaz à igualdade P(x) = f(x).* Vejamos, com um exemplo, como isso pode ser feito. Considere o polinômio $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 3$.

Vamos desenvolvê-lo em potências de x - 1. Pela fórmula de Taylor temos que

$$P(x) = P(1) + P'(1)(x -1) + P''(1)(x - 1)^2/2! + P'''(1)(x - 1)^3/3! + P^{(4)}(1)(x - 1)^4/4!.$$

Como $P'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 5$, $P''(x) = 24x^2 - 6x$, $P'''(x) = 48x - 6$ e $P^{(4)}(x) = 48$, então obtemos:

$$P(1) = 3,\ P'(1) = 10,\ P''(1) = 18,\ P'''(1) = 42 \text{ e } P^{(4)}(1) = 48.$$

Logo $P(x) = 3 + 10(x - 1) + 9(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3 + 2(x - 1)^4$.

FUNÇÃO GERADORA E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Falamos antes, no primeiro capítulo, que a função

$$f(x) = x + x(x + x^2) + x(x + x^2)^2 + x(x + x^2)^3 + x(x + x^2)^4 + x(x + x^2)^5 + \ldots$$

$= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + \ldots$, gerava, através dos coeficientes, os números de Fibonacci. Uma função assim é chamada de **função geradora.** Como podemos, manipulando adequadamente, obter uma fórmula fechada para os números de Fibonacci através dessa função geradora?

Já fizemos uma parte do trabalho, quando vimos que a soma dessa série de potências, com a condição de $x + x^2 < 1$, era dada por $\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1 - \bar{\varphi} x}\right]$.

Agora, usando a soma dos termos de uma PG infinita de razão menor do 1, verificamos o seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi x)^n = \frac{1}{1-\varphi x} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\varphi} x)^n = \frac{1}{1 - \bar{\varphi} x}.$$

Logo podemos concluir que

$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\varphi} x)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}[(\varphi x)^n - (\bar{\varphi} x)^n]$ e, por conseguinte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\varphi x)^0 - (\bar{\varphi} x)^0 + (\varphi x)^1 - (\bar{\varphi} x)^1 + (\varphi x)^2 - (\bar{\varphi} x)^2 + (\varphi x)^3 - (\bar{\varphi} x)^3 + \ldots + (\varphi x)^n - (\bar{\varphi} x)^n + \ldots]$$

$$= 1x + 1x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^3 - \bar{\varphi}^3)x^3 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)x^n + \ldots$$

$$= F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \ldots + F_nx^n + \ldots.$$

Na verdade, o que mostramos acima, foi outro método de obter a fórmula de Binet para os números de Fibonacci usando uma *função geradora*, que, muitas vezes, é representada por uma *série de potências.* Esse caso é um exemplo de uma classe de funções geradoras que satisfazem à fórmula:

$$f(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x} = A\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n + B\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(A\alpha^n + B\beta^n)x^n,$$

onde αx e βx têm módulos menores do que 1.

Observe que ao fatorarmos 1 - x - x^2 obtemos 1 - x - x^2 = - (x + φ)(x + φ^-). Então f(x) = $\frac{x}{-(x + \varphi)(x - \bar{\varphi})}$.

Agora, para colocarmos na forma de soma de frações parciais, teremos de resolver a equação:

$$\frac{A}{1-\varphi x} + \frac{B}{1 - \bar{\varphi} x} = \frac{x}{-(x + \varphi)(x + \bar{\varphi})}.$$

Disso, segue o sistema A + B = 0 e $-A\bar{\varphi} - B\varphi = 1$.

Resolvendo-o, obtemos A = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e B = - $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, em consequência, teremos

$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1 - \bar{\varphi} x} \right]$. Daí prossegue como fizemos acima.

Atualmente, as funções geradoras têm grande importância na Matemática Discreta.

Série binômia e integral elíptica

A série binômia generaliza o binômio de Newton. Queremos desenvolver em série de Taylor, em torno de x = 0, a função real definida por $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $x > -1$ e α uma constante real qualquer. As derivadas de f são:

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, \qquad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}, \ldots,$$

$$f^n(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}.$$

Em particular, para x = 0, temos:

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha - 1), \ \ldots, \ f^n(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1).$$

A série de Taylor de f é, pois a *série binômia:*

$$(1 + x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Essa série é convergente para $|x| < 1$.

A elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com excentricidade k = $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, pode ser parametrizada por $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$. Se usarmos isso e sua simetria para obter seu comprimento de arco obteremos a seguinte integral: $L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t} \, dt$.

Por outro lado, a integral $K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 sen^2 t}}\, dt$, com $k^2 < 1$, é do tipo que aparece no cálculo do período do pêndulo comum. Elas pertencem a um grupo de integrais denominadas de **integrais elípticas**.

Esse tipo de integral não tem "expressão fechada" em termos das funções elementares conhecidas. Elas formam um pequeno subconjunto de um conjunto muito mais amplo de funções que não têm uma expressão fechada em termos de funções elementares conhecidas. Isso revela mais evidências a favor da teoria das Aproximações Multifárias como o caminho mais adequado na construção e apresentação da Matemática no processo de Ensinar/Aprender em todos os níveis.

Para calcular a integral K ou a integral *L,* podemos desenvolver o integrando na forma de série binômia. Para o caso de K, temos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sen^2 t}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 sen^2 t + \frac{1.3}{2.4}k^4 sen^4 t + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 sen^6 t + \cdots .$$

Sendo $k^2 sen^2 x \leq k^2 < 1$, então a série converge uniformemente para todos os valores de x, o que permite, pelo teorema citado anteriormente, ser integrada termo a termo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sen^2 t}}\, dt = \int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}k^2 sen^2 t\, dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1.3}{2.4}k^4 sen^4 t\, dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 sen^6 t\, dt + \cdots .$$

Calculando-se os valores dessas integrais chegamos ao seguinte resultado:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Perceba que no exemplo ilustrado, o cálculo foi possível com o uso do desenvolvimento em série de potências de funções elementares. Portanto, quanto mais dominarmos as propriedades das sequências e séries, mais algoritmos aprimorados teremos para fazer as contas complicadas e longas pelos computadores e seus assemelhados. Isso não impede que alguns pesquisadores continuem estudando para descobrir novos tipos de funções e suas propriedades relevantes.

Este exemplo é mais uma amostra da relevância do conceito de sequência/série na melhor compreensão e integração de quase toda a Matemática estudada. Já falamos neste texto sobre funções(circulares) trigonométricas e funções hiperbólicas. E vimos certas aproximações/comparações entre elas. A integral acima motiva o estudo das chamadas *funções elípticas.* E sob um certo sentido, as funções circulares e as hiperbólicas são casos "degenerados" das funções elípticas. São mais exemplos típicos das "aproximações multifárias" na matemática.

Mas pensemos um pouco mais. Se ao longo da história dos últimos séculos, sem o auxílio dos computadores, matemáticos e físicos precisaram desenvolver as técnicas principais de desenvolvimento em séries de funções para atender às demandas da sociedade, imaginemos o quanto hoje é possível e necessário de ser feito com a mediação tecno-digital disponível.

Para uma introdução, bem didádica, sobre as *funções elípticas de Jacobi* consulte o texto do **Código QR**.

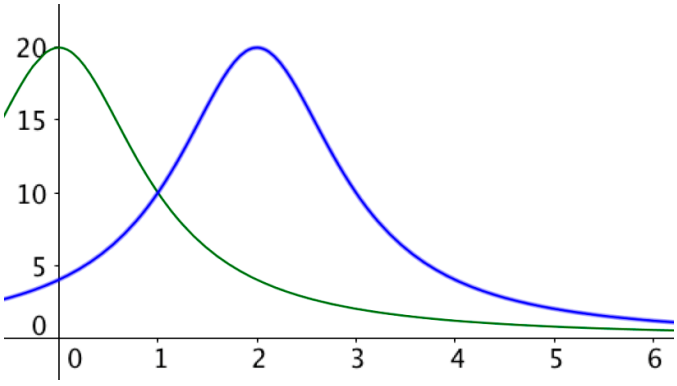
APROXIMAÇÃO POLIGONAL

Uma das maneiras de calcularmos a área aproximada de uma região sob o gráfico de uma função contínua, é através de uma *poligonal traçada com vértices na curva(gráfico*). Vamos analisar o problema apresentado a seguir.

Dois móveis se deslocam numa mesma trajetória retilínea, com velocidades que variam com o tempo (t) assim:

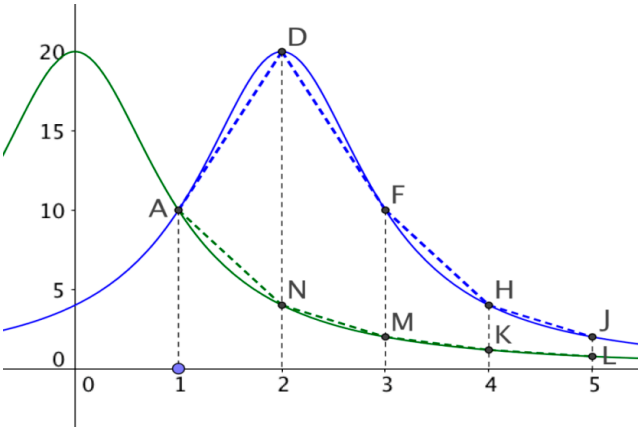
$$V_1 = 20/(1+t^2) \text{ e } V_2 = 20/(1+(t-2)^2) .$$

Seus gráficos estão esboçados a seguir.



Usando aproximação poligonal no intervalo [1, 5], dividindo-o em 4 subintervalos de medidas iguais, determine a distância aproximada entre os móveis no instante t = 5. Considere o tempo em minutos e a velocidade em kilômetro por minuto.

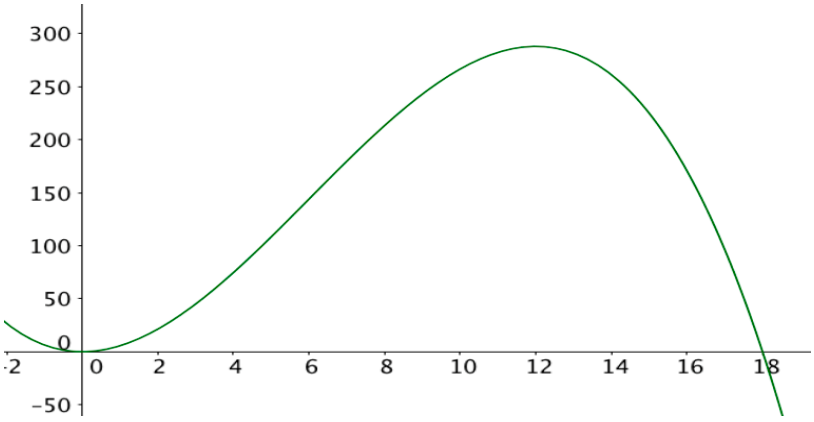
Observando a figura a seguir, identificamos as duas poligonais, uma em azul e outra em verde, bem como os trapézios determinados por elas. Se S_a e S_v são, respectivamente, a soma das áreas dos quatro trapézios correspondentes a cada uma dessas poligonais, então a área da região delimitada por ela e pelo segmento vertical JL é $S_a - S_v = 26{,}9$. Na verdade, por causa das unidades usadas, o valor é 26,9 km, que representa a distância entre os móveis no instante t = 5min.



O erro aproximado, cometido com essas medidas, em relação ao valor mais preciso de 28,9 km, feito com a integração, é de 6,9%. Observe que as funções $V_1 = 20/(1+t^2)$ e $V_2 = 20/(1+(t-2)^2)$ são variações da derivada da função f(t) = arctg(t). Ou seja, as primitivas de V_1 e V_2 são, respectivamente, $s_1(t) = 20arctg(t)$ e $s_2(t) = -20arctg(2-t)$. Neste problema, temos que usar a diferença $(s_2 - s_1)(t)$ para obter o resultado procurado. Pois o que buscamos, de fato, é a área da região entre os gráficos das duas funções , no intervalo [1, 5].

Por isso, o que foi feito aqui é uma aproximação do que os computadores fazem usando algoritmos baseados nos métodos mais precisos do cálculo integral para obter o resultado.

QP-1. [JNCF](**Valor Médio aproximado**). O gráfico cartesiano, esboçado a seguir, expressa a temperatura(em ºC) em função do tempo(em horas) de uma substância líquida, durante uma experiência em laboratório. A relação algébrica entre elas é dada por $T(t) = 6t^2 - t^3/3$. E o máximo da função ocorre em t = 12. Usando uma poligonal com vértices na curva, calcule o **valor médio aproximado** da temperatura, no intervalo [0, 18], dividindo-o em seis subintervalos de mesma medida. Verifique, usando primitiva de uma função potência, que o erro cometido com essa aproximação é menor do que 2,8%. Depois, represente, com uma única sentença, a função cujo gráfico é essa poligonal.



Obs.: Se f é uma função real contínua em um intervalo [a, b], com f(x) ≥ 0, e g é uma aproximação poligonal associada a uma partição de [a, b], então denominamos de *Valor Médio Aproximado* de f ao quociente S(x)/(b – a), em que S(x) é a área sob o gráfico de g no intervalo [a, b]. É claro, que o valor médio aproximado depende da partição associada.

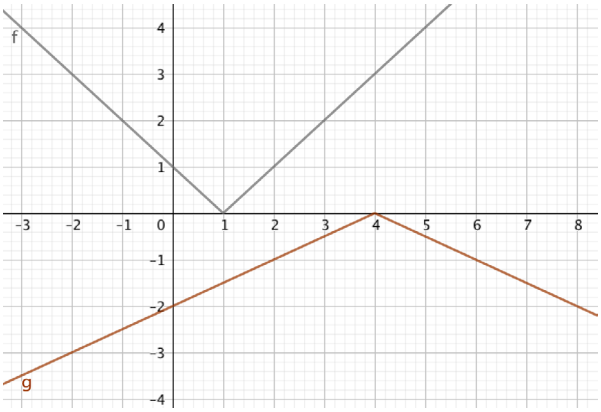
Funções Poligonais

Inicialmente, consideremos um intervalo fechado $[a,b]$ de *R.* Uma *partição* P de $[a,b]$ é um subconjunto de n + 1 pontos x_i de $[a,b]$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Isso significa que o intervalo $[a,b]$ foi decomposto em subintervalos da forma $[x_{i-1},\ x_i]$ tal que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$.

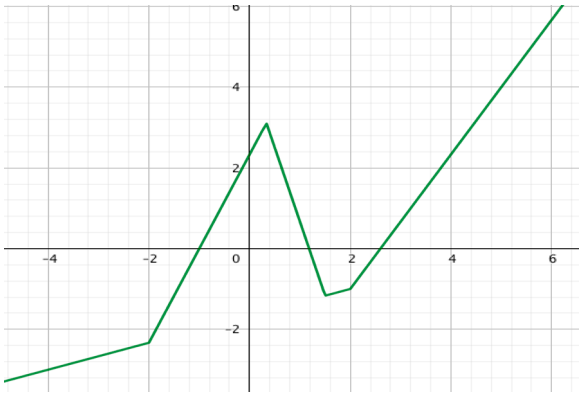
Seja $f: [a,b] \to R$ uma função contínua tal que se $x \in [x_{i-1},\ x_i]$, então f(x) = $a_i x + b_i$, para i $\in \{1, 2,\ \ldots, n\}$, em que a_i e b_i são constantes reais. Ou seja, o gráfico de f é uma linha poligonal formada pela união de segmentos(de retas) não verticais. Trata-se de uma função contínua e linear por partes. Uma função como essa é denominada de *função poligonal.* Também usamos essa denominação para os casos em que o domínio de f tem uma das formas: $(-\infty, b], [a, +\infty)$ ou R. Nesses casos teremos, no início ou no fim da poligonal, uma semirreta não vertical. A função poligonal mais simples é a função constante $f(x) = k$. Também são funções poligonais a função linear $f(x) = ax$ e a função afim $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$, ambas com domínio R ou um intervalo real não degenerado, isto é, de extremos distintos. No entanto, considerando a noção geométrica de linha poligonal aberta, podemos dizer que o modelo não linear mais simples de uma função poligonal é dado pela função modular $f(x) = |x|$, com domínio $[a,b]$, em que $a < 0 < b$. Seu gráfico tem a forma de um "V". Uma generalização dessa função é $f(x) = k + a|cx + d|$, sendo $k, a, c \neq 0$ e d constantes reais. Perceba que uma função poligonal f é completamente determinada pelas coordenadas de seus vértices, que são os pontos $(x_i, f(x_i))$. Evidentemente, podemos ampliar a generalização para uma combinação linear de *n* funções da forma $f_i(x) = |c_i x + d_i|$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, podemos afirmar que toda função poligonal f pode ser escrita na forma $f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{n} c_i |x - x_i|$, em que a, b e c_i são constantes reais, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vejamos a seguir, alguns exemplos de funções poligonais e seus respectivos gráficos, em intervalos limitados.

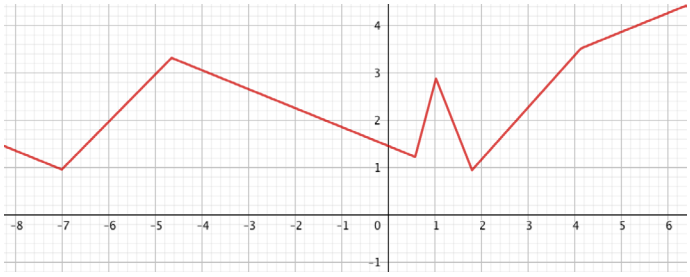
1) $f(x) = |x - 1|$ e g(x) = - $\left|\frac{1}{2}x - 2\right|$.



2) $f(x) = -3 + x + |x + 2| + |2x - 3| - |3x - 1| + \frac{2}{3}|x - 2|$.



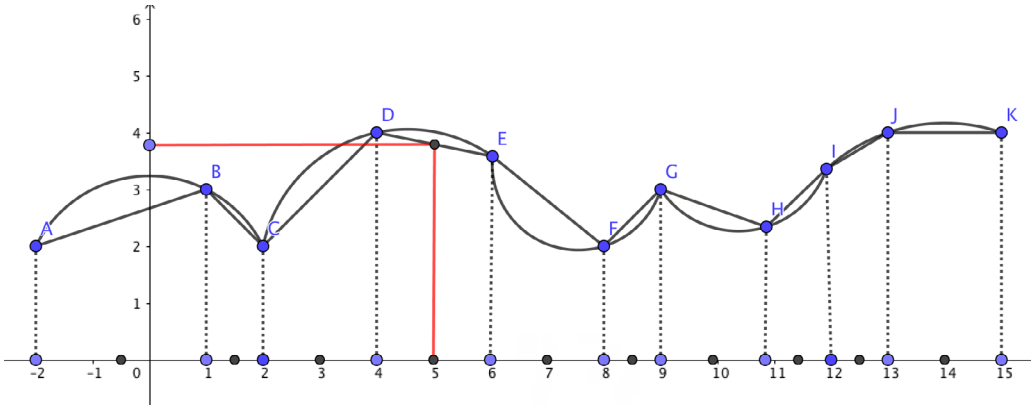
3) $h(x) = |1{,}8x - 3{,}25| - |0{,}7x + 3{,}25| + |0{,}7x + 4{,}9| - |3{,}1x - 3{,}2| + |2{,}05x - 1{,}2| - |0{,}35x - 1{,}45|$.



Aproximações por Funções Poligonais

As funções poligonais têm papel relevante no cálculo aproximado de áreas das regiões sob o gráfico de uma função contínua positiva f, definida num intervalo real $[a, b]$. Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição P desse intervalo. Então, temos a função poligonal g: $[a, b] \to R$, associada a essa partição P, tal que $g(x_i) = f(x_i)$. Uma soma de Riemann da função f, em relação a P e g, é $S_g = \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$, em que $\bar{x}_i$ é o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Perceba que $g(\bar{x}_i)$ é a média aritmética de $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$. Essa soma representa a área sob a linha poli-

gonal, gráfico de g, com vértices $(x_i, f(x_i))$. Esta área é uma aproximação da área S sob o gráfico de f ; e a função poligonal g é uma aproximação da função contínua f, conforme ilustrado na figura a seguir. Nela, os pontos pretos do eixo-x representam os pontos médios dos respectivos intervalos e a linha vermelha quebrada associa o ponto médio de [4, 6], que é 5, ao seu ponto imagem no eixo-y, passando pelo ponto médio do segmento DE da linha poligonal, gráfico de g.



Indicando por $|P|$ o maior valor dos Δx_i, percebemos que quando $|P|$ tende a 0, as somas de Riemann S_g tendem a S e a sequência de funções poligonais g convergem para a função contínua f. A convergência de S_g a S está de acordo com a nossa definição de integral de uma função limitada. Perceba que, para cada partição, podemos associar uma função escada, usando o ponto médio de cada subintervalo, de tal modo que o valor da integral dela seja igual ao da função poligonal correspondente. Por outro lado, a convergência da sequência de funções g para a função f é justificado no teorema apresentado a seguir.

Teorema da Aproximação Poligonal

Toda função contínua $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções poligonais.

Demonstração:

Como $[a,b]$ é fechado, então f tem continuidade uniforme. Logo, dado um $\varepsilon > 0$, arbitrariamente escolhido, podemos obter uma partição de $[a,b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ tal que } x, y \in [x_{i-1},\ x_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Por outro lado, para todo $x \in [a,b]$, existe um i tal que $x \in [x_{i-1},\ x_i]$.

Seja g: $[a,b] \to \boldsymbol{R}$ a função poligonal cujo gráfico tem os vértices nos pontos $(x_i,\ f(x_i))$.

Como $f(x) - g(x) = f(x) - f(x_i) + f(x_i) - g(x)$, então, pela desigualdade triangular, temos que $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)|$. (2)

Mas $|f(x_i) - g(x)| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, pois $g(x) \in [f(x_i), f(x_{i-1})]$ ou $g(x) \in [f(x_{i-1}), f(x_i)]$. Lembre-se que g é crescente, decrescente ou constante em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Combinando isso com (1) e (2), obtemos $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Colorário

"Todo polinômio real $p: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ *pode ser uniformemente aproximado por funções poligonais".*

TEOREMA DE APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS

Em relação à aproximação de funções contínuas por polinômios há um teorema muito importante denominado de Teorema de Aproximação de Weierstrass, que afirma o seguinte:

"Dados $\varepsilon > 0$ *e uma função contínua f, definida em um intervalo fechado D do eixo real, existe um polinômio p tal que* $|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$*, para todo x* $\in D$*."*

Um enunciado equivalente a esse é: **"***Toda função contínua* $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ *pode ser uniformemente aproximada por funções polinomiais."*

Uma variante desse teorema usa os chamados polinômios trigonométricos para aproximar funções periódicas contínuas. Seu enunciado é assim:

"Toda função contínua $f: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ *pode ser aproximada uniformemente por polinômios trigonométricos."*

No último capítulo falaremos um pouco sobre os polinômios trigonométricos e as séries de Fourier em Espaço de Hilbert.

Para provarmos o teorema de Aproximação de Weierstrass basta que provemos que a recíproca do corolário do teorema de Aproximação Poligonal é verdadeira. Vamos apresentá-la na forma de um teorema.

Teorema-W:

"Toda função poligonal pode ser uniformemente aproximada por polinômios".

Para demonstrar essa proposição, prova-se que a sequência de polinômios definida pela recorrência $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left[t - \left(P_n(t)\right)^2\right]$ converge uniformemente para a função $g(t) = g(t) + \frac{1}{2}\left[t - \left(g(t)\right)^2\right]$, com $0 \leq t \leq 1$. A prova disso você encontra na nota – w.

Disso segue que $g(t) = \sqrt{t}$ e, por consequência, $Q_n(t) = P_n(t^2)$ é uma sequência de polinômios que converge uniformemente para $\sqrt{t^2} = |t|$. Por outro lado, toda função poligonal $f: [a, b] \to R$ pode ser escrita na forma $f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{n} c_i |x - x_i|$, em que a, b e c_i são constantes reais, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Portanto, toda função poligonal f pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Combinando o teorema da Aproximação Poligonal com esse teorema-W, concluímos que **"***Toda função contínua* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *pode ser uniformemente aproximada por funções polinomiais",* que é o enunciado do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Demonstrações desse importante teorema de Weierstrass e de sua versão para polinômios trigonométricos se encontram em [Lima, 2005] e [Rudin, 1971]. Um outro caminho de demonstração desse teorema, que mostraremos no último capítulo, é através do teorema de Fejér sobre a convergência das séries de Fourier.

NOTA-W

Considere a função real f definida por $f(x)=x+\frac{t-x^2}{2}$, para $0\le x\le 1$ e $0\le t\le 1$. Disso vem que $f(0)=\frac{t}{2}$, $f'(x)=1-x\ge 0$ e $f(\sqrt{t}\,)=\sqrt{t}$. Logo f é crescente em [0, $\sqrt{t}$] e também bijetiva de [0, $\sqrt{t}$] em [t/2 , $\sqrt{t}$]. Disso segue que $0\le x\le\sqrt{t} => f(x)\le\sqrt{t}$. Como $P_{n+1}(t)=f(P_n(t))$, então $P_n(t)\le\sqrt{t}$, que implica $f\big(P_n(t)\big)\le f(\sqrt{t})$, que equivale a $P_{n+1}(t)\le\sqrt{t}$. Por sua vez, isso implica $(P_n(t))^2\le t$, que nos leva a $P_n(t)\le P_{n+1}(t)\le\sqrt{t}$, para todo $n\in N$ e $t\in[0,1]$.

Obs.: Perceba que $\lim_{n\to\infty}P_{n+1}(t)=\ g(t)=g(t)+\frac{t-[g(t)]^2}{2}$, para $0\le t\le 1$. Este resultado complementa a demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass. A convergência é uniforme por causa do Teorema de Dini, que afirma: *"Se a sequência de funções* $f_n: D\to R$ *converge monotonicamente para a função contínua* $f: D\to R$ *no conjunto compacto D, então a convergência é uniforme."*

QP-2.(IME-2021). Se A é a área da região *R* do plano cartesiano dada por

$R=\{(x,y)\in R^2;\ 2\le x\le 10\ e\ 0\le y\le \ln(x)\}$, então é correto afirmar que:

A) $A\le \ln(20^4)$.

B) $ln(ln(9!))\le ln(A)\le(2+ln(9!))$.

C) $A\ge ln(10!)-ln(2)$.

D) $\frac{1}{9!}\le e^{-A}<20^{-4}$.

E) $ln(10)-\ln(2)\le A\le 10\,ln(10)-2\,ln(2)-10$.

QP-3.(JNCF). Considere a função real $f(x) = senx$, definida no intervalo $[0, \pi]$. Faça uma partição regular de n + 1 pontos nesse intervalo. Trace a poligonal regular associada a essa partição com vértices no gráfico de f. Mostre que a área S_n sob o gráfico da poligonal e limitada pelo eixo-x é igual a $\frac{\pi}{n}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)$.

A seguir, usando o fato de que $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1$, conclua que a área sob o gráfico de f e limitada pelo eixo-x é igual a 2.

CARACTERÍSTICAS GERAIS DE UM POLINÔMIO

Um **polinômio** em x sobre um corpo K, significa uma expressão da forma f(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, com $a_{n \neq 0}$ e n ≥ 0, em que os $a_i \in$ K são os seus *coeficientes.* O inteiro $n \in N$ é chamado o *grau* de f(x), que indicamos por gr(f(x)). O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em K, munido das duas operações usuais, de adição e multiplicação, é indicado por K[x].

Dois polinômios são ditos *iguais* se eles têm o mesmo grau e se *os coeficientes* correspondentes são iguais. O símbolo x é denominado de *indeterminada.* Quando todos os coeficientes são nulos, ou seja, f(x) ≡ 0, ele é chamado *polinômio nulo*. Não se define grau do polinômio nulo. Quando n = 0, f é dito *constante.* Se a_n = 1, o polinômio é chamado *mônico.* Um polinômio não-nulo f(x) é dito *irredutível* em K[x] se gr(f(x)) > 0 e sempre que escrevemos f(x) como um produto f(x) = g(x)h(x), em que g(x),h(x) ∈ K[x], então, necessariamente, temos gr(g(x)) = 0 ou gr(h(x)) = 0. Um polinômio não constante que não é irredutível será chamado de *redutível.*

Um ponto a se salientar aqui é o seguinte: *os polinômios irredutíveis em K, dentro da sua estrutura algébrica usual, têm um papel muito semelhante ao dos números primos na estrutura algébrica usual de Z*. E, em virtude disso, podemos falar de congruência módulo p(x), de maneira análoga ao que fazemos com a aritmética modular em Z_n. Isso quer dizer, noutros termos, que construimos uma nova categoria de polinômios a partir dos restos da divisão dos polinômios originais pelo polinômio irredutível. Assim, podemos ter uma representação polinomial dos números complexos. Isso é precisamente feito com o *anel quociente* IR[X]/(x^2 + 1), isto é, com o conjunto dos polinômios, de coeficientes reais, módulo x^2 + 1, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Observe que $x^2 + 1$ é irredutível em IR[X], pois $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em IR. Mas em *C*[X], $x^2 + 1$ é redutível: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, em que $i = \sqrt{-1}$.

Há um teorema da Álgebra que afirma o seguinte: *Se p(x)* $\in K[X]$*, em que K é um corpo, é um polinômio irredutível, então K[X]/(p(x) é um corpo.* Como $x^2 + 1$ é irredutível em IR[X], então IR[X]/($x^2 + 1$) é um corpo. E esse corpo é uma representação do corpo *C dos números complexos.* Por outro lado, como o grau do resto é menor do que o grau do divisor ($x^2 + 1$), então todos os elementos desse corpo devem ter a forma de um polinômio constante ou do 1º grau, a + bx, que como classe de restos ou classe residual, de forma análoga ao que ocorre em Z_n, podem ser representados por $a + bx$ ou $a + bj$. Para maior aprofundamento consulte [Dean, 1974].

Podemos dizer, de forma resumida, que já trabalhamos com polinômios de coeficientes em Z, em Q, em IR e em *C.* Também podemos trabalhar com polinômios em Z_p e em outros anéis. De modo simplificado, o que ocorre é o seguinte: *os polinômios de K[X] "herdam" uma estrutura muito próxima daquela que possuem os elementos de K.* Discorremos sobre isso mais à frente.

Lembremos das formas que já vimos de representação do corpo dos Números Complexos: algébrica, pares ordenados, geométrica, vetorial, trigonométrica, exponencial, cis e matricial. Temos agora mais uma: **a polinomial**. Mas essa última, praticamente, se confunde com a algébrica, em virtude do que falamos anteriormente. Ou seja, não vale a pena trocar $a + bi$ *por* $a + bj$, é melhor confundir mesmo para simplificar as contas. Na verdade, ela ajuda a compreender e a justificar, de forma mais profunda, a própria forma algébrica. Com esse espírito de recordar tais formas diversas de representação de um número complexo, seja *z = (a, b) a representação por par ordenado de números reais de um número complexo qualquer.* Mostremos, pois, as outras formas de z:

- **Algébrica** → $z = a + bi$

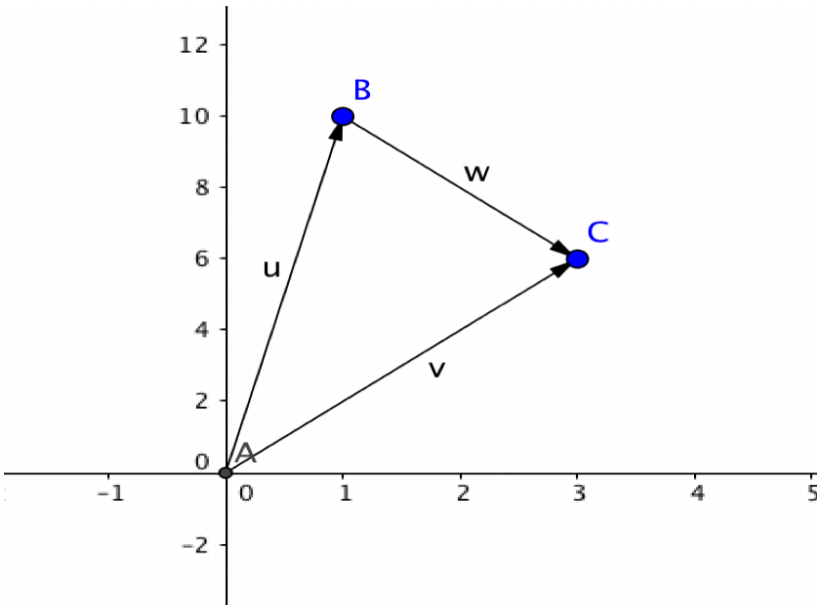
- **Trigonométrica** → $z =$ r(cosø + isenø), em que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, cosø = a/r e senø = b/r.

- **Exponencial** → $z = re^{i\phi}$

- **Forma cis** → *z = r.cis ø (uma simplificação da trigonométrica).*

- **Matricial** → $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Geométrica e vetorial** → Vide abaixo, no plano cartesiano complexo, o caso particular dos números complexos $z_1 = 1 + 10i$ e $z_2 = 3 + 6i$. O afixo de z_1 é o ponto B e o afixo de z_2 é o ponto C. Vetorialmente, z_1 e z_2 estão representados pelos vetores u = (1, 10) e v = (3, 6), respectivamente. Observe ainda que o vetor w = v - u = (2, - 4) representa o número complexo $z_2 - z_1 = 2 - 4i$.



ANEL OU DOMÍNIO DE INTEGRIDADE

A estrutura usual de Z, com as duas operações usuais de adição e multiplicação, é comumente denominada de **Anel**. Além disso, em Z a multiplicação é comutativa e tem elemento identidade 1 e vale a propriedade: se ab = 0, então a = 0 ou b = 0. Com o acréscimo dessas duas últimas propriedades, dizemos que Z assume a estrutura de um anel ou **Domínio de Integridade**. Como todo corpo possui estrutura algébrica análoga a essa de Z, então *todo corpo é um domínio de integridade*. Logo Q, R, Z_p e C são domínios de integridade. Também K[x] é um domínio de integridade. Mesmo quando K for apenas um domínio de integridade que não seja um corpo, como no caso de K = Z, K[x] ainda será um domínio de integridade. Quando no Domínio de Integridade vale o algoritmo Euclidiano da divisão dizemos que ele é um **Domínio Euclidiano**. Um resultado interessante é o seguinte: *se K é um corpo, então K[x] é um domínio Euclidiano*.

O que diferencia um corpo de um domínio de integridade? É que no corpo, os elementos não nulos formam um grupo multiplicativo e comutativo. *Por isso Z não é um corpo.* Mas é bom perceber que a *estrutura de domínio de integridade é uma boa aproximação da estrutura de um corpo*. Tanto é assim, que *todo domínio de integridade finito é um corpo*. São exemplos disso os corpos Z_p, em que *p* é primo. Recordemos aqui da definição de corpo:

Um conjunto não-vazio K é um **corpo** se nele temos definidas uma adição e uma multiplicação que satisfazem, para quaisquer elementos a,b,c ∈ K:

Propriedades da adição:

I) Associativa: (a + b) + c = a + (b + c);

II) Comutativa: a + b = b + a;

III) Existe um elemento neutro: que será denotado por 0 e é tal que a + 0 = a;

IV) Existem simétricos ou inversos aditivos: o inverso aditivo de a é x ∈ K tal que a + x = 0 (x é denotado por −a, ou seja, −a ∈ K e a + (−a) = 0).

Propriedades da multiplicação:

V) Associativa: (a·b)·c = a·(b·c);

VI) Comutativa: a·b = b·a;

VII) Existe um elemento unidade, denotado por 1 e é tal que 1 · a = a;

VIII) Distributiva da multiplicação com relação à adição: a·(b + c) = a·b + a·c;

IX) Existe o inverso multiplicativo y ∈ K de todo a $\neq 0$, tal que a·y = 1, que é denotado por y = a^{-1} = 1/a ∈ K.

O Domínio de Integridade possui as oito primeiras propriedades da definição de corpo, só não tem a última(ix).

Afirmamos anteriormente, que *todo domínio de integridade finito é um corpo.* Para provar isso precisamos, apenas, mostrar que todo elemento não nulo dele tem um inverso. Seja *b* um elemento não nulo desse domínio finito. Então $b, b^2, b^3, ..., b^n, ...$ não podem ser todos distintos. Logo, existem *r* e *s*, com $r < s$, tais que $b^r = b^s$. Disso segue $b^r = b^r . b^{s-r}$, que implica $b^r(1 – b^{s-r}) = 0$. Mas $b \neq 0$, então $1 = b^{s-r}$. E como $s – r \geq 1$, temos que $b.b^{s-r-1} = 1$, com $s – r – 1 \geq 0$. Portanto, $b^{-1} = b^{(s-r)-1}$.

Existem conjuntos de números que têm a estrutura de anel mas não têm o elemento identidade. É o caso do conjunto dos números pares, munido das mesmas operações de Z. Também temos exemplo de *anel não comutativo*, no qual não vale a propriedade comutativa da multiplicação. Um exemplo, bem simples, é o conjunto M das matrizes 2 X 2, munido das operações usuais de adição e multiplicação. Verifique que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ satisfazem A.B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

mas A e B são diferentes da matriz nula. Além disso A.B ≠ B.A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Como recordamos antes, os elementos do corpo dos números complexos C têm representação matricial da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \in IR$. Portanto, o conjunto dessas matrizes, munido das operações usuais de adição e multiplicação, formam um corpo também. E, por conseguinte, ele é também um domínio de integridade. **São coisas assim que nos deixam maravilhados com a Matemática!**

NOTA:

Se K é infinito, então os conceitos de *polinômio e de função polinomial* são equivalentes. Como trabalhamos, normalmente, em Z, Q, R ou C, isso portanto pode ser feito sem problemas. Algumas questões mais à frente mostrarão isso com maior clareza.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Na tese de doutorado de Gauss, publicada em 1799 em Helmstadt, encontra-se uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Esse teorema garante que toda equação polinomial de grau n admite n raízes complexas e, em sua demonstração, Gauss utilizou números complexos e a geometria do plano complexo com total segurança, além de inaugurar a era das demonstrações de existência, importante para a Matemática pura. A demonstração apresentada em sua tese baseia-se em parte em considerações geométricas. Em 1816, Gauss publicou duas demonstrações e, em 1850, publicou uma terceira, esforçando-se para encontrar uma prova inteiramente algébrica. Para maiores informações históricas sobre isso consulte no **Código QR**.

Obs.: Em nossa opinião, a beleza, decorrente dessa dificuldade sentida pelo genial Gauss, e por muitos que lhe seguiram, está em perceber o sentido integrador da Matemática! Isso se relaciona com o que chamamos de Princípio Holístico de Pascal Aproximado de que falamos na introdução deste nosso livro.

Para demonstrarmos, de forma mais compreensiva, o Teorema Fundamental da Álgebra, vamos recordar alguns conceitos e propriedades que são análogas às que apresentamos antes no tópico sobre Espaços Vetoriais e Funções.

Dada uma função f: D $\subset C \to C$, em que D é um conjunto aberto em *C, dizemos que f é contínua em* $z_0 \in C$ *se, e somente se para toda sequência* (z_n) *de pontos de D, tal que lim* $z_n = z_0$*, temos que lim* $f(z_n) = f(z_0)$. Sabemos que *C* é um espaço métrico. Logo, conforme apresentamos no capítulo 3, valem as propriedades das funções contínuas: a soma, o produto e a

composição de funções contínuas são contínuas. Como a função constante e a função identidade, f(z) = c e f(z) = z, são claramente contínuas em C, então toda função polinomial $f: C \to C; f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_0$ é contínua em *C*, bem como a função $|f|(z) = |f(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_0|$, definida de *C* em *R*.

A continuidade dessa última decorre da continuidade de f e da desigualdade triangular na forma $|u + v| \geq \big||u| - |v|\big|$ que implica $|u - v| \geq \big||u| - |v|\big|$. Basta perceber que

$$|f(z) - f(z_0)| \geq \big||f(z)| - |f(z_0)|\big|.$$

No caso da função $|f|$, é relevante colocar que vale a propriedade(Teorema de Weierstrass) análoga às das funções contínuas de D $\subset$ R^n em R: *em um conjunto compacto, como um retângulo fechado [x_1, x_2] X [y_1, y_2], uma função contínua atinge valor máximo e valor mínimo*. No capítulo 3, demonstramos esse teorema. Estamos com essas explicações, justificando, embora simplificadamente, a parte inicial da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra(TFA), em que admitimos a continuidade de $|f|$ e usamos o teorema de Weierstrass.

Usaremos na demonstração do TFA a fórmula de Moivre para o caso já estudado da equação $z^n = b$, em que b é um número complexo. Vimos que toda equação desse tipo tem *n* raízes complexas. Essa afirmação é um caso especial do teorema fundamental da álgebra para os polinômios da forma $f(z) = z^n + a_0$. Pois se n ≥ 1, esse tipo de polinômio tem ao menos uma raiz. Além disso, temos a aproximação desse polinômio para um mais simples, $f(z) = z^n - 1$, através da propriedade:

"As raízes enésimas de um z qualquer de C podem ser obtidas multiplicando uma raiz enésima qualquer fixada de z pelas raízes enésimas da unidade."

Aliás, depois de ver e compreender as partes da demonstração, é importante rever a anatomia da demonstração, em seu todo. Aí você poderá perceber que quase tudo que foi feito no desenvolvimento dela, caminhou por aproximações sucessivas no rumo desse polinômio especial.

Também, precisaremos aplicar, além da desigualdade triangular, uma consequência dela: $|u + v| \geq \big||u| - |v|\big|$. Para provar essa, basta usar $u = -v + (u + v)$ e $v = -u + (v + u)$.

Teorema Fundamental da Álgebra:

Seja $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0$, *com n ≥ 1, um polinômio de C[x].*

Então, existe um número $z_0 \in C$ *tal que* $f(z_0) = 0$.

Demonstração(adaptada de [Spivak, 1994]):

Vamos dividir a demonstração em duas partes.

Na *primeira parte* mostraremos que a função

$|f|(z) = |f(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0|$, definida de C em R, tem um valor mínimo em C.

E na *segunda parte* provaremos, por redução ao absurdo, que esse valor mínimo é 0. Admitiremos, inicialmente, o resultado comentado antes: *A função* $|f|$ *é contínua em todo o C.*

Primeira parte:

Para $z \neq 0$, podemos colocar *f(z)* assim:

$f(z) = z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)$, de modo que $|f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right|$. (*)

Seja $M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$.

Então, para todo *z*, com $|z| \geq M$, temos $|z^k| \geq |z| \Rightarrow \frac{1}{|z^k|} \leq \frac{1}{|z|}$ e

$\frac{|a_{n-k}|}{|z^k|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{|z|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n}$, que combinado com a *desigualdade triangular* implica

$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{1}{2}$, da qual segue $-\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2}$.

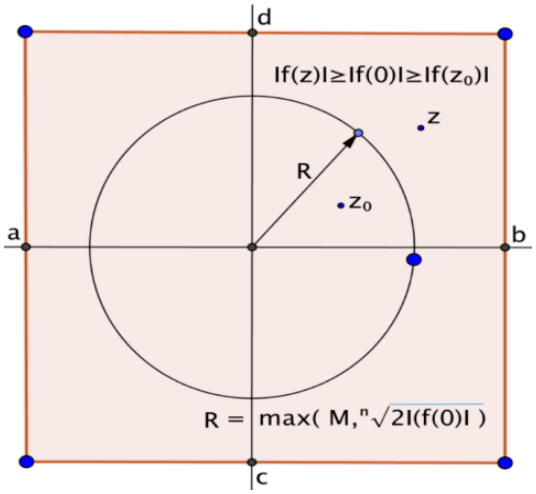
Combinando isso com a desigualdade $|u + v| \geq \big||u| - |v|\big|$, obtemos:

$$\left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq 1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Combinando (1) com (*) temos que $|f(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$, para $|z| \geq M$.

Em particular, se $|z| \geq M$ e $|z| \geq \sqrt[n]{2|f(0)|}$, então $|f(z)| \geq |f(0)|$. (2)

Agora, consideremos um retângulo fechado [a, b] X [c, d] que contém o disco D = { z: $|z| \leq max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|})$}, de raio R = $max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}$, como mostrado na figura a seguir.



Como $|f|$ é contínua em todo o *C,* então $|f|$ tem máximo e mínimo nesse retângulo fechado. *Suponhamos que z_0 seja o mínimo de $|f|$ nesse retângulo.* Então, temos que

(3) $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para z em [a, b] X [c, d].

E como por (2) $|f(z)| \geq |f(0)|$, então $|f(z_0)| \leq |f(0)|$. Assim, podemos afirmar que

(4) se $|z| \geq$ R, então $|f(z)| \geq |f(0)| \geq |f(z_0)|$.

Combinando (2), (3) e (4), concluímos que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in C$, de modo que $|f|$ atinge, em z_0, seu valor mínimo sobre todo o plano complexo C. *Ou seja $|f(z_0)|$ é o mínimo de $|f(z)|$*. Assim, concluímos a primeira parte da demonstração.

Segunda parte:

Falta provar que $f(z_0) = 0$. Provemos, pois.

Seja *g* uma função definida por $g(z) = f(z + z_0)$. Então *g* é uma função polinomial de grau *n,* cujo valor absoluto mínimo ocorre em 0. Provaremos, por redução ao absurdo, que *g(0) = 0,* isto é, $f(z_0) = 0$.

Suponhamos que *g(0)* = $\alpha \neq 0$. Se *m* é o menor expoente de *z* que aparece na expressão polinomial de *g*, então podemos escrever

$$g(z) = \alpha + \beta z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots + c_n z^m ,$$

em que $\beta \neq 0$. Mas isso, em virtude da *fórmula de Moivre*, implica a existência de um número complexo γ tal que

$\gamma^m = -\frac{\alpha}{\beta}$. Disso segue $\beta\gamma^m = -\alpha$.

Pondo $d_k = c_k \gamma^k$, obtemos

$$\begin{aligned} |g(\gamma z)| &= \left|\alpha + \beta\gamma^m z^m + d_{m+1} z^{m+1} + \ldots + d_n z^n\right| \\ &= \left|\alpha - \alpha z^m + d_{m+1} z^{m+1} + \ldots\right| \\ &= \left|\alpha\left(1 - z^m + \frac{d_{m+1}}{\alpha} z^{m+1} + \ldots\right)\right| \\ &= \left|\alpha\left(1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right]\right)\right| \end{aligned}$$

$$= |\alpha|.|1 - z^m + z^m[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \cdots]|$$

Essa expressão está se aproximando de uma contradição. Verifique primeiro que, escolhendo $|z|$ suficientemente pequeno, temos que

$$\left|\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right| < 1.$$

Se escolhemos, entre todos os *z* para os quais essa desigualdade é válida, algum *z* que seja *real e positivo*, então

$$\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right]\right| < |z^m| = z^m.$$

Em consequência, se 0 < *z* < 1 temos pela *desigualdade triangular* que

$$\left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right]\right| \leq \left|1 - z^m\right| + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right]\right|$$

$$= 1 - z^m + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha} z + \ldots\right]\right|$$

$$< 1 - z^m + z^m = 1.$$

Logo, $|g(\gamma z)| = |\alpha|.|1 - z^m + z^m[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots]| < |\alpha|$, o que é um absurdo, pois $|\alpha|$ é um mínimo de $|g|$ sobre todo o *C*. Portanto, a suposição inicial é incorreta e *g(0) = 0.* E isso implica que $f(z_0) = 0$, o que conclui a demonstração.

PROPRIEDADES RELEVANTES DOS POLINÔMIOS

1) **(Teorema do Resto)**. Seja A um anel comutativo com identidade. Se f é um polinômio qualquer de A[x], então temos, para todos os polinômios $(x - a)$ de A[x], que $f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$.

2) **(Teorema da Raiz)**. Se K é um corpo, o polinômio $f \in K[x]$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se a é uma raiz de f.

3) **(Fatoração em C)**.Todo polinômio $p(x) \in C[x]$ de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado na forma $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, onde $a \in C$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são raízes complexas de $p(x)$, eventualmente, repetidas. Além disso, essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

4) **(Existência da Fatoração em K)** Se K é um corpo, então todo polinômio em K[x], de grau ≥ 1, é irredutível ou se escreve como um produto(finito) de polinômios irredutíveis sobre K.

5) **(Raízes Conjugadas)**. Se $z \in C$ é uma raiz de um polinômio qualquer *p(x)* de coeficientes reais, então $\bar{z}$ é também uma raiz de *p(x).*

6) **(Grau Ímpar)**. Um polinômio de coeficientes reais, com grau ímpar, tem sempre uma raiz real.

7) **(Raízes Racionais)**. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, um polinômio de Z[x], com grau $n \geq 1$. Se p/q, com (p, q) = 1, é uma raiz racional de $f(x)$, então p divide a_0 e q divide a_n.

8) **(Divisão Euclidiana)**. *Seja K um corpo. Sejam a e b elementos de K[x]. Se $b \neq 0$, então, existem polinômios únicos q e r em K[x], tais que*

   1) a = bq + r

   2) r = 0 ou gr(r) < gr(b).

9) **(Máximo Divisor Comum)**. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios não nulos de K[x]. Então, o polinômio mônico de menor grau $d(x) = q(x).f(x) + p(x).g(x)$, com $q(x)$e $p(x)$ em K[x], é o mdc de $f(x)$ e $g(x)$.

10) **(Relações de Girard)**. Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes de um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 \text{ de } C[x].$$

Então,

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n) = a_n x^n - a_n(r_1+r_2++\cdots+r_n)\,x^{n-1} + a_n(r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n)x^{n-2} - a_n(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4\dots+r_{n-2}r_{n-1}r_n)x^{n-3}+\cdots + (-1)^h a_n S_h x^{n-h}+\cdots+(-1)^n a_n(r_1r_2r_3\dots r_n), \forall x$$

e por identidade de polinômios vem

$$S_1 = r_1+r_2++\cdots+r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$S_2 = r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$S_3 = r_1r_2r_3+r_1r_2r_4\dots+r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

...

S_h = (*Soma de todos os* $C_{n,h}$ *produtos de h raízes da equação)* = $(-1)^h\frac{a_{n-h}}{a_n}$ *e*

$$S_n = r_1r_2r_3\dots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

11) (Fórmula de interpolação de Lagrange). Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são *n* elementos distintos de um corpo K e se $b_1, b_2, \dots, b_n$ são quaisquer *n* elementos de K, existe um único polinômio *f* em K[x] tal que *f*(a_i) = b_i para i = 1, 2, ..., n e tal que grau (*f*) ≤ *n -1.* E *f* tem a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}.$$

Obs.: A prova da unicidade é simples. Suponhamos que existam dois polinômios, p e q, satisfazendo às condições requeridas. Então, f = p – q tem n raízes, que são $a_1, a_2, \dots, a_n$. Mas f tem grau(f) ≤ n - 1, logo, f é o polinômio nulo. Observe que f(a_i) = p(a_i) – q(a_i) = $b_i - b_i$ = 0, para 1 ≤ i ≤ n.

12) (Critérios de Irredutibilidade).

(i) Se o grau de um polinômio P(x) sobre um corpo K é 2 ou 3, então ou P(x) é irredutível sobre K ou tem uma raiz, pelo menos, em K.

(ii) Um polinômio P(x) $\in R[x]$ é irredutível sobre R se, e somente se, seu grau for 1 ou 2 com discriminante negativo.

(iii) **(Critério de Eisenstein)** Se P(x) $\in Z[x]$ e existe um número primo p tal que p $\nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$ e p / a_k, k = 0,1, ..., n - 1, então P(x) é irredutível em $Z[x]$.

13) (Teorema de Bolzano). Seja P(x) um polinômio de coeficientes reais. Se a < b, então, no intervalo aberto (a, b), P(x)

I) tem um número par de raízes reais, quando P(a).P(b) > 0;

II) tem um número ímpar de raízes reais, quando P(a).P(b) < 0.

14) (Raiz Múltipla). Um elemento *a* ∈ K é uma raiz múltipla de f(x) ∈ K[x] se, e somente se, *a* é raiz de f(x) e de sua derivada $f'(x)$.

15) (Máximos e Mínimos locais). Seja *f* uma função polinomial real definida num intervalo (*a*, *b*). Se *c* é um ponto crítico de *f* neste intervalo, isto é, *f* '(*c*) = 0, com *a* < *c* < *b*, então:

I) Se *f* "(*c*) < 0, *f* tem um valor máximo local em *c*.

II) Se *f* "(*c*) > 0, *f* tem um valor mínimo local em *c*.

NOTA-1:

Dizemos que uma função f tem um valor **mínimo local** em c se existe um intevalo (a_1, b_1), com $a_1 < c < b_1$, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (a_1, b_1)$. De modo análogo, dizemos que f tem um valor **máximo local** em c se existe um intervalo (a_1, b_1), com $a_1 < c < b_1$, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (a_1, b_1)$.

Seja *f*(x) um polinômio de *C*[x]. Se b é uma raiz de *f(x)*, $(x - b)^k$ divide *f(x)* e $(x - b)^{k+1}$ não divide *f(x),* então dizemos que b é uma raiz de **multiplicidade** k. Quando k = 1, chamamos b de raiz *simples* de *f(x).*

NOTA-2:

Vale a pena comparar a propriedade-4 anterior com o Teorema Fundamental da Aritmética. Perceba que a fatoração de um polinômio P(x) como um produto de polinômios irredutíveis é muito parecida ou tem muita "aproximação" com a fatoração de um inteiro como um produto de fatores primos. Vamos agora demonstrar essa propriedade usando o princípio da indução finita.

A) Seja P(x) = ax + b um polinômio de grau 1 de K[x]. Então gr(P) = 1 > 0. Se P(x) = f(x).g(x), então 1 = gr(f) + gr(g) . Logo gr(f) = 0 ou gr(g) = 0, o que implica P(x) ser irredutível sobre K.

B) Seja P(x) um polinômio de grau n. Suponhamos que a propriedade seja válida para polinômios de grau menor do que n. Se P(x) for irredutível, nada mais temos a fazer. Consideremos P(x) redutível. Então, existem polinômios f(x) e g(x) de K[x] tais que P(x) = f(x).g(x), com gr(f) > 0 e gr(g) > 0. Como gr(P) = gr(f) + gr(g) e gr(P) = n, então temos que gr(f) < n e gr(g) < n. E pela hipótese de indução, f(x) e g(x) se escrevem como produto finito de polinômios irredutíveis ou são irredutíveis. Portanto, P(x) pode também ser escrito como um produto finito de polinômios irredutíveis.

NOTA-3:

Afirmamos, anteriormente, no comentário sobre anel, que K[x] é um **domínio de integridade**. Isso implica dizer que K[x] tem a propriedade especial: "*Sejam p(x), f(x) e g(x) polinômios de K[x], com p(x) irredutível. Se p(x) divide f(x).g(x), então p(x) divide f(x) ou p(x) divide g(x).*"

Para provar essa propriedade, suponhamos que p(x) divide f(x).g(x) e não divide f(x). Então, f(x) e p(x) são primos, o que significa mdc(f, p) = 1. Disso segue que existem polinômios m(x) e n(x) de K[x] que satisfazem a condição m(x)f(x) + n(x)p(x) = 1. Multiplicando essa igualdade por g(x), obtemos: g(x)m(x)f(x) + g(x)n(x)p(x) = g(x). Como p(x) divide f(x).g(x) e também p(x), concluímos que p(x) divide g(x).

NOTA-4:

Provemos a propriedade 14:

Um elemento a ∈ K é uma raiz múltipla de f(x) ∈ K[x] se, e somente se, a é raiz de f(x) e de sua derivada $f'(x)$.

Seja a ∈ K uma raiz de f(x) de multiplicidade m ≥ 2. Então, temos f(x) = $(x - a)^m g(x)$, onde g(x) ∈ K[x]. Assim, $f'(x) = m(x - a)^{m-1} g(x) + (x - a)^m g'(x)$, com m – 1 ≥ 1, e portanto, $f'(a) = 0$, ou seja, a é raiz de $f'(x)$.

Para provar a recíproca, seja a ∈ K uma raiz de f(x) e de sua derivada $f'(x)$. Deste modo, f(x) = (x – a)q(x), onde q(x) ∈ K[x] e temos:

$F'(x) = q(x) + (x - a)\, q'(x) \Rightarrow f'(a) = q(a) + (a - a)\, q'(a)$ e então q(a) = 0.

Logo, a é raiz de q(x) e portanto, x – a divide q(x). Com isso, f(x) = (x – a) q(x) = $(x - a)^2 h(x)$, com h(x) ∈ K[x].

Desse modo, a é raiz múltipla de f(x).

NOTA-5 (Funções em corpos finitos)

Provamos anteriormente, que todo anel(domínio) de integridade finito é um corpo. Pelo teorema de interpolação de Lagrange temos um único polinômio de grau máximo n – 1, com coeficientes em um corpo K, que passa por n pontos $(a_i,\ b_i)$ de abcissas(a_i) distintas. Sendo assim, se definirmos uma função em um corpo finito K, obrigatoriamente, ela terá uma expressão polinomial dada pela fórmula de Lagrange. Concluímos, portanto, que **toda função definida em um corpo finito é polinomial**. Isso revela a importância dos polinômios em praticamente todos os ramos da Matemática, incluindo os relacionados com corpos infinitos. Lembre-se, por exemplo, da aproximação uniforme por polinômios de toda função contínua em R, das séries de potências e das funções analíticas.

QP-4. (**IME-2014/2015 - Adaptada**). Qual o resto da divisão do polinômio

$x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

QP-5. (**AIME-1986**). O polinômio $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{16} - x^{17}$ pode ser escrito na forma $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_{16} y^{16} + a_{17} y^{17}$, em que $y = x + 1$ e os a_is são constantes. Achar o valor de a_2.

NOTA (Algébrico ou Transcendente)

Um número real é *algébrico* se ele é raiz de algum polinômio de Z[x]. Caso contrário, ele é *transcendente.* Observe que todo número racional é algébrico, pois é raiz de uma equação qx - p = 0. Em consequência, todo número real não algébrico é irracional e portanto, todo número transcendente é irracional. Se um número complexo é raiz de algum polinômio de Z[x] então ele é algébrico também. O conjunto dos números algébricos é enumerável. Prove isso usando a nota sobre conjuntos enumeráveis do capítulo 1.

QP-6. Prove, usando identidades trigonométricas e propriedades dos polinômios, que os números apresentados a seguir, são irracionais.

A) sen 10º. **B)** sen 20º. **C)** cos 40º. **D)** cos 10º. **E)** cos 12º.

QP-7. (**Putnam-1939**). Seja $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ de coeficientes inteiros e raízes r, s, t. Achar uma equação de coeficientes inteiros escrita em termos de a, b, c, d cujas raízes sejam r^3, s^3, t^3.

QP-8. (**JNCF**). Encontrar a função polinomial cúbica f : R → R cujo gráfico cartesiano contém os pontos (0,1), (1, - 2), (3, 2) e (5, 4).

QP-9. (ITA-2002). Seja a equação em C, $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas a seguir é igual à soma de duas raízes dessa equação?

A) $2\sqrt{3}$. **B)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C)** $+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D)** $-i$. **E)** $\frac{i}{2}$.

QP-10. (**IME-2014**).O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

QP-11. (**Olimpíada de Matemática da China ocidental - 2002**). Considere um quadrado no plano complexo. Os números complexos correspondentes aos seus quatro vértices são as quatro raízes de alguma equação do quarto grau com uma incógnita e coeficientes inteiros

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Achar o valor mínimo da área de tal quadrado.

QP-12. Mostre que se n é um número par, então o polinômio

$f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ não possui raiz real.

QP-13. Mostrar que o polinômio $p(x) = x^3 + x + 1$ é irredutível sobre Q e que o polinômio $f(x) = x^2 + x + 1$ é irredutível em R.

QP-14. Fatore o polinômio $f(x) = 2x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 5$, a menos do fator 2, como um produto de polinômios mônicos e irredutíveis sobre os corpos Q, R e C.

▶ **Resp**.: *Em* Q[x]: $f(x) = 2(x^2 - \frac{5}{2})(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Em R[x]: $f(x) = 2(x - \sqrt{\frac{5}{2}})\,(x - \sqrt{\frac{5}{2}})\,(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)$.

Em C[x]: $f(x) = 2(x - \sqrt{\frac{5}{2}})\,(x - \sqrt{\frac{5}{2}})\,(x-1)\,(x+1)\,(x+i)\,(x-i)$.

QP-15. **(ITA-2010).** Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in IR$, admite a raiz -i. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro raízes são imaginárias puras;

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois;

III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é(são) verdadeira(s) apenas

A) I. **B)** II. **C)** III. **D)** I e III. **E)** II e III.

QP-16. (ITA-2011). Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

A) todas as raízes estão em Q.

B) uma única raiz está em Z e as demais estão em Q - Z.

C) duas raízes estão em Q e as demais têm parte imaginária não nula.

D) não é divisível por 2x - 1.

E) uma única raiz está em Q - Z e pelo menos uma das demais está em R - Q.

▶ **Resp.:** (**E**).

QP-17. (ITA-2011). Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que *x = 0* é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

A) a soma de todas as raízes é 5.

B) o produto de todas as raizes é 21.

C) a única raiz real é maior que zero.

D) a soma das raízes não reais é 10.

E) todas as raízes são reais.

▶ **Resp.:** (**A**)

QP-18. (ITA-2012). As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio

$p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0.$$

Então, o coeficiente a é igual a

A) $2(1 - \sqrt{2})$. **D)** $4 + \sqrt{2}$.

B) $2(2 + \sqrt{2})$. **E)** $\sqrt{2} - 4$.

C) $4(\sqrt{2} - 1)$.

▶ **Resp.:** (**C**)

QP-19. (**IME-2000/2001**). Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2, -11)$, $P_2(-1, 0)$, $P_3(1, 4)$ e $P_4(2, 9)$.

A) Determine os coeficientes do polinômio.

B) Calcule todas as raízes do polinômio.

QP-20. Considere F o corpo $Z_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ e o polinômio $f(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x$ em F[x]. Mostre que a função polinomial associada a f(x) é a função nula, enquanto que o polinômio não é nulo.

QP-21. Prove: Se p é um número primo, o polinômio $f(x) = x^3 - 2px + p^3$ é irredutível sobre Q.

QP-22. (**IME-1975/1976**). Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x - 1)^2$.

▶ **Resp.:** p = - 6 e q = 1.

QP-23. (**IME-1975/1976**).

A) Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, determine a relação entre seus coeficientes para que a soma de duas raízes seja igual à soma das outras duas.

B) Encontre as raízes da equação $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$, sabendo que seus coeficientes satisfazem as relações do item anterior.

▶ **Resp.:** (**A**) $8c = 4ab - a^3$; (**B**) $\{\frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\}$.

QP-24. (**ITA-2009**). O polinômio de grau

$$4(a + 2b + \mathbf{C})x^4 + (a + b + \mathbf{C})x^3 - (a - \mathbf{B})x^2 + (2a - b + \mathbf{C})x + 2(a + \mathbf{C}),$$

com a, b, c $\in R$ é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A) $3+\sqrt{3}$. **D)** $1+2\sqrt{2}$.

B) $2 + 3\sqrt{3}$. **E)** $2+2\sqrt{2}$.

C) $2+\sqrt{2}$.

QP-25. Use a série binômia para obter o desenvolvimento em série de potências da função real $f(x) = arc\ sen\ x$, para $-1 < x < 1$.

QP-26. (**IME-1983/1984**). Determine o polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, tal que

$$p(x) = p(1 - x),\ p(0) = 0 \text{ e } p(-1) = 6.$$

▶ **Resp.:** $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$.

QP-27. (**IME-1985/1986**). Sabendo-se que x é um número real, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq arc\cos x \leq \pi$ e *n* é um número inteiro positivo, mostre que a expressão $f_n(x) = \cos(n\ arc\cos x)$ pode ser desenvolvida como um polinômio em x, de grau *n*, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

QP-28. (**IME-1987/1988**).

A) Mostre que se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$, então existe um polinômio $g(x)$ do 2º grau, tal que $p(x) = x^2g(x + x^{-1})$.

B) Determine todas as raízes do polinômio $p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

QP-29. Resolva o sistema de equações

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n,\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n, \ldots, x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n.$$

QP-30. (**Equação recíproca**). Uma equação polinomial

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0, \text{ com } a_n \neq 0,$$

É denominada de *recíproca* se satisfaz à propriedade: *se b é uma raiz dela, então 1/b também o é*. Decorrente dessa propriedade, temos outra: os coeficientes equidistantes dos extremos da equação são iguais ou opostos. Por isso elas se classificam de *primeira espécie* no 1º caso e de *segunda espécie* no 2º caso. Na resolução de uma equação desse tipo, devemos testar se 1 e -1 são raízes dela. Depois fazemos as divisões euclidianas necessárias para reduzir o grau da equação e *recair em uma equação de 1ª espécie e de grau par*, caso ainda ela não seja. Em seguida, dividimos os termos por uma potência de x, de modo a usar a transformação y = x + 1/x. Normalmente, se n = 2p, então se divide por x^p. Com essas informações resolva a seguinte equação recíproca:

$$x^6 - \frac{5}{2}x^5 + x^4 - x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0\,.$$

POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Denominamos de *Polinômios Simétricos* nas indeterminadas ou variáveis x_1, x_2, ..., x_n, aos polinômios P tais que P(x_1, x_2, ..., x_n) não altera seu valor quando permutamos a ordem de suas variáveis.

Por exemplo: P(x, y, z) = $x^4 + y^4 + z^4$ é simétrico, pois P(y, z, x) = P(z, y, x) = P(x, y, z). Os polinômios simétricos que aparecem nas relações de Girard, mostradas acima, como as somas S_k, são os *polinômios simétricos elementares.* Eles, usualmente, são indicados por $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Ou seja, $\sigma_1 = S_1, \sigma_2 = S_2, \ldots, \sigma_n = S_n$. No caso de 3 variáveis x, y, z, temos: $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ *e* $\sigma_3 = xyz$. Uma propriedade interessante dos polinômios simétricos é a seguinte: *Todo polinômio simétrico P(x_1, x_2, ..., x_n) é um polinômio P($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$).* Por exemplo, o polinômio simétrico P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 pode ser representado por P($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) = ${\sigma_1}^3$ - $3\sigma_1\sigma_2$ + $3\sigma_3$. Verifique. Reveja, no Capítulo 1, o resultado (1) ao final da lista de produtos notáveis.

A demonstração do teorema "*Todo polinômio simétrico P(x_1, x_2, ..., x_n) é um polinômio P($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$)*" pode ser encontrada nas referências [Figueiredo, 1980] e [Dean, 1974].

QP-31. Resolva, em R, o sistema $x^4 + y^4 = 97$ e x + y = 5.

QP-32. Encontre todos os pares (x, y) inteiros, tais que

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

QP-33. Obter todas as soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27. \end{cases}$$

QP-34. Resolva, em *C,* a equação $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$.

QP-35. Seja $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Encontre o resto da divisão de $f(x^5)$ por $f(x)$.

QP-36. Achar o resto da divisão de $x^{1959} - 1$ por $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

QP-37. Prove usando números complexos que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. A partir desse resultado calcule $\cos(\pi/10)$. Conclua que $\cos(\pi/10) = \frac{\sqrt{\varphi+2}}{2}$.

NOTA:

Perceba um fato interessante com o valor de $\cos(\pi/5)$: ele é igual a $\frac{\varphi}{2}$, em que φ é a *razão áurea*.

Reveja QF-8.

QP-38. (**Putnam Exam-1968**). Determine todos os polinômios cujos coeficientes são ± 1 e que possuem somente raízes reais.

QP-39. (**ITA-2014**). Considere os polinômios em $x \in R$ da forma

$$p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x.$$

As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão 1/2 quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

A) (1/4, 0, 5/4).

B) (1/4, 1, 5/4).

C) (1/4, 0, -5/4).

D) (5/4, 0, 1/4).

E) (1/4, -1, -1/4).

QP-40. (**ITA-1999**). A equação polinomial P(x) = 0 de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de segunda espécie e admite i como raiz. Se P(2) = –105/8 e P(–2) = 255/8, determine a soma de todas as raízes de P(x).

▶ **Resp.:** 6.

QP-41. (**IME- 2007/2008**). Encontre o polinômio P (x) tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3.P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4, onde Q(x) é um polinômio do 6º grau.

QP-42. (**ITA-1990**). Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + ... + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação p(x) = 0 admite mais do que uma raiz real e, ainda, a + bi é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo-se que 1/a é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de p(x) = 0 e que a soma destas raízes reais vale 7/8 enquanto que o produto é 1/64, o valor de α é:

A) 32. **B)** 56. **C)** 71. **D)** 11. **E)** 0.

▶ **Resp.:** (**C**).

QP-43. A) Use a série binômia para obter o desenvolvimento em série de potências da função real $f(x) = arc\ senh\ x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ para $-1 < x < 1$.

B) Use o teste de Leibniz das séries alternadas para provar que a série de potências de f converge no intervalo fechado [-1, 1].

Obs.: O *teste de Leibniz* afirma: " Se (a_n) é uma sequência monótona decrescente que tende para zero, então $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é uma série convergente."

QP-44. (**ITA -2008**). Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

A) 30

B) 32

C) 34

D) 36

E) 38

▶ **Resp.:** (**B**).

QP-45. (**ITA-2008**). Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Considere o polinômio *p(x)* dado por

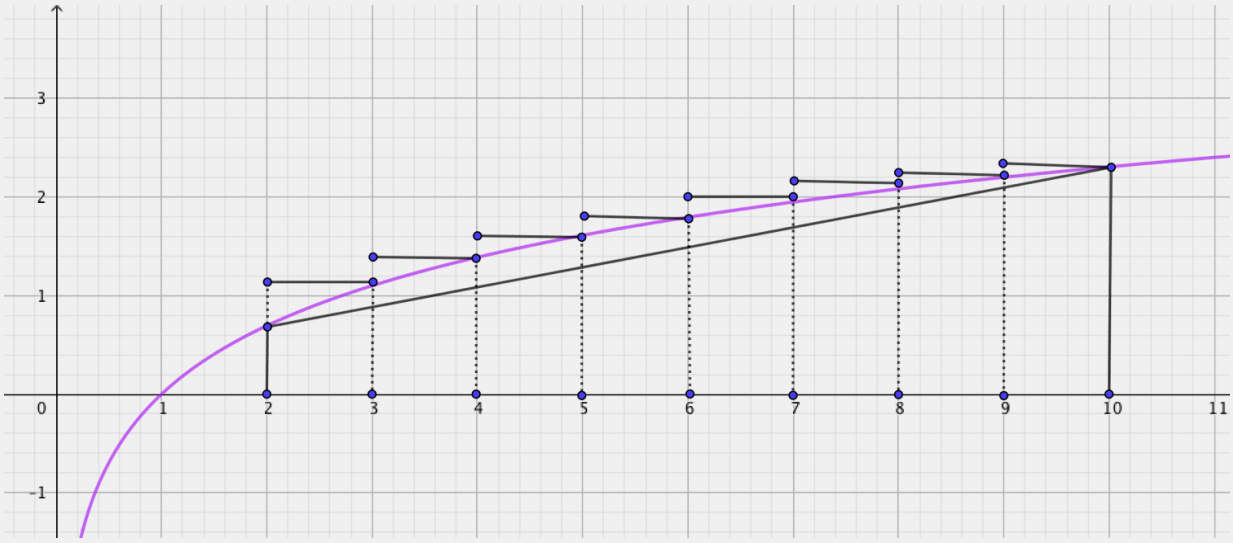
$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que x = 0 seja uma raiz com multiplicidade 3 de *p(x)*.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-P(2)

DRN-P2:

A região R é a região do plano cartesiano limitada pelo gráfico de $y = \ln(x)$, o eixo-x e as retas verticais x = 2 e x = 10. Ela é convexa, o que significa dizer que dados dois pontos B e C de R, o segmento BC está contido em R. Traçando-se um segmento de reta com extremos nos pontos (2, ln(2)) e (10, ln(10)), formamos um trapézio interno a *R,* com área igual a 4(ln(2) + ln(10))= $\ln(20^4)$. Então $A > \ln(20^4)$, o que exclui a alternativa (A). Traçando-se uma poligonal de aproximação, com vértices nos pontos de abcissa inteira(x = 2, 3, ..., 10), teremos uma região poligonal R*, contida em R, com área dada pela soma de áreas de trapézios de altura 1 e base média $\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}$, dada por $\sum_{k=2}^{10} \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2}$. Como $y = \ln(x)$ é crescente, então essa soma é maior do que $\sum_{k=2}^{10} \ln(k) = \ln(9!)$. Logo $A > \ln(9!)$, o que implica $\ln(A) > \ln(\ln(9!))$. Isso exclui a alternativa (D). Agora vamos considerar o polígono retangular formado pela união dos 8 retângulos de base 1 e altura ln(k), com k = 3, 4, ...,10. Esse polígono contém a região R, o que nos leva a $A < \sum_{k=3}^{10} \ln(k) = \ln(10!) - \ln(2)$. Isso exclui as alternativas C e E. Logo, a resposta certa é B. Confirmando isso: $A < \ln(10!) - \ln(2) = \ln(5) + \ln(9!) < 2 + \ln(9!)$. A figura a seguir, ilustra, parcialmente, o que foi feito anteriormente. A poligonal de aproximação não está indicada.



Obs.: Este tipo de questão, em minha compreensão, em sintonia com a teoria das aproximações multifárias, deveria ser mais frequente nos exames vestibulares. Perceba a integração de conteúdos básicos de geometria e função logarítmica, na fronteira das idéias fundamentais que formalizaram, no século XIX, com as somas de Riemann, o cálculo integral.

DRN-P3:

Após escrever a soma S_n, consulte o Item-1 da QI-7.

Obtenha $S_n = \frac{\pi}{n}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)$.

Observe que $S_n = 2.\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)$, o que implica $\lim_{n\to\infty} S_n = 2.$

DRN-P4:

Denotando o resto por $R(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $P(x) = D(X)Q(x) + R(x)$, em que D(x) é o polinômio divisor. Testando 1 e - 1 em D(x), verificamos que eles são raízes. E dividindo D(x) por (x – 1)(x + 1), obtemos o quociente x – 3 com resto 0. Logo, R(3) = 0. Daí chega-se ao sistema:

$$a + b + c = -14;\ a - b + c = 20 \text{ e } 9a + 3b + c = 0.$$

Resolvendo-o, obtemos: $R(x) = 6x^2 – 17x - 3$.

DRN-P5:

Fatorar, usando PG em x e aplicar o binômio de Newton em y.

DRN-P6:

Usar $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}^3(x)$.

DRN-P7:

Defina $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Logo $p(\sqrt[3]{x}) = 0$, que é satisfeita por $x = r^3, s^3, t^3$. Disso obtenha $-(x + d) = b\sqrt[3]{x^2} + c\sqrt[3]{x}$. Em seguida, use um produto notável adequado para chegar à resposta:

$$- (x + d)3 = b3x2 + c3x - 3bcx(x + d).$$

DRN-P8:

Use o polinômio de interpolação de Lagrange.

DRN-P9:

$$z^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = cis\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = \pm cis\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}\right)$$

As quatro raízes são: $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ e $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Verificamos que as somas possíveis são: 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, i e $-i$. Logo, a alternativa correta é D.

DRN-P10:

Como P(x) é de grau ímpar, então ele tem uma raiz real. Como é de grau 5, tem 5 raízes em C. Como tem coeficientes reais, tem raízes complexas conjugadas. Em virtude de possuir raízes complexas simétricas, ele tem 4 raízes complexas(não reais) e consequentemente, a real é única e igual ao módulo comum das complexas.

Seja w = $a + bi$ uma das raízes complexas.

Então as outras raízes são: $a - bi$, $-a - bi$, $-a + bi$ e $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Pelas relações de Girard temos que $\sqrt{a^2+b^2}=3$ => $a^2+b^2=9$ e que $2a^2-2b^2=10$. Resolvendo esse sistema obtemos: $a=\pm\sqrt{2}$ e $b=\pm\sqrt{7}$.

Portanto, as raízes de P(x) são:

3, $\sqrt{2}+i\sqrt{7}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{7}$.

Obs.: São $\binom{5}{2}=10$ produtos dois a dois das 5 raízes, sendo 4 deles iguais a 0, que são os que têm a raiz real. A soma dos outros 6 dá $2a^2-2b^2$. Logo, $2a^2-2b^2=10$.

DRN-P11:

Suponha que a seja o centro do quadrado. Faça uma translação da origem do plano complexo para a. Assim, os vértices do quadrado agora são as raízes da equação $(x-a)^4=b$. Compare os coeficientes das duas equações e deduza, a partir de $p=-4a$ e $r=-4a^3$ que a é inteiro. Depois use $s=a^4-b$ para concluir que b é inteiro também e, por conseguinte, que o raio do circuncírculo do quadrado não é menor do que 1. Logo, a área do quadrado não é menor do que $(\sqrt{2})^2=2$. Por fim use a equação $x^4=1$ para concluir que o valor mínimo da área do quadrado é 2.

Obs.: $r=\frac{p^3}{4^2}=\frac{p.p.p}{2.2.2.2}\Rightarrow$ 4 divide *p*.

DRN-P12:

Usar raízes da unidade.

DRN-P15:

Calcule p(-i) e obtenha o valor de a.

▶ **Resp.:** (C).

DRN-P19:

Pela fórmula de interpolação de Lagrange o grau máximo do polinômio f(x) é 3. Logo, podemos considerar f(x) = ax^3+bx^2+cx+d. Em vez de usar essa fórmula podemos formar o sistema linear de 4 equações e 4 incógnitas a partir dos 4 pontos dados e depois resolvê-lo. Seguindo esse procedimento, encontramos $a=1, b=-1,\ c=1$ e $d=3$. Ou seja, f(x) = x^3-x^2+x+3. Verificamos, por tentativa, que – 1 é raiz de f(x).

Fazendo a divisão euclidiana de f(x) por (x + 1), obtemos x^2-2x+3, cujas raízes são

$1 + i\sqrt{2}$ e $1 - i\sqrt{2}$. Portanto, as raízes do polinômio f(x) são:

$$-1,\ 1 + i\sqrt{2} \text{ e } 1 - i\sqrt{2}.$$

DRN-P21:

Propriedade 12 e teorema das raízes racionais.

DRN-P24:

Em virtude de ser par deduzimos que b = a/2 e c = - 3a/2. Substituindo esses valores na expressão do polinômio, obtemos $P(x) = a(x^4/2 + x^2/2 - 1)$. Logo, suas raízes são as raízes da equação $x^4/2 + x^2/2 - 1 = 0$, que tem as seguintes raízes: $\pm\sqrt{2}$ e $\pm i$.

▶ **Resp.:** (E).

Observe que a + c é diferente de 0. Por quê?

DRN-P27:

Verifique que $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2cosn\theta cos\theta$.

Faça $f_n(x) = cos(n\theta)$ e perceba que $f_{n+1} = 2f_nf_1 - f_{n-1}$. Sendo $x = cos\theta$, então $f_1 = cos\theta = x$ e $f_2 = cos2\theta = 2x^2 - 1$. Em virtude de f_1 e f_2 serem polinômios e da lei de recorrência, deduzimos que f_n é um polinômio em x. Por outro lado $f_3 = 2f_2f_1 - f_1 = 2(2x^2 - 1)x - x = 2^2x^3 - 3x$, $f_4 = 2^3x^4 + \cdots$, etc. Conclui-se, assim, que o termo de maior grau de f_n é $2^{n-1}x^n$ e, por conseguinte, seu coeficiente é 2^{n-1}.

DRN-P28:

A) Divida p(x) por x^2 e fatore para obter g(x + 1/x), em que $g(x) = a_0x^2 + a_1x + (a_2 - 2a_0)$.

B) Faça y = x + 1/x.

▶ **Resp.:** $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

DRN-P29:

Seja $P(t) = (t - x_1)(t - x_2)...(t - x_n) = t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_n$. Então, $0 = P(x_1) + P(x_2) + ... + P(x_n) = (x_1^n + ... + x_n^n) + a_1(x_1^{n-1} + ... + x_n^{n-1}) + ... + na_n$, o que equivale a $n + na_1 + ... + na_n = 0 = nP(1)$.

Mas isso implica que algum x_i é igual a 1. Coloque $x_1 = 1$. A seguir, proceda de modo análogo com x_2, ..., x_n, depois com x_3, ..., x_n, etc. Nesse procedimento de *descida finita*, todos os x_i são iguais a 1.

DRN-P30:

Verifique que a divisão por $x^2 – 1$ dá uma equação recíproca de primeira espécie. Aplicando a técnica sugerida acima, obtenha as raízes: 1, -1, 2, 1/2, i, -i.

DRN-P31:

Usar polinômios simétricos e obter $\sigma_2{}^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$. A solução é (2, 3).

DRN-P32:

Usar polinômios simétricos $u = x + y$ e $v = xy$. Depois trocar u por 2t. No final obter os pares (x, y): (2, 8) e (8, 2).

DRN-P33:

Usar as relações de Girard e polinômios simétricos elementares.

As soluções são todas as permutações simples de $(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}, 3)$.

DRN-P34:

Divida por z^4.

DRN-P35:

Um caminho:

Observe que $(x – 1)f(x) = x^5 – 1$ e $x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^{20} - 1) + (x^{15} – 1) + (x^{10} – 1) + (x^5 – 1) + 5$.

Outro caminho, é usar raízes quintas da unidade, vendo que $f(1) = f(w^5) = 5$ e que $f(w) = 0$, onde w é raiz quinta primitiva da unidade.

▶ **Resp.:** 5.

DRN-P36:

Colocar r(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e operar com as raízes de $x^2 + 1$ e de $x^2 + x + 1$. Observe que a raiz cúbica ε da unidade satisfaz $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Resolvendo o sistema das quatro equações encontraremos os valores de a, b, c e d: b = c = 0, a = 1 e d = - 1.

▶ **Resp.:** $x^3 - 1$.

DRN-P37:

Usar raízes da unidade e fazer uma transformação para usar cos $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$.

DRN-P38:

Relações de Girard e MA ≥ MG. Observe que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right) = 3,$$

$$x_1^2 . x_2^2 \ldots x_n^2 = 1 \text{ e } x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 \Rightarrow \text{duas raízes iguais.}$$

▶ **Resp.:** $\pm(x - 1),\ \pm(x + 1),\ \pm(x^2 + x - 1),\ \pm(x^2 - x - 1),$

$$\pm(x^3 + x^2 - x - 1), \qquad \pm(x^3 - x^2 - x - 1).$$

NOTA:

Uma questão mais simples poderia ser formulada assim:

Qual o maior grau que um polinômio p(x) pode ter, se seus coeficientes são ± 1 *e todas as suas raízes são reais?*

DRN-P39:

Use as Relações de Girard e a forma fatorada de p(x).

▶ **Resp.:** (**C**).

DRN-P41:

Observe que Q(x) + 2 = $x^4(ax^2 + bx +$ **C)** = $ax^6 + bx^5 + cx^4 = (x - 1)^3P(x) + 1$. Logo, Q(x) + 1 = $ax^6 + bx^5 + cx^4$ -1. Derivar duas vezes sucessivas para obter o sistema linear cuja solução é a = 10, b = - 24 e c = 15.

▶ **Resp.:** $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

DRN-P43:

A) Use primeiro a série binômia na derivada da função.

DRN-P45:

Os coeficientes de x^2, x e o termo constante têm que ser nulos.

QP-46. (**ITA-2008**). É dada a equação polinomial

$$(a+c+2)\,x^3+(b+3c+1)\,x^2+(c-a)\,x+(a+b+4)=0$$

Com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a

A) –2. **B)** 4. **C)** 6. **D)** 9. **E)** 12.

▶ **Resp.:** (**E**).

QP-47. (**ITA-2008**). Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e 1/2 – i/2 também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

A) –1. **B)** 1. **C)** 2. **D)** 3. **E)** 4.

QP-48. (**ITA-2010**). Um polinômio real $p(x)=\sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a+2b+5c=0 \\ a+4b+2c=6 \\ 2a+2b+2c=5. \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que p(1) é igual a

A) –4. **B)** –2. **C)** 2. **D)** 4. **E)** 6.

QP-49. (**ITA-2010**). Considere o polinômio $p(x) = \sum a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se *r* é raiz de *p*, *–r* também é raiz de *p.* Analise a veracidade ou inautenticidade das afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0 < 0$.

QP-50. (**ITA-2014**). Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que *a* é uma constante complexa.

Sabendo que 2i é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

A) $-3i, -1, 1.$ **B)** $-i, i, 1.$ **C)** $-i, i, -1.$ **D)** $-2i, -1, 1.$ **E)** $-2i, -i, i.$

QP-51. (**ITA-2015**). Considere o polinômio p dado por

$$p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta,$$ em que β é um número real.

A) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

B) Para cada um dos valores de β obtidos em A), determine todas as raízes do polinômio p.

QP-52. (**ITA-2015**). Seja *p* o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in R$, *j = 0, 1, 2, ..., 15,* e $a_{15} \neq 0$.

Sabendo-se que *i* é uma raiz de *p* e que p(2) = 1, então o resto da divisão de *p* pelo polinômio *q*, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

A) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}.$

B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}.$

C) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}.$

D) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}.$

E) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}.$

QP-53. (**ITA-2016**). Sejam a, b, c números reais com $a \neq 0$.

A) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ numa equação de segundo grau.

B) Determine todas as raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

▶ **Resp.: B)** $\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3} \}$.

QP-54. (**ITA-2017**). Considere o polinômio $p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$.

A) Determine os números reais *a* e *b* tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

B) Determine as raízes de p(x).

Polinômios Simétricos e Fórmulas de Newton

Um conjunto relevante de polinômios simétricos são as somas de potências

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k, \text{ em que } k \in Z \text{ e } k \geq 0.$$

Essas somas podem ser computadas, de modo mais fácil, *com a ajuda dos polinômios simétricos elementares* σ_j, para $j = 1, 2, \ldots, n$, considerando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como raízes de uma equação polinomial da forma $x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$, em que $c_j = (-1)^j \sigma_j$, para j = 1, 2, ... ,n *e* usando as **fórmulas de Newton**:

$$S_1 + c_1 = 0,$$
$$S_2 + c_1S_1 + 2c_2 = 0,$$
$$S_3 + c_1S_2 + c_2S_1 + 3c_3 = 0,$$
$$S_n + c_1S_{n-1} + \ldots + c_{n-1}S_1 + nc_n = 0 \quad e \quad S_k + c_1S_{k-1} + \ldots + c_nS_{k-n} = 0, \text{ para } k > n. \quad (1)$$

Verifique a fórmula $S_n + c_1S_{n-1} + \ldots + c_{n-1}S_1 + nc_n = 0$ a partir da equação

$x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$, fazendo a adição das igualdades resultantes das substituições das raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na mesma.

Para deduzir a fórmula (1) basta proceder de forma análoga à anterior, acrescentando o seguinte: multiplique cada uma das igualdades referidas por $(x_i)^{k-n}$, i = 1, 2, ..., n. Por exemplo, se n = 3, então a equação $(x_i)^3 + c_1(x_i)^2 + c_2(x_i) + c_3 = 0$ deverá ser multiplicada por $(x_i)^{k-3}$. A questão QP-58 é sobre isso. Resolva-a.

Vamos ilustrar o uso dessas fórmulas com o caso de uma equação de grau 4:

$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 12 = 0$. Sejam a, b, c, d, as raízes dessa equação. Desejamos calcular a soma $S_4 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

Então, aplicando as **fórmulas de Newton**, obtemos:

$$S_1 + c_1 = 0,$$

$$S_2 + c_1S_1 + 2c_2 = 0,$$

$$S_3 + c_1S_2 + c_2S_1 + 3c_3 = 0,$$

$$S_4 + c_1S_3 + c_2S_2 + c_3S_1 + 4c_4 = 0.$$

Substituindo os valores teremos:

$$S_1 = -2;\ S_2 + 2S_1 - 2 = 0 \Rightarrow S_2 = 6;\ S_3 = -20;$$
$$S_4 + 2(-20) - 6 + 2(-2) - 48 = 0 \Rightarrow \mathbf{S_4 = 98}.$$

NOTA:

Verifique o seguinte resultado: Se todos os coeficientes c_j das fórmulas de Newton são reais, então as somas S_k são reais também. Esta propriedade será útil na resolução da questão QC-118.

QP-55. [JNCF]. Calcular o valor da soma $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + k^4$ sabendo que a, b, c, d e k são as raízes, em *C,* da equação

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0.$$

QP-56. [JNCF]. Calcule o valor da soma $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + k^5$ sabendo que a, b, c, d e k são as raízes, em *C*, da equação

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x + 16 = 0.$$

QP- 57. Se x, y, z satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 12, \end{cases}$$

então calcule a soma $x^4 + y^4 + z^4$.

QP- 58. (**IME-2004/2005**). Sejam a, b, e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, em que r e t são números reais não nulos.

A) Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.

B) Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, em que $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k.

QP-59. (**IME - 2015**). A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

A) 7. **D)** 10

B) 8. **E)** 11.

C) 9.

QP-60. (**IME-2016/2017**). Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é

A) 210. **D)** 320.

B) 235. **E)** 325.

C) 250.

QP-61. Use o teorema da multiplicação de séries convergentes para obter o desenvolvimento em série de potências da função real definida por $f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$, para $-1 < x < 1$. **Obs.:** Log = logaritmo neperiano.

QP-62. Encontre o único polinômio P de grau 3 que satisfaz P(0) = 0 e P(1) = P(2) = P(3) = 1.

QP-63. (**ITA-1977- Adaptada**). Se p(x) é um polinômio de 5º grau que satisfaz as condições 1 = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) e p(6) = 0, então temos que p(0) é igual a:

A) 4.

B) 3.

C) 9.

D) 2.

E) 1.

QP-64. Achar uma expressão do único polinômio P(x), com $x \neq -1$, de grau n, que satisfaça às seguintes condições:

$$P(j) = \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

POLINÔMIOS SIMÉTRICOS E GEOMETRIA TRIANGULAR

No triângulo existem algumas relações nas quais os polinômios simétricos são muito adequados, facilitando a resolução de alguns problemas. De modo explícito, temos duas relações que nos lembram dos polinômios simétricos elementares de três variáveis(ou indeterminadas). Elas relacionam as medidas dos lados, a, b e c de um triângulo ABC, com outras três medidas: p do semi-perímetro, r do raio do incírculo e R do raio do circuncírculo de ABC. Assim, temos as conhecidas fórmulas:

$$a + b + c = 2p \text{ e } S = pr = abc/4R \Rightarrow abc = 4Rrp.$$

Resumindo, temos:

$$\text{(i)} \begin{cases} a + b + c = 2p, \\ abc = 4Rrp. \end{cases}$$

Pensando nas relações de Girard, percebemos a falta do polinômio simétrico elementar:

$$ab + bc + ca.$$

Que relação esse polinômio tem com as variáveis R, r e p?

Vejamos, pois. Lembremo-nos da fórmula de Hierão para a área de um triângulo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dela, vem que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Como S = pr, então temos que

$p(p-a)(p-b)(p-c) = r^2p^2$, o que nos leva a $(p-a)(p-b)(p-c) = r^2p$.

Desenvolvendo o produto do primeiro membro dessa última igualdade, obtemos:

$$p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc = r^2p.$$

E substituindo as relações de (i) nessa igualdade, teremos, após simplificações, o seguinte:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

Com esse último resultado, completamos a conversão dos três polinômios simétricos elementares de 3 variáveis, nas novas variáveis $p, R\ e\ r$. Pelo que já vimos, todo polinômio simétrico pode ser representado como um polinômio em função dos polinômios simétricos elementares. Usaremos isso para resolver e propor algumas questões relacionadas ao triângulo. Coloquemos as três relações juntas:

$$\begin{cases} a+b+c = 2p \\ ab+bc+ca = p^2 + r^2 + 4Rr \\ abc = 4Rrp \end{cases}.$$

QP-65. As medidas dos lados de um triângulo ABC são $a, b\ e\ c$.

Prove que $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ e $a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$, em que *p é o* semiperímetro, *r* o raio do incírculo e *R* o raio do circuncírculo.

QP-66. Sejam A, B e C as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC. Prove que *cosA + cosB + cosC = r/R + 1,* em que r é o raio da circunferência inscrita e R é o raio da circunferência cirunscrita.

QP-67. Para um triângulo ABC qualquer, prove que vale a desigualdade:

$$cosA + cosB + cosC \leq 3/2,$$

em que A, B e C são as medidas dos seus ângulos internos.

QP-68. Seja ABC um triângulo qualquer. Prove que vale a desigualdade:

$$sen^2\left(\frac{A}{2}\right) + sen^2\left(\frac{B}{2}\right) + sen^2\left(\frac{C}{2}\right) \geq \frac{3}{4}.$$

QP-69. Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC. Prove que

(I) $4\sqrt{3}(ABC) \leq \dfrac{9abc}{a+b+c}$

(II) $4\sqrt{3}(ABC) \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

(III) $4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$

(IV) $4\sqrt{3}(ABC) \leq ab + bc + ca.$

NOTA:

Observe que as desigualdades desta questão podem ser apresentadas em outras formas equivalentes. Coloquemos S = (AB**C)**. Seguindo a ordem da questão:

$$\text{(I) } S \le \frac{3\sqrt{3}}{4\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)}. \qquad \text{(II) } S \le \frac{\sqrt{3}}{4\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)}.$$

$$\text{(III) } S \le \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2). \qquad \text{(IV) } S \le \frac{\sqrt{3}}{12}(ab+bc+ca).$$

QP-70. Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC. Prove que

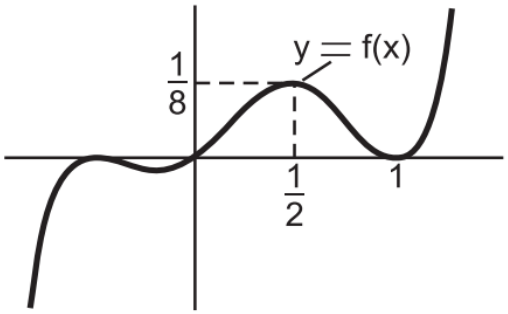
$$\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \ge 3\sqrt{3}R,$$

em que *R* é o raio da circunferência circunscrita.

QP-71. (**JNCF**). Construa um polinômio $p(x) \in Z_7[x]$, de 4º grau, que tenha apenas duas raízes em Z_7.

QP-72. Seja p(x) um polinômio de grau n que admite n + 1 raízes distintas. Prove que p(x) é o polinômio nulo.

QP-73. (ITA-2002). Com base no gráfico da função polinomial y = f(x) esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de f(x) por $(x-\frac{1}{2})(x-1)$.



QP-74. (**USAMO-1976**). Se P(x), Q(x), R(x) e S(x) são polinômios tais que

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x),$$

prove que *x - 1* é um fator de *P(x).*

QP-75. (**ITA- 2006**). Considere o polinômio p(x) = $x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

QP-76. (**ITA-2009**). Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta *f* o *g* é igual a

A) 1. **B)** 2. **C)** 3. **D)** 4. **E)** 5.

QP-77. (**ITA-2001**). O valor da soma a + b para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão 1/2 é:

A) 36. **B)** 41. **C)** 26. **D)** –27. **E)** –20.

QP-78. (**ITA-2001**). O polinômio com coeficientes reais

$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e *i.* Então, a soma dos coeficientes é igual a:

A) - 4. **B)** –6. **C)** –1. **D)** 1. **E)** 4.

▶ **Resp.:** (**A**).

QP-79. Usando séries de potências prove que $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x - arctg\ x}{x^2 \log(1+x)} = \frac{1}{6}$.

QP-80. Considere a série de potências $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$, em que (F_n) é a sequência de Fibonacci. Prove que a série $F(x)$ é convergente se $|x| < \frac{1}{2}$. A seguir mostre que $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$.

QP-81. Usando séries de potências prove que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} cos2xt\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

QP-82. (**ITA-1996**). Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1 + \sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

A) 30º . **B)** 45º. **C)** 60º . **D)** 135º . **E)** 120º .

QP-83. (**ITA-1995**). Sabendo-se que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio

$$2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540,$$

então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é

A) 17. **B)** 19. **C)** 21. **D)** 23. **E)** 25.

▶ **Resp.:** (**B**).

QP-84. (**ITA-1993**). Sabendo-se que a equação, de coeficientes reais,

$$x^6 - (a + b + \mathbf{C})x^5 + 6x^4 + (a - 2\mathbf{B})x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$$

É uma equação recíproca de segunda classe, então o número de raízes reais desta equação é

A) 0. **B)** 2. **C)** 3. **D)** 4. **E)** 6.

QP-85. (**IME- 2011**). Seja p(x) uma função polinomial satisfazendo a relação

$$p(x).p(1/x) = p(x) + p(1/x).$$

Sabendo que p(3) = 28, o valor de p(4) é:

A) 10. **B)** 30. **C)** 45. **D)** 55. **E)** 65.

QP-86. Considere os polinômios $p(x) = x^5$ e $q(x) = x$ em $Z_5[x]$. Mostre que, embora os polinômios p e q sejam distintos, as funções polinomiais associadas

$$p: Z_5 \to Z_5;\ p(x) = x^5 \text{ e } q: Z_5 \to Z_5;\ q(x) = x \text{ são iguais.}$$

QP-87. Mostre que a série de Taylor da função real $f(x) = log(1 + x)$, no intervalo (- 1, 1), tem a seguinte expressão:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\ .$$

QP-88. (**IME - 2012**). Seja *a*, *b* e *c* números reais e distintos. Ao simplificar a função real de variável real,

$$f(x) = a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

Obtém-se f(x) igual a

A) $x^2 - (a + b + \mathbf{C})x + abc$.

B) $x^2 + x - abc$.

C) x^2.

D) $-x^2$.

E) $x^2 - x + abc$.

QP-89. (**IME - 2013**). Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

A) 0. **B)** 1. **C)** 2. **D)** 3. **E)** 4.

QP-90. (**IME - 2011**). Mostre que o determinante a seguir apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

QP-91. Se a e b são as raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$, então prove que para todo inteiro não-negativo n, $a^n + b^n$ é um inteiro não divisível por 5.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-P(2)

DRN-P47:

Usar as relações de Girard, raízes conjugadas e observar com atenção que duas raízes são inteiras e distintas.

▶ **Resp.:** (**C**). **Obs.:** a = –2, b = –1 e c = 2

DRN-P48:

Mostre que $p(x) = 4(x - 2)(x - 3/2)^2(x + 1)^2$.

▶ **Resp.:** (**A**).

DRN-P49:

Lembrar das raízes conjugadas e que p(x) pode ter as raízes 1, -1, -1, 3, -3 e 2, o que implica $a_0 = 6 > 0$.

▶ **Resp.:** I. (V), II. (F), III. (F).

DRN-P50:

De p(2i) = 0 tem-se que a = i.

DRN-P51:

Usar as Relações de Girard e raízes conjugadas.

Dois casos: β = 15 e β = -15.

▶ **Resp.:** $\{\frac{5}{6}, \frac{-5+i\sqrt{11}}{6}, \frac{-5-i\sqrt{11}}{6}\}$ e $\{-\frac{5}{6}, \frac{5+i\sqrt{11}}{6}, \frac{5-i\sqrt{11}}{6}\}$.

DRN-P52:

Como q(x) tem grau 3, então R(x) = a$x^2 + bx + c$. Pelo teorema das raízes conjugadas temos que p(i) = p(- i) = 0. Logo, R(i) = 0 e R(- i) = 0. Por outro lado, p(2) = 1 e q(2) = 0. Disso segue que R(2) = 1. Resolvendo o sistema -a + bi + c = 0, - a – bi + c = 0 e 4a + 2b + c = 1, encontramos b = 0 e a = c = 1/5. Portanto, R(x) = $\frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$.

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P54:

Igualar os coeficientes e resolver o sistema para obter: a = - $2\sqrt{3}$ e b = –1. A seguir calcular as raízes de cada fator de p(x).

DRN-P58:

É um caso particular da fórmula de Newton (1), mostrada antes. Siga a orientação dada no texto para o caso n = 3.

DRN-P59:

Após substituição dos dados nas fórmulas usuais de PA, obtém-se a equação polinomial $r^3 + 3r^2 – 490 = 0$.

▶ **Resp.:** (**A**).

DRN-P60:

Lembre-se da fatoração de $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. ▶ **Resp.:** (**B**)

DRN-P61:

Sabemos que $log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ e

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

Logo, o produto de Cauchy dessas séries é

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots$$

Obs.: Lembre-se que, **o produto de Cauchy é a generalização do produto de polinômios para as séries de potências, o que é bem "natural", considerando-se que as séries de potências são generalizações dos polinômios também**. Perceba aqui a importância das aproximações conceituais na compreensão de novos conceitos, como comentamos anteriormente neste capítulo. É neste sentido que as aproximações multifárias se revelam "naturalmente" à nossa mente(que pensa e sente por aproximações multifárias) se assim procedermos, de modo sistemático, na apresentação da matemática em geral, desde a elementar até a mais avançada. Aproveito este comentário para recomendar um **experimento mental**, que pode ser repetido amiúde. Trata-se, de ao tentar resolver uma questão ou problema mais desafiador, tentar perceber "os percursos" do pensar, as aproximações de conceitos, propriedades, teoremas, fórmulas, padrões que nos vêm à mente para construirmos a resolução. Depois, tente ver se existem outros caminhos de resolução. Você vai perceber, que sua mente usou diversas formas de aproximação, mesmo que não tenham sido as melhores. Mas se fizer uma pausa e mais tarde tentar novamente ou conversar com seus pares, pode acontecer de ter acesso a aproximações melhores. É assim que você irá se convencer, paulatinamente, que pensamos/imaginamos/sentimos por aproximações multifárias. Tanto conscientemente, como inconscientemente, pois até dormindo nossa mente é ativa. Quantas vezes não já vivenciamos ou lemos relatos de outros nos contando que ao amanhecer do dia ou durante uma caminhada ou numa conversa surgiu uma ideia acerca de algo ou solução de um problema! Albert Einstein, que gostava de fazer "experimentos mentais", disse certa vez: "O segredo da criatividade está em dormir bem e abrir a mente às possibilidades infinitas. O que é um homem sem sonhos?"

DRN-P62:

Use o teorema da fatoração assim: Faça P(x) = Q(x) + 1, onde Q(x) = a(x – 1)(x – 2)(x – 3) e obtenha a = 1/6. Outro caminho seria colocar Px) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e resolver o sistema linear 4 x 4. Uma outra opção seria usar o polinômio de interpolação de Lagrange. Lembre-se da unicidade desse polinômio.

▶ **Resp.:** (**D**).

DRN-P63:

Procedendo como na questão anterior, deduza que a = -1/5! e P(0) = 2.

DRN-P64:

Use Q(x) = (x + 1)P(x) - 1, com Q(-1) = -1, e avalie Q(-1) na forma fatorada de Q(x) para obter o valor do coeficiente do termo de maior grau.

▶ **Resp.:** $P(x) = \dfrac{1 + (-1)^n x(x-1)\ldots\frac{x-n}{(n+1)!}}{x+1}$.

NOTA:

Lembre-se que a soma de dois polinômios é um polinômio também. Portanto, no caso indicado anteriormente, Q(x) + 1 é um polinômio, que tem - 1 como uma de suas raízes. Logo, Q(x) + 1 é divisível por x + 1, em virtude do *teorema da raiz.* Por outro lado, a unicidade de um polinômio P, de grau n, que passa por n + 1 pontos (a_i, b_i), é dada pela *fórmula de interpolação de Lagrange*. Aliás, por meio dessa fórmula poderíamos também resolver a referida questão.

DRN-P66:

Usar a lei dos cossenos e polinômios simétricos. E lembrar de fazer o truque:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a(b^2 + c^2) - a^3}{2abc}.$$

DRN-P67:

Aplicar a Lei dos cossenos e polinômios simétricos.

NOTA:

É claro que se você usar o resultado da questão anterior e a desigualdade de Euler $2r \leq R$, então a resolução dessa questão se torna imediata. Mas como as questões nem sempre se apresentam juntas e sequenciadas, o melhor é seguir a dica.

DRN-P68:

Use $sen^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{2}$.

DRN-P69:

Para (i) Mostrar que a desigualdade equivale a $2p \leq 3\sqrt{3}R$. Para (ii) usar essa e MA ≥ MG. Adeque essas ideias para resolver as outras duas. Depois compare a resolução de (iii) com a resolução anterior feita a partir da "aproximação" de um triângulo qualquer com um triângulo equilátero.

DRN-P70:

Designe por M o primeiro membro dessa desigualdade.

Use $b + c - a = p - a$, etc, para chegar em M = $\frac{p}{2}(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}) - p$.

Em seguida, some os termos entre ( ) e use polinômios simétricos. Algumas desigualdades conhecidas são valiosas para finalizar: R ≥ 2r e $2p \geq 3\sqrt{3}r$.

DRN-P71:

Verique que $x^2 + \overline{1}$ é irredutível sobre Z_7.

DRN-P72:

Observe que o determinante do sistema linear é de Vandermonde.

DRN-P73:

Devemos ter f(x) = $(x - \frac{1}{2})(x-1)q(x) + r(x)$, com $r(x) = ax + b$. Pelo gráfico f(1) = 0 e f($\frac{1}{2}$) = 1/8.

Logo, f(1) = 0 $= a + b$ e f($\frac{1}{2}$) = 1/8 = $\frac{a}{2} + b$. Resolvendo esse sistema , obtemos $r(x) = -\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

DRN-P74:

Pense em raízes da unidade. Verifique, a partir da adição de 4 igualdades, que 4P(1) - Q(1) - R(1) = 0. Depois, multiplicando as 4 igualdades por raízes da unidade, obtenha - P(1) - Q(1) - R(1) = 0.

DRN-P75:

Use relações de Girard e propriedades dos números racionais para concluir que a afirmação é verdadeira.

DRN-P76:

Fatore antes de compor.

▶ **Resp.:** (**C**).

DRN-P77:

Relações de Girard.

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P79:

Calcule $sen\ x - arctg\ x$ usando as séries de potências dessas duas funções. A seguir multiplique x^2 pela série de potências de ln(1 + x). Para calcular o limite(quando x → 0) do quociente das duas séries encontradas, divida ambas por x^3, obtendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{23}{120}x^2 + \dots}{1 - \frac{1}{2}x + \dots} = \frac{1}{6}.$$

DRN-P80:

Mostre que $0 < F_n \leq 2^n$, para todo $n \geq 1$ e use o critério de comparação para concluir a converegência da série. Mostre que $(1 - x - x^2)F(x) = x$.

DRN-P81:

Use a série de Taylor, em t = 0, do cosseno e integre termo a termo. Na integração será útil a fórmula de recorrência $\int_0^\infty t^{2n}e^{-t^2}\,dt = \frac{2n-1}{2}\int_0^\infty t^{2n-2}e^{-t^2}dt$, que é decorrente da seguinte fórmula $\int t^n e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}t^{n-1}e^{-t^2} + \frac{n-1}{2}\int t^{n-2}e^{-t^2}dt$, que é provada usando integração por partes. E use $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, como será provado mais à frente neste capítulo. Perceber, ao colocar o fator $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ em evidência, a série $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$. Lembre-se que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$.

DRN-P82:

Relações de Girard e cotg(A + B).

▶ **Resp.:** (**D**).

DRN-P84:

Procurar fatorar o polinômio depois de determinar seus coeficientes.

As 6 raízes são 1, -1, $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}, \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Só 4 são reais.

▶ **Resp.:** (**D**).

DRN-P85:

Seja k uma raiz de p(x) = 0. Então, temos que p(k).p(1/k) = p(k) + p(1/k) = 0. Logo, p(x) = 0 é uma equação recíproca, que tem a propriedade: os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais ou simétricos. Em virtude disso, p pode ser representado assim:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \pm a_{n-1}x \pm a_n.$$

Logo,

$p\left(\frac{1}{x}\right) = a_n/x^n + a_{n-1}/x^{n-1} + \cdots \pm a_{n-1}/x \pm a_n$ e, por conseguinte,

(1) $p(x).p\left(\frac{1}{x}\right) = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 \ldots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2 + a_n^2\left(\frac{1}{x}\right)^n + Q(x)$ = 2

$a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2\left(\frac{1}{x}\right)^n + Q(x)$, em que Q(x) = soma restante dos termos com potências de x ou de 1/x.

$$(2)\ p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) = \pm 2a_n + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + R(x).$$

Da igualdade polinomial $p(x).p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right)$ e por (1) e (2), obtemos:

$2a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = \pm 2a_n$ e $a_n^2 = a_n$. Decorre desta última igualdade:

$a_n = 0$ ou $a_n = 1$, o que implica $a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 \ldots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = 0$.

Como p(3) = 28, então $a_n \neq 0$. E $a_n = 1$ => $p(x) = x^n + 1$. Disso vem:

$p(3) = 3^n + 1 = 28 \Rightarrow n = 3$. Logo, $p(x) = x^3 + 1$ e p(4) = 65.

A alternativa certa é (E).

DRN-P87:

Primeiro mostre que a série é convergente no intervalo (-1, 1) usando o teorema da convergência.

Depois, use propriedades das séries de potências para a função h(x) = $\frac{1}{x-1}$ que impliquem o resultado desejado.

DRN-P88:

Observe que $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

▶ **Resp.:** (**C**).

DRN-P89:

Basta observar que x = 1 e x = 0 anulam o determinante. Ao dividir o polinômio do determinante por x(x - 1) obtemos $x^2 - 2x + 2$, que não tem raízes reais.

▶ **Resp.:** (**C**).

DRN-P90:

Sabemos que $4 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Pondo x = $a + b + c$, obtemos:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 12 \text{ e } ab + bc + ca = \frac{x^2-4}{2}. \text{ (1)}$$

Seja D o determinante dado. Então, usando o teorema de Jacobi nas linhas, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ a+c & a+b & b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+c & a+b & b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

E usando a regra de Chió obtemos:

$$D = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} b-c & b-a \\ a-b & a-c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Disso e de (1) chegamos em D = D(x) = $2x(4 - \frac{x^2-4}{2}) = -x^3 + 12x$. Derivando D(x) duas vezes, obtemos: $D'(x) = -3x^2 + 12$ e $D''(x) = -6x$. E $D'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou x = - 2. Segue disso $D''(2) = -12 < 0$ e $D''(-2) = 12 > 0$. Logo, D tem máximo local em x = 2. Como as raízes de $D(x) = -x^3 + 12x = x(12 - x^2)$ são 0 e $\pm\sqrt{12}$, então D(2) = 16 é o valor máximo de D no intervalo fechado [$-\sqrt{12}, \sqrt{12}$], isto é, se $x^2 \leq 12$, que decorre da condição imposta no enunciado: $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

DRN-P91:

Use polinômios simétricos (fórmulas de Newton), congruência modular e indução forte com n ≥ 3.

Usando as fórmulas de Newton e a equação dada, deduzimos: Para n ≥ 3:

$S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}$, onde

$$S_n = a^n + b^n, a = 3 + \sqrt{2} \text{ e } b = 3 - \sqrt{2}\,.$$

Usando Z_5, ou seja congruência módulo 5, obtemos:

$S_1 = 6 \equiv 1 \pmod 5 \leftrightarrow \overline{S_1} = \overline{1} \neq \overline{0}$; $\overline{S_2} = \overline{4} \neq \overline{0}$; $\overline{S_3} = \overline{4} - \overline{1} = \overline{3} \neq \overline{0}$; por indução forte, suponhamos que $\overline{S_k} = \overline{S_{k-1}} - \overline{S_{k-2}} \neq \overline{0}$ e $\overline{S_{k-2}} \neq \overline{0}$.

Mostremos que $S_{k+1} \neq \overline{0}$. Temos que

$$\overline{S_{k+1}} = \overline{S_k} - \overline{S_{k-1}} = \overline{S_{k-1}} - \overline{S_{k-2}} - \overline{S_{k-1}} = -\overline{S_{k-2}} \neq \overline{0}.$$

Logo S_n é um inteiro não divisível por 5. Observe que em virtude de S_1, S_2 e S_3 serem inteiros e $S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}$, deduzimos que S_n é inteiro para n ≥ 3. Isso permitiu usar Z_5.

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DE C → C

A derivada da potência real $f(x) = x^n$ é dada por $f'(x) = nx^{n-1}$. Logo, usando as propriedades operacionais da derivação de funções reais, a derivada da função polinomial $f: R \to R$ tal que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots\ + a_1 x + a_0, \text{ é}$$

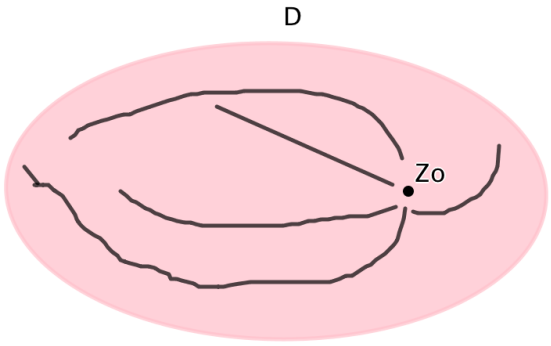
$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ \ldots\ + a_1.$$

Por exemplo, se $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 4x - 8$, então, $f'(x) = 15x^4 + 8x^3 - 6x + 4$.

Queremos agora conceituar a derivada de uma função complexa $f: D \subset C \to C$, em que *D* é um aberto em *C*. De modo análogo ao caso real, definimos a *derivada de* f *em um ponto* z_0 de *D*, indicada por $f'(z_0)$, como o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Nessa definição, o h é um número complexo não nulo que deve se aproximar de 0 por qualquer direção em D. E $z_0 + h$ pertence a *D*. Logo, $z_0 + h$ se aproxima de z_0 por qualquer caminho em D. Se a derivada existe em z_0 dizemos que a função f é **holomórfica em** z_0. E dizemos que f é **holomórfica em D** se ela é holomórfica em todo ponto de D. Quando f for holomórfica em todo o C diremos que ela é uma função **inteira.** A figura esboçada à frente ilustra os diferentes caminhos de aproximação de z_0 em um aberto D em C.



Uma propriedade extraordinária das funções holomórficas é que elas possuem derivadas de todas as ordens. Em outras palavras, a derivada de toda função complexa derivável é também derivável. Isso não vale para as funções deriváveis reais, de um modo geral. Por outro lado, as funções holomórficas gozam de propriedades análogas das derivadas das funções reais, tais como a derivada da soma, derivada do produto e do quociente e a derivada da composta. É fácil verificar que a derivada de $f(z) = z$ é $f'(z) = 1$ e de uma função constante é 0. Usando a derivada do produto e indução obtemos que a derivada da função potência $f(z) = z^n$ é $f(z) = nz^{n-1}$. Logo, usando esses resultados e a derivada da soma deduzimos que a derivada de uma função polinomial em *C,*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \ldots \ + \ a_1 z + a_0, \text{ é}$$

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} z^{n-2} + \ \ldots \ + \ a_1, \text{ para todo } z \text{ de } C.$$

Ou seja, toda função polinomial complexa é uma função inteira. Um exemplo de uma função complexa, que não é holomórfica em ponto algum de *C,* é a função definida por $f(z) = \bar{z}$, para todo z de *C.*

Perceba que o quociente de Newton dessa função é $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$. Se h tende a 0 por valores reais, esse quociente tem valor 1. E se h tende a 0 por valores puramente imaginários, o quociente tem valor -1. Logo, a derivada(limite) não existe em qualquer z_0 de C.

Consideremos agora a representação algébrica de uma variável complexa: z = u + iv. Então, podemos associar a cada função de valor complexo $w = f(z) = u + iv$ a função $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ de R^2 em R^2. Já vimos antes, que a derivada de F é a jacobiana

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix}.$$

Supondo que f seja holomórfica em um ponto P = (x, y), deduzimos que sua derivada em P é um número complexo w . Sua representação matricial tem a forma $w = f'(P) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Como essa jacobiana representa um número complexo, então ele deve satisfazer à sua forma padrão, o que implica $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Essas são as conhecidas *condições de Cauchy-Riemann.* Concluímos, assim, *que se uma função complexa $f: D \subset C \to C$ é holomórfica em um ponto P, então valem as condições de Cauchy-Riemann*. Embora a recíproca dessa proposição não seja verdadeira, há uma situação geral em que essa recíproca é verdadeira, que é a seguinte: *quando as derivadas parciais são contínuas no ponto P.* Um fato interessante, que pode ser verificado facilmente, é que $\det J_F(x,y) = |f'(z)|^2$, z = x + iy.

De modo análogo ao que fizemos com as séries de potências reais definimos as séries de potências complexas. Elas possuem propriedades análogas às das séries de potências reais, com algumas peculiaridades. Por exemplo, é fácil ver que toda função complexa analítica é holomórfica(derivável). *Mas é surpreendente que toda função complexa holomórfica seja também* analítica *e, assim, possamos permutar os termos função holomórfica e função* analítica*!*

Um resultado notável decorrente da definição de derivada é que toda função holomórfica(analítica) em um aberto $D \subset C$ é **conforme.** Isto quer dizer que a função holomórfica conserva ângulos orientados e, por conseguinte, se comporta à semelhança da inversão homográfica $f(z) = \frac{1}{z}$, preservando os ângulos entre duas curvas que se intersectam em um ponto z_0 de D. A razão principal dessa propriedade é que na definição de derivada não importa o caminho

escolhido para se aproximar do ponto z_0 o limite deve ser o mesmo. Para maior clareza, vamos considerar em $D \subset C$ uma curva parametrizada h dada por $z = z(t), t \in [a, b]$. E seja $f: D \subset C \to C$ uma função holomórfica. Então, $w(t) = f(z(t))$ define uma curva h' no plano-w que é a imagem de h. Nestas condições, temos que $w'(t) = f'(z(t)).z'(t)$. Interpretemos o siginificado disso em um ponto $z_0 = z(t_0)$, com $z'(t_0) \neq 0$ e $f'(z_0) \neq 0$. Segue disso que $w'(t_0) \neq 0$. Logo h' tem uma tangente em $w_0 = f(z_0)$ e sua direção é determinada por $\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$, que equivale a $\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0)$.

Essa igualdade assegura que o ângulo orientado entre as tangentes $w'(t_0)$ e $z'(t_0)$ é igual a $\arg z'(t_0)$. E esse ângulo não depende da curva h, pela própria definição de derivada. Logo, se duas curvas se intersectam em z_0 formando um ângulo θ, então suas imagens por f se intersectam em $f(z_0)$ formando um ângulo θ, com a mesma direção e o mesmo módulo. Esta impressionante propriedade de todas as funções analíticas(holomorfas), nos leva a compreender a importância dada às características geométricas das funções homográficas, descritas no capítulo anterior, de forma breve, e dentre elas o destaque dado à inversão $f(z) = \frac{1}{z}$. Revendo a fórmula geral das funções homográficas, F(z) = $\frac{az + b}{cz + d}$, tal que $ad - bc \neq 0$, em que a, b, c e d são constantes complexas, vemos que elas são analíticas em quase todo o plano C. O que confirma a propriedade anteriormente anunciada.

Consideremos o caso de uma transformação linear F de *C* em *C* : $F(z) = az + k$, a real.

Temos que $F'(z) = a$. A jacobiana associada a F é $J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

que é a representação matricial do número complexo $a + 0.i = a$. Verifique que $\det J_F(x, y) = |F'(z)|^2 = a^2$. Sabemos que a transformação linear F* de R^2 em R^2 correspondente representa uma homotetia de razão a no plano R^2. Ou seja, se um polígono M de R^2 tem área S, então F*(S) tem área igual a S.a^2 = S.det J_F. Como para toda função analítica f em um aberto conexo D em C, vale $\det J_F(x, y) = |f'(z)|^2$, então concluímos que na vizinhança de um ponto z_0, com $f'(z_0)) \neq 0$, um quadrado de lado r muito pequeno, é aplicado em uma região do plano-imagem, com área aproximadamente igual a $r^2.|f'(z_0)|^2$.

Daí podemos conjecturar uma maneira de calcular a área da imagem de uma região M de C fazendo uma decomposição dela em uma cobertura de pequenos quadrados e somando as áreas correspondentes com a fórmula $r^2.|f'(z)|^2$. Levando isso ao limite, como uma soma de Riemann-Lebesgue, chegaremos no resultado desejado. É claro, que várias hipóteses e conceitos relacionados precisam ser bem definidos para que isso seja bem formalizado. Mas já é uma aproximação da conhecida fórmula de mudança de variável de que falaremos no último capítulo.

Esse tipo de integração de tópicos é parte fundamental do método que defendemos no presente livro - o das aproximações multifárias. Quanto mais integramos conceitos e teorias, mais aproximações percebemos e consequentemente aprimoramos o nosso conhecimento do todo e das partes, bem como de suas interações, da realidade estudada. Mais uma vez, estamos mostrando a relevância do princípio holístico de Pascal combinado com as aproximações multifárias, que denominamos de Princípio Holístico de Pascal Aproximado.

Outras peculiaridades das funções analíticas surgem quando comparamos com as funções analíticas reais, de mesmo nome, como é o caso da função exponencial. A função exponencial complexa é periódica e a exponencial real não o é.

Analisemos, com mais detalhes, a função exponencial complexa $f(z) = e^z$. Sua expressão em série de potências(Taylor) é

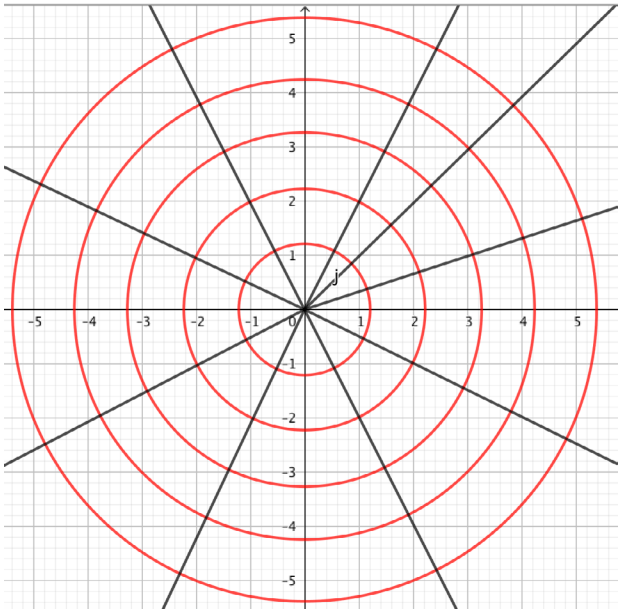
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

Veja que derivando termo a termo obtemos: $f'(z) = e^z$. E fazendo a substituição $z = iy$, obtemos a famosa fórmula de Euler: $e^{iy} = cosy + iseny$. Isso se deve ao fato das funções trigonométricas reais $cosy$ e $seny$ serem também analíticas em R. É claro, que $senz$ e $cosz$, definidas pelas séries de Taylor análogas às séries reais correspondentes, são também analíticas em C e vale $e^{iz} = cosz + isenz$. Temos ainda que $e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + iseny)$.

Dado um conjunto de pontos $z = x + iy$ de C, o que faz a exponencial com ele?

Analisemos dois casos simples. Suponha que x seja constante, x = k. Então temos uma reta vertical em C. Sua imagem é a circunferência $e^z = w = e^k(cosy + iseny)$ de raio e^k e centro na

origem O. Se y = k, então temos uma reta horizontal em C. Sua imagem é $w = e^x(cosk + isenk)$ que representa uma semi-reta com origem em O. Perceba com esses exemplos a presença da propriedade de ser uma transformação conforme em C. No domínio da função exponencial temos retas verticais que são perpendiculares a retas horizontais. As imagens delas são curvas ortogonais(perpendiculares). A figura esboçada a seguir ilustra isso.



Uma outra propriedade da exponencial complexa que a diferencia da exponencial real é que a complexa é sobrejetiva de C em C*. Perceba que

$e^z = e^x(cosy + iseny) = e^xcosy + ie^xseny = w = u + iv$, para qualquer w não nulo.

Uma propriedade que também merece ser mencionada aqui é a seguinte: *A extensão* analítica *de uma função real para uma função complexa, quando existe, ela é única. E, além disso, a derivada* $f'(z)$ *é a extensão* analítica *de* $f'(x)$.

Um texto, que apresenta aplicações das transformações conformes na Física, pode ser acessado no **Código QR(I)**.

Dois vídeos que ilustram de modo bem compreensivo e bonito as várias formas de apresentação das principais funções complexas elementares podem ser acessados nos links indicados a seguir.

Acesse o Código QR(II) e **o Código QR(III)**.

QR (I) QR (II) QR (III)

INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA

Seja D um aberto conexo em C. Isto significa que dados dois pontos de D, existe uma curva contínua em D ligando esses pontos.

A *integral de uma função* $f: D \subset C \to C$ *ao longo de uma curva* $h = h(t)$,

$t \in [a,b]$, com h' contínua em $[a,b]$, é o número complexo

$$\int_h f(z)dz = \int_a^b f\big(h(t)\big)h'(t)dt.$$

Uma curva com essa propriedade(derivada contínua) é denominada de *curva suave*. Essa definição pode ser estendida para uma curva suave por partes. A curva fechada simples é aquela que não tem auto-interseções, o que também quer dizer que ela é injetiva em $[a,b)$.

Se $f: D \subset C \to C$ é uma função contínua, então denominamos de **primitiva** de f a toda função holomorfa(analítica) $F: D \subset C \to C$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo ponto $z \in D$.

Com esses conceitos temos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo:

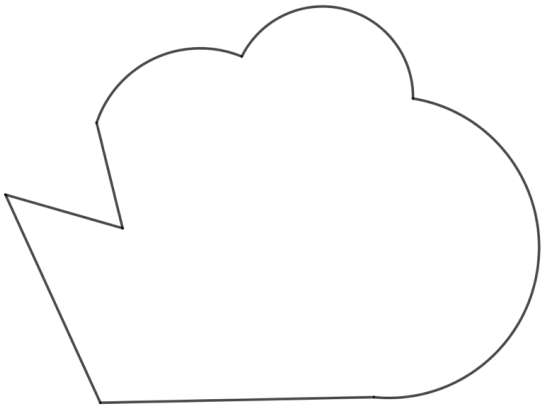
Seja $f: D \subset C \to C$ uma função contínua*, em que D é um aberto simplesmente conexo em C. Se* $F: D \subset C \to C$ *é uma primitiva de* f *e h é uma curva suave por partes em D, unindo o ponto* z_0 *ao ponto* z_1*, então*

$$\int_h f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

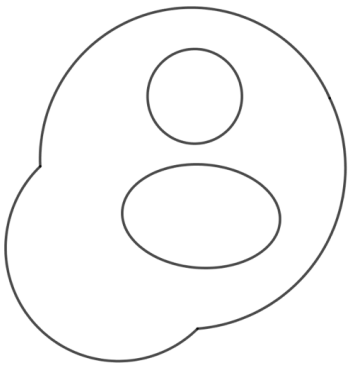
Em particular, se h é uma curva fechada simples, então

$$\int_h f(z)dz = 0.$$

Obs.: Um conjunto simplesmente conexo do plano goza da seguinte propriedade: toda curva contínua simples fechada contida nele tem seu interior contido nele também. Em linguagem informal é uma região do plano sem 'buraco". Perceba que um conjunto simplesmente conexo é uma generalização imediata de um conjunto convexo. É uma espécie de "deformação contínua" de um conjunto convexo. Ou seja, um conjunto conexo se caracteriza por se aproximar continuamente de um conjunto covexo. Em última análise, ele é equivalente, por deformação contínua, a uma bola. A figura a seguir ilustra isso.



É Simplesmente conexo



Não é Simplesmente conexo

As funções do tipo $f(z) = az^n$ têm como primitivas as funções do tipo $F(z) = \frac{az^{n+1}}{n+1}$.

As funções polinomiais também têm primitivas. E as generalizações dessas funções que são as funções analíticas em um certo aberto conexo $D \subset C$ também têm primitivas, tais como $f(z) = e^z$, $f(z) = sen(z)$ e $f(z) = \cos(z)$.

Vamos concluir esse tópico mencionando a **Fórmula Integral de Cauchy** que é mais uma propriedade singular das funções analíticas complexas que não tem análoga nas funções analíticas reais.

Seja $f: D \subset C \to C$ *uma função* analítica *definida no aberto conexo D. Seja* $K \subset D$ *um disco fechado com circunferência h orientada no sentido anti-horário. Se z é um ponto interior de K, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_h \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad ou \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

A segunda fórmula está indicando que a integral de linha independe da circunferência(disco) escolhida. O surpreendente nesta fórmula de Cauchy é perceber que o valor da função em z, ponto interior de D, depende apenas dos valores que f assume sobre a fronteira de D.

Um corolário interessante dessa fórmula é o chamado **Princípio do Módulo Máximo**:

Seja $f: D \subset C \to C$ *uma função* analítica *definida no aberto conexo D. Suponha que exista um ponto* $z_0 \in D$ *tal que* $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ *para todo* $z \in D$. *Então* f *é uma função constante.*

Com este princípio podemos completar a explicação dada parcialmente, no capítulo anterior, na nota sobre uma classe de funções homográficas que são bijeções do disco aberto unitário nele mesmo. Para facilitar essa aproximação oportuna, copiamos em seguida a questão QI-166 e a nota relacionada.

"Considere as funções homográficas H_a, definidas por $H_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, para todo $z \in C$, $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$ e $|a| < 1$.

(i) Mostre que a inversa de H_a é dada por $H_{-a}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$.

(ii) Prove que a imagem da circunferência S^1 de equação $|z| = 1$, produzida por qualquer função H_a é a própria S^1.

(iii) Obtenha a imagem da circunferência L de equação $|z| = \frac{1}{4}$ produzida por uma função H_a Verifique que a imagem de L está no interior de S^1.

(iv) Obtenha a imagem da circunferência L de equação $|z| = \frac{1}{4}$ produzida pela inversão f(z) = 1/z. Compare com o resultado de (iii).

NOTA (Bijeções do Disco unitário)

Prova-se também, que essas funções homográficas aplicam o disco unitário aberto D(0, 1) sobre si mesmo. Esta afirmação é uma consequência do Princípio do Módulo Máximo, que apresentaremos no próximo capítulo. Ou seja, elas *são bijeções de D[0, 1] em D[0, 1]*. Além disso, o que é algo admirável, qualquer função complexa holomorfa(tem derivada diferente de 0 em D) que seja uma bijeção de D(0, 1) em si mesmo, tem a forma $f(z) = \lambda H_a(z)$ em que λ é um complexo com $|\lambda| = 1$. Detalhes sobre isso veja em [Soares, 1999] ou em [Lins Neto, 1993].

Perceba que a inversão $f(z) = 1/z$ é uma homografia que não goza dessa propriedade, embora ela leve também S^1 em S^1. Aliás, ela leva o D(0, 1) no complementar de D[0, 1] que é o exterior desse disco no plano complexo. No próximo capítulo falaremos sobre funções holomorfas."

Perceba a aplicação do Princípio do Módulo Máximo na justificativa da afirmação grifada na nota anterior. Suponha que exista algum $z_0 \in D(0, 1)$ tal que $|z_0| < 1$ e $|H_a(z_0)| > 1$, então por esse princípio, $|H_a(z)|$ seria constante, o que é absurdo. Portanto, $H_a(D(0,1))$ está contido em $D(0,1)$.

Um segundo corolário da Fórmula Integral de Cauchy é o **Teorema de Liouville**:

" Uma função analítica *e limitada no plano complexo C é uma função constante."*

A partir desse teorema se demonstra de forma breve o Teorema Fundamental da Álgebra. Basta ver que se um polinômio P(z) nunca é 0, então 1/P(z) é analítica no plano C. E em consequência disso ela é contínua, o que implica ser limitada em valor absoluto, em qualquer disco fechado de raio r, centrado na origem. Por outro lado P(z) tende ao infinito quando z tende ao infinito; logo, 1/P(z) tende a zero, em valor absoluto. Portanto, 1/P(z) é limitada em todo o C. Pelo Teorema de Liouville 1/P(z) é constante, o que é absurdo. Portanto, P(z) = 0 para algum z de C.

QP-92. (**IME_1990/1991**). Mostre que o número

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$ é racional.

QP-93. (**ITA-2019).** Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ um polinômio cujas raízes são não negativas e estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma de seus coeficientes é igual a 10, podemos afirmar que a soma das raízes de p(x) é igual a

A) 9. **B)** 8. **C)** 3. **D)** 9/2 **E)** 10.

▶ **Resp.:** (**A**).

QP-94. **(IME-1996/1997).** Determinar o resto da divisão do polinômio $(\cos ø + x\,\text{sen}ø)^n$ por $x^2 + 1$, em que n é um número natural.

QP-95. (**IME-1996/1997**). Se tga e tgb são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = sen^2(a+b) + psen(a+b)\cos(a+b) + qcos^2(a+b).$$

Considere p, q $\in R$, com q $\neq 1$.

QP-96. (**ITA-2013**). Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in R$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x, $x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2, 2[$.

QP-97. (**IME-2013**). Os polinômios $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ e $Q(x) = x^3 + bx + 12$ possuem duas raízes comuns. Sabendo que a e b são números reais, pode-se afirmar que satisfazem a equação

A) a = b. **B)** 2a = b. **C)** a = 2b. **D)** 2a = 3b. **E)** 3a = 2b.

QP-98. Seja $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio de coeficientes reais e raízes reais. Prove que se $|f(i)| = 1$, então a = b = c = d = 0.

QP-99. (**ITA-2015**). Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

A) Determine o número de elementos de S.

B) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

QP-100. (**Eslováquia, 2004**). Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio quadrático com coeficientes reais não negativos. Prove que para qualquer número positivo x, $P(x).P(1/x) \geq (P(1))^2$.

QP-101. (**IME-1978/1979**). Seja a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, cujas raízes são: a, b, c. Determine s, t e u, em função de p, q e r, para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes bc, ca e ab.

QP-102. (**ITA-2010**). Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}, n = 1, 2, \ldots, 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin R$;

II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, para todo $x \in [-1, 1]$;

III. $a_8 = a_4$,

é(são) verdadeira(s) apenas

A) I. **B)** II. **C)** III. **D)** I e II. **E)** II e III.

QP-103. Resolva o sistema $x + y + z = 1$ e $xyz = 1$, sabendo que x, y e z são números complexos de módulos iguais a 1.

QP-104. Prove que

$$\sqrt[3]{\cos(\frac{2\pi}{7})} + \sqrt[3]{\cos(\frac{4\pi}{7})} + \sqrt[3]{\cos(\frac{8\pi}{7})} = \sqrt[3]{\frac{(5 - 3\sqrt[3]{7})}{2}}.$$

Obs.: Vale a pena tentar resolver esta questão antes de consultar a dica ou a resolução. O esforço será recompensado, mesmo que você não tenha logrado êxito nas tentativas feitas. De vez em quando, é importante enfrentar uma questão mais desafiadora, pois isso ajuda a consolidar e integrar conhecimentos adquiridos, ajudando no fortalecimento da autonomia e da maturidade no seu processo de aprendizagem.

QP-105. (**Olimpíada de Matemática da China ocidental - 2005**). Suponha que $\alpha^{2005} + \beta^{2005}$ possa se expressar como um polinômio em $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$. Achar a soma dos coeficientes do polinômio.

QP-106. (**IMO-1976**). Seja $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$, $j = 2, 3, \ldots$. Mostrar que para n arbitrário as raízes da equação $P_n(x) = x$ são reais e diferentes entre si.

QP-107. Prove que as raízes do polinômio $P(z) = z^7 + 7z^4 + 4z + 1$ estão no interior do disco de raio 2 centrado na origem do plano complexo.

QP-108. Prove que para todo número primo p, o polinômio $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ é irredutível em Z[x].

QP-109. Prove que o polinômio $P(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ é irredutível sobre Z[x].

QP-110. (**Olimpíada de Matemática da Hungria - 1999**). O polinômio $x^4 - 2x^2 + ax + b$ tem quatro raízes reais e distintas. Mostre que o valor absoluto de cada raiz é menor do que $\sqrt{3}$.

QP-111. (**Olimpíada Ibero-Americana - 2005**). Ache o maior número real k com a propriedade de que para todos os polinômios de quarto grau $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujas raízes são todas reais e positivas, se tenha $(b - a - c)^2 \geq kd$, e determine quando a igualdade vale.

QP-112. (IME-2017/2018). Resolva a inequação a seguir, em que x é uma variável real.

$$2|x^3| - 6x^2 + 3|x| + 2 < 0 \quad .$$

QP-113. (**Olimpíada de Matemática da Romênia - 1995**). Seja $a \neq 0$ um número real e n > 2 um inteiro. Prove que cada raiz não real z da equação polinomial $x^n + ax + 1 = 0$ satisfaz a desigualdade $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$.

DICAS-RESOLUÇOES-NOTAS-P(3)

DRN-P92:

Designe por x o número dado e coloque $D = \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$. Obtenha $x^3 = 6 - 5x$.

Verifique que a única raiz real dessa equação é 1.

DRN-P94:

Verificamos que i e - i são raízes de $x^2 + 1$. Pelo teorema da divisão euclidiana temos que o resto é da forma r(x) = ax + b.

E pelo teorema do resto, temos que p(i) = $(cos\theta + isen\theta)^n$ = r(i) e p(- i) = $(cos\theta - isen\theta)^n$ = r(- i).

Usando a fórmula de Moivre, obtemos r(i) = ai + b = $cosn\theta + isen\, n\theta$ => a = $sen\, n\theta$ e b = $cosn\theta$.

Logo, o resto é r(x) = $(sen\, n\theta)x$ + $cosn\theta$.

DRN-P95:

Pelas relações de Girard temos que: $\frac{sena}{cosa} + \frac{senb}{cosb} = -p$ e $\frac{sena}{cosa} \cdot \frac{senb}{cosb} = q$.

Disso e da soma de arcos segue

$$sen(a + b) = -pcosa\cos b$$

$$\cos(a + b) = (1 - q)cosa\cos b.$$

E a partir dessas fórmulas e da relação fundamental, obtemos $cos^2 a.cos^2 b = \frac{1}{p^2 + (1-q)^2}$, o que implica

$$sen^2(a + b) = \frac{p^2}{p^2 + (1-q)^2}\ ,\ cos^2(a + b) = \frac{(1-q)^2}{p^2 + (1-q)^2} \text{ e}$$

$$sen(a + b)\cos(a + b) = \frac{-p(1-q)}{p^2 + (1-q)^2}\ .$$

Substituindo esses valores na expressão dda, encontramos

$$y = \frac{p^2 - p^2(1-q) + q(1-q)^2}{p^2 + (1-q)^2} = q.$$

DRN-P96:

Pelas relações de Girard deduz-se que a = 1.

▶ **Resp.:** m = 6.

DRN-P97:

Designando as raízes não comuns por p e q,respectivamente, use as relações de Girard para P(x) e Q(x) e obtenha dois pares de equações, com as quais chegará em q = -2a e p = -3a. A seguir, resolva as equações P(p) = 0 e Q(q) = 0 para concluir que b = 2a, sendo a = 1 a única raiz real de P(p) = 0.

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P98:

Basta mostrar que as quatro raízes são nulas, usando o método da redução ao absurdo. Para isso, usemos a forma fatorada de f(x) e seu módulo.

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \Rightarrow$$

$$|f(i)| = 1 = |(i - x_1)(i - x_2)(i - x_3)(i - x_4)| =$$

$$|(-x_1 + i)(-x_2 + i)(-x_3 + i)(-x_4 + i)|.$$

Temos que $|-x_k + i| = \sqrt{x_k^2 + 1} \geq 1$, para k = 1, 2, 3 e 4.

Se alguma raiz x_k for diferente de 0, então $|-x_k + i| > 1$, o que implicará $1 = |(-x_1 + i)(-x_2 + i)(-x_3 + i)(-x_4 + i)| > 1$, que é um absurdo.

DRN-P99:

Seja $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Temos que 3 desses coeficientes são iguais a 2 e dois são iguais a 1.

A) As listas de coeficientes são agrupamentos de 5 elementos. Podemos considerá-los como permutações com repetição. Portanto, o número de elementos de S é $P_{3,2}^5 = 10$. Também poderíamos fazer a contagem dos agrupamentos usando combinações: $C_{5,3} = C_{5,2} = 10$. Nesse caso, interpretamos assim: dentre 5 coeficientes, devemos escolher três para serem iguais a 2.

B) Soma dos coeficientes = P(1) = 8 = $a+b+c+d+e$ e

$$\text{P}(-1) = 0 = a-b+c-d+e.$$

Disso segue $b+d=a+c+e=\frac{8}{2}=4$, que implica $b=d=2$, pois o maior valor de um coeficiente é 2. Com esses valores, obtemos:

$$\text{P}(x) = ax^4+2x^3+cx^2+2x+e.$$

Restam por determinar a, c e e que podem assumir os valores 2, 1 e 1. Temos, assim três possibilidades:

$$a=2 \rightarrow \text{P}(x) = 2x^4+2x^3+x^2+2x+1,$$
$$c=2 \rightarrow \text{P}(x) = x^4+2x^3+2x^2+2x+1,$$
$$e=2 \rightarrow \text{P}(x) = x^4+2x^3+x^2+2x+2.$$

DRN-P100:

Desenvolver e simplicar o produto. A seguir usar adequadamente MA ≥ MG.

DRN-P101:

Aplicar as relações de Girard.

▶ **Resp.:** s = - q; t = rp e u = - r^2.

DRN-P102:

(I) Deduza que $a_n = a_{n-4}$, para *n* ≥ *4* e obtenha P(-1) = 0.

(II) Use a desigualdade triangular generalizada.

▶ **Resp.:** (**E**).

DRN-P103:

Use o conjugado para obter xy + yz + xz = 1. Deduza, usando Girard, que x, y e z são as raízes do polinômio $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$, cujas raízes são 1, i e -i. As soluções do sistema são, pois, todas as permutações dessas três raízes.

DRN-P104:

Parte-1. Vamos, primeiramente, encontrar um polinômio com as raízes $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ e $\cos\frac{8\pi}{7}$. É uma aproximação no sentido do que desejamos alcançar, que é um polinômio com as raízes cúbicas dessas três raízes.

Perceba que as raízes sétimas da unidade, diferentes de 1, são as raízes de (*) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, que se representam por $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{7}$, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por outro lado, a equação (*) é recíproca e de expoente par, o que permite a transformação y = x + 1/x, resultando em

(**) $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

Como $x + 1/x = x + \bar{x} = 2\cos\frac{2k\pi}{7}$, então as raízes de (**) são: $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$ e $2\cos\frac{8\pi}{7}$.

Parte-2.

Agora estamos mais próximos da solução.

Façamos $a^3 = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $b^3 = 2\cos\frac{4\pi}{7}$ e $c^3 = 2\cos\frac{8\pi}{7}$. Com esta notação, a soma que queremos é $S = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(a + b + c)$.

Usando as relações de Girard em (**) obtemos:

(1) $a^3 + b^3 + c^3 = -1$; $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = -2$ e $a^3b^3c^3 = 1$.

Recordemos da fatoração: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$. Dela decorre:

$(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 - 3(abc)^2 = (ab + bc + ca)[(ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c)]$. Indicando $u = a + b + c$ e $v = ab + bc + ca$ nessas duas fatorações e usando (1), obtemos o sistema:

$$(2)\quad \begin{cases} u^3 - 3uv = -4 \\ v^3 - 3uv = -5 \end{cases}.$$

De (2) resulta: $u^3v^3 = 9(uv)^2 - 27uv + 20 = 0$. Colocando $m = uv$ chegamos na equação $m^3 - 9m^2 + 27m - 20 = 0$, que equivale a $(m - 3)^3 + 7 = 0$.

Resolvendo-a obtemos a única solução real : $m = 3 - \sqrt[3]{7}$. Substituindo esse valor de m nas equações do sistema (2) resulta: $u = \sqrt[3]{3m - 4} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$ e por conseguinte

$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}\right) = \sqrt[3]{\frac{(5 - 3\sqrt[3]{7})}{2}}.$$

DRN-P105:

Seja $S_k = \alpha^k + \beta^k$ a soma dos coeficientes do polinômio em $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$. Para se obter essa soma devemos por $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha\beta = 1$ na expressão desse polinômio. Mas, em virtude dessa condição, α e β são as raízes da equação $x^2 - x + 1 = 0$. Encontre α e β e use a fórmula de Moivre para obter $\alpha^k + \beta^k = 2\cos(k\frac{\pi}{3})$. Conclua que $S_k = 1$, para $k = 2005$.

Obs.: Um outro caminho é usar $(\alpha + \beta)(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}) = (\alpha^k + \beta^k) + \alpha\beta(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2})$ para obter $S_k = S_{k-1} - S_{k-2}$ e deduzir que $S_k = S_{k-6}$, o que implica a sequência (S_k) ser periódica de período 6. Logo, $S_{2005} = S_{2004+1} = S_1 = \alpha + \beta = 1$.

DRN-P106:

1) Verifique que o grau da equação $P_n(x) = x$ é 2^n.

2) Verifique, por indução, que: a) se $x > 2$, então $P_n(x) > x$, para todo n; b) se $x < -2$, então $P_n(x) > 2$, para todo n. Ou seja, as raízes estão no intervalo [-2, 2].

3) Para obter as raízes faça $x = 2\cos t$ e chegue em $P_n(2\cos t) = 2\cos 2^n t$.

4) Resolva a equação $\cos 2^n t = \cos t$ e encontre as 2^n soluções distintas entre si:

$t = \frac{2k\pi}{2^n - 1}\ (k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1)$ e : $t = \frac{2k\pi}{2^n + 1}\ (k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1})$.

DRN-P107:

Provar por contradição.

Suponha que exista um z, com $|z| \geq 2$, tal que $P(z) = 0$. Aplique a desigualdade triangular em $\left|\frac{P(z)}{z^7}\right|$, assim:

$$0 = \left|\frac{P(z)}{z^7}\right| = \left|1 + \frac{7}{z^3} + \frac{4}{z^6} + \frac{1}{z^7}\right| \geq \left|1 - \left(\left|\frac{7}{z^3}\right| + \left|\frac{4}{z^6}\right| + \left|\frac{1}{z^7}\right|\right)\right| = \frac{7}{128} > 0.$$

DRN-P108:

Vamos usar o critério de Eisenstein. Recordando o que diz esse critério:

Se P(x) $\in Z[x]$ e existe um número primo p tal que p $\nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$ e p / a_k,

k = 0,1, ..., n - 1, então P(x) é irredutível em $Z[x]$.

Para aplicar esse critério, vamos precisar fazer o seguinte artifício: Mostrar que F(x) = P(x + 1) é irredutível. Como isso implica que P(x) é irredutível, assim conclui-se a resolução. Mostremos, pois, que F(x) = P(x + 1) é irredutível.

Observe que, $P(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$. Disso e do binômio de Newton segue que,

$$F(x) = P(x + 1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + px^{p-2} + \cdots + p.$$

Agora podemos aplicar o critério de Eisenstein. Vemos que p não divide 1 e nem p^2 divide p, mas p divide os termos intermediários de P(x). Logo, P(x) é irredutível.

Obs.: Para você perceber, de forma mais clara, a validade do artifício apresentado no início dessa resolução, suponha que P(x) não seja irredutível. Então, existem polinômios g e q tais que P(x) = g(x).q(x). Isso implica que P(x + 1) = g(x + 1)q(x + 1), o que é um absurdo.

DRN-P109:

Usar o critério de Eisenstein, combinado com o binômio de Newton, para provar que P(x - 1) é irredutível. Disso segue que P(x) é irredutível também. Veja a observação anterior. Perceba que 101 é primo.

DRN-P110:

Use as relações de Girard para obter $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = 4$, em que m, n, p e q são as raízes do polinômio. Aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para chegar em $3(n^2 + p^2 + q^2) \geq (n + p + q)^2$.

Como n, p e q são distintas, então vale a desigualdade estrita(>). Conclua que $4 > 4m^2/3$, o que implica $|m| < \sqrt{3}$. De modo análogo procedemos com as outras raízes.

DRN-P111:

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes de P(x). Use as relações de Girard para obter uma expressão para b - a - c. A seguir aplique MA ≥ MG para obter b - a - c ≥ $14\sqrt{d}$. Conclua que k = 196. Finalmente, com a condição MA = MG, deduza que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ e, por conseguinte, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

DRN-P112:

Observe que 2 e - 2 são raízes do polinômio do 1º membro. Analise os dois casos: x ≥ 0 e x < 0.

▶ **Resp.:** S =] -2, $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ [∪] $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, 2 [.

DRN-P113:

Seja $z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, $\operatorname{sen} t \neq 0$. Use a fórmula de Moivre e a igualdade de números complexos para chegar no sistema:

(1) $\begin{cases} |z|^n \cos(nt) + a|z| \cos t + 1 = 0 \\ |z|^n \operatorname{sen}(nt) + a|z| \operatorname{sen} t = 0. \end{cases}$

De (1) obtenha $|z|^n \operatorname{sen}(n-1)t = \operatorname{sen} t$. Agora, use a propriedade citada na questão QT-119 e conclua.

CONVEXIDADE E DESIGUALDADE

Considere um ponto P = (x, y) de um segmento de reta AB do plano cartesiano, em que A = (x_1, y_1) e B = (x_2, y_2). Podemos determinar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B assim:

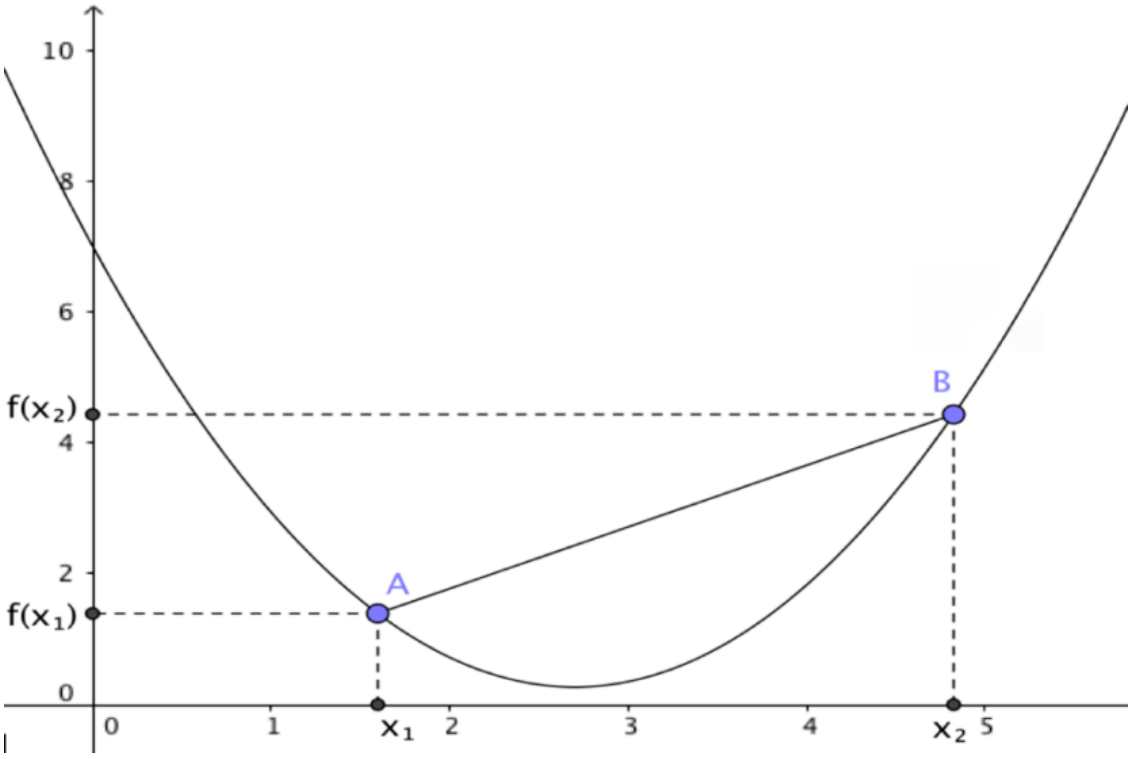
$$P = (1 - t)A + tB, \; t \in [0, 1],$$

que equivale a $x = (1 - t)x_1 + tx_2$ e $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. Um outro modo de descrever isso é $x = t_1x_1 + t_2x_2$ e $y = t_1y_1 + t_2y_2$, com $t_1, t_2 \in [0, 1]$ e $t_1 + t_2 = 1$.

Agora, vamos considerar uma função real f, definida em um intervalo $I = [x_1, x_2]$, que tenha a seguinte propriedade:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2), \text{ com } t_1, t_2 \in [0, 1] \text{ e } t_1 + t_2 = 1.$$

Dizemos que f é **convexa** em I. Em termos gráficos, isso significa que o gráfico de f, no intervalo I, está abaixo do segmento secante AB, em que A = $(x_1, f(x_1))$ e B = $(x_2, f(x_2))$, conforme ilustra a figura a seguir, em que temos o gráfico de uma função quadrática em um intervalo de seu domínio.



Também dizemos que uma função f : I $\subset R \to R$ é **côncava** se - f é convexa. Nesse caso temos o gráfico de f acima do segmento secante AB e a desigualdade ilustrada muda a ordem:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2), \text{ com } t_1, t_2 \in [0,1] \text{ e } t_1 + t_2 = 1.$$

Considere um segmento AB contido numa reta não vertical, em que A = (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B). Então, a equação dessa reta é dada pela regra de uma função afim: y = ax + b ou g(x) = ax + b. Verificamos, com facilidade, que

$$g(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) = t_1g(x_1) + t_2g(x_2) + \ldots + t_n g(x_n), \text{ para } t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1],$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1 \text{ e } x_1, x_2, \ldots, x_n \in [x_A, x_B].$$

Com isso, podemos generalizar a convexidade de uma função f para a forma $\mathbf{f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n)}$, a qual é conhecida como **Desigualdade de Jensen**.

Podemos provar essa desigualdade usando o princípio da indução finita, assim:

$t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = (1 - t_{n+1})\left(\frac{t_1x_1}{1-t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_nx_n}{1-t_{n+1}}\right) + t_{n+1}x_{n+1}$ e $\frac{t_1}{1-t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}} = 1$. Usando isso e a convexidade de f, temos que

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) = f[(1 - t_{n+1})x + t_{n+1}x_{n+1}] \leq$$
$$(1 - t_{n+1})f(x) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \text{ onde } x = \frac{t_1x_1}{1-t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_nx_n}{1-t_{n+1}}.$$

Usando agora a hipótese indutiva, obtemos:

$$(1 - t_{n+1})f(x) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \leq (1 - t_{n+1})\left(\frac{t_1f(x_1)}{1-t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_nf(x_n)}{1-t_{n+1}}\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) =$$
$$t_1f(x_1) + \ldots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Portanto,

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) \leq t_1f(x_1) + \ldots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Admitidos os 'pesos' t_i na condição apresentada, podemos dizer de modo aproximado, em palavras, o significado dessa desigualdade(que equivale à convexidade de f):

"*Para uma função convexa, a imagem da média ponderada de n números é igual ou menor do que a média ponderada das imagens deles.*"

Observe que se tomarmos $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1/n$, então obteremos o caso especial:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right),$$

o que significa dizer o seguinte: *para uma função convexa, a imagem da média aritmética de n números é igual ou menor do que a média aritmética das imagens deles.* Ou ainda, de modo mais breve:

"A imagem da média é igual ou menor do que a média das imagens."

As funções polinomiais de R em R, de um modo geral, são parcialmente convexas e parcialmente côncavas. Ou seja, elas são convexas em alguns intervalos e côncavas em outros. No caso das quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos uma situação excepcional: se $a > 0$, então f é convexa em R; e se $a < 0$, então f é côncava em R. Veja o gráfico da função polinomial f, de R em R, definida por

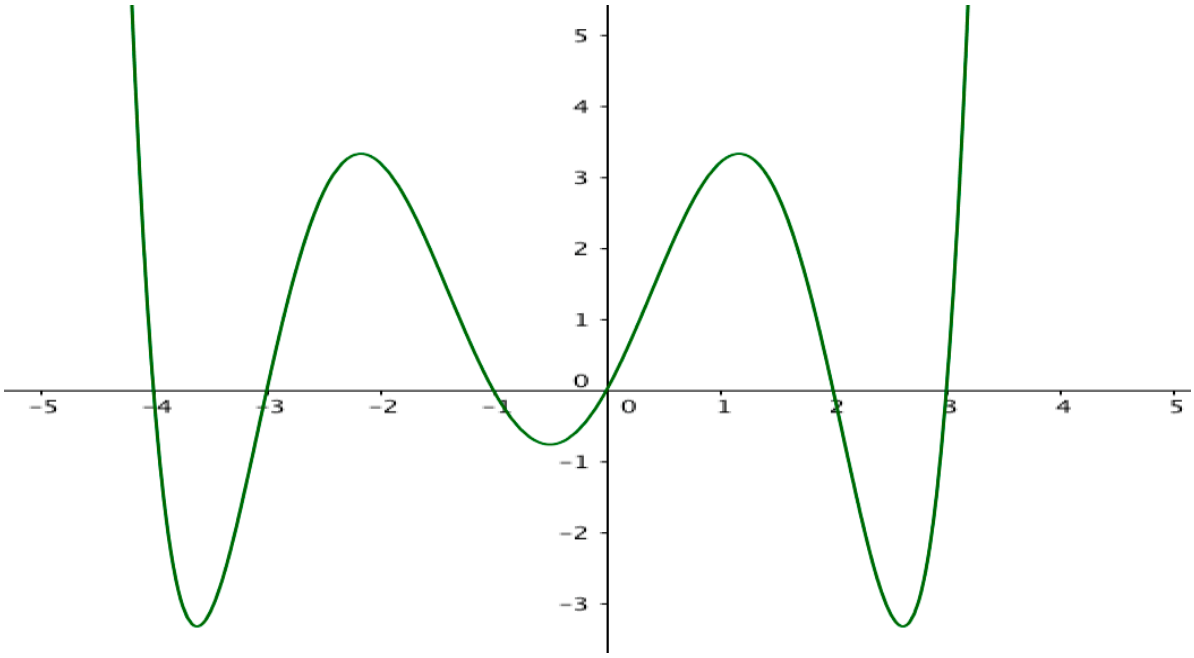
$$f(x) = x(x + 3)(x - 3)(x - 4)(x - 2)(x + 1)/25.$$

Há intervalos em que f é convexa e intervalos em que f é côncava. Mas podemos nos atrapalhar baseando-se, apenas, nas impressões primeiras que o gráfico nos oferece. O que fazer para sermos mais precisos na identificação dos intervalos em que f, de fato, é convexa ou é côncava?

Um dos caminhos é usarmos o comportamento da tangente ao gráfico. Isto é, usarmos o crescimento/decrescimento da derivada de f no intervalo considerado. Como isso é determinado pela segunda derivada, então basta verificarmos se f”(x) ≥ 0 ou f”(x) ≤ 0 nesse intervalo.

Evidentemente, f é convexa se f”(x) ≥ 0 e é côncava se f”(x) ≤ 0.

No caso da função quadrática temos que f”(x) = 2a. Logo, se a > 0, f é convexa e se a < 0, f é côncava. Essa ideia pode ser aplicada a todas as funções reais f que possuam f’ e f” em um dado intervalo de R. Quando f”(x) está definida em um intervalo (a, b), no qual ela muda de sinal, então temos um ponto x de (a, b) no qual *f”(x) = 0.* Um ponto como esse é chamado de *ponto de inflexão.* Esse tipo de ponto corresponde, no gráfico da função, ao ponto em que ele muda de côncavo para convexo ou de convexo para côncavo. Na função $f(x) = x^3$, x = 0 é um ponto de inflexão. A função polinomial f(x) = x(x + 3)(x - 3)(x – 4)(x – 2)(x + 1)/25, cujo gráfico é mostrado a seguir, tem quatro pontos de inflexão. As funções trigonométricas sen x e cos x têm infinitos pontos de inflexão em seu domínio R.



Uma função convexa muito importante é a função exponencial $f(x) = e^x$. De fato, $f''(x) = e^x > 0$. Ela é convexa em todo o seu domínio R. Por meio dessa propriedade podemos deduzir outras desigualdades, tais como a MA ≥ MG, a de Young, a de Holder e a de Minkowski.

QP-114. (**Das Médias MA-MG ponderadas**). Se $x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n$ são números positivos e $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, então $x_1^{t_1}.x_2^{t_2}...x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$.

QP-115 (**Desigualdade de Young**). Sejam x, y números reais positivos.

Se a, b > 0 e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, então $xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$.

QP-116. (Desigualdade de Holder). Se $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ são números positivos e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, com $a, b > 0$, então

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{\frac{1}{b}}$$

COMENTÁRIO:

Observe que, se na desigualdade de Holder colocarmos $a = b = 2$, então obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Também, a partir dela, podemos obter a **desigualdade de Minkowski**, que é uma forma de generalização da desigualdade triangular:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p > 1.$$

Podemos também utilizar a convexidade/concavidade parcial das funções seno , cosseno ou tangente, para deduzir algumas desigualdades trigonométricas. Por exemplo, fica bem simples a dedução da desigualdade $\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, em que A, B e C indicam os ângulos de um triângulo ABC. Outro exemplo, envolvendo os ângulos de um triângulo acutângulo, é $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt{3}$.

QP-117. Prove, usando convexidade/concavidade, as desigualdades trigonométricas:

I) $\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

II) $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt{3}$, em que A, B e C são as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC. E no caso de (ii) ABC é acutângulo.

III) Usando o critério da derivada segunda, mostre que f(x) = sen x é côncava em $(0, \pi)$ e g(x) = tg x é convexa em $(0, \frac{\pi}{2})$.

A seguir, apresentamos mais algumas desigualdades que podem ser provadas com a ajuda da convexidade/concavidade de funções relacionadas.

QP-118. Prove que para qualquer número natural n ≥ 2 e qualquer real x tal que $|x| \leq 1$, vale a desigualdade $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$.

QP-119. Sabendo que a função *f(t)* = *ln*$(sent/t)$ é côncava no intervalo (0, π), prove a seguinte desigualdade:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{senx_i}{x_i}\right) \geq \left(\frac{senx}{x}\right)^n,$$

em que $0 < x_i < \pi$, *i = 1, 2, 3, ..., n*, e $x = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

Prove, usando o critério da derivada segunda, que f é côncava em (0, π).

QP-120. Sabendo que a função $f : (0, 1) \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ é convexa, prove a desigualdade:

$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são positivos, n > 1 e $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Prove, usando o critério da derivada segunda, que f é convexa em (0, 1).

QP-121. Prove que se $a, b, c, d > 0$ e $a \leq 1, a+b \leq 5, a+b+c \leq 14$, $a+b+c+d \leq 30$, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leq 10$.

QP-122. (IMO-1998, Lista curta). Se $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são números reais maiores do que 1, prove que

$$\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}+1}.$$

QP-123. I) Para $a, b \in R^+$, com $a + b = 1$, prove que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

II) Para $a, b, c \in R^+$, com $a + b + c = 1$, prove que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

QP-124. (IME—1990/1991).

A) A partir do estudo da variação do sinal das funções

$$f(x) = \ln(1+x) - x \;\; e \;\; g(x) = \ln(1+x) + x^2/2$$

Deduza a relação

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \qquad \forall x \in]0, +\infty[\,;$$

B) Sendo $n \in Z^+$, seja

$$P(n) = (1+\tfrac{1}{n^2})\,(1+\tfrac{2}{n^2}) \cdots (1+\tfrac{n-1}{n^2}).$$

Mostre que se $n \to \infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.

QP-125. Resolva, em R, a equação

$$x^8 - 7x^7 + 4x^6 - 21x^5 + 6x^4 - 21x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0.$$

QP-126. Resolva, no intervalo 0 < x < 1, a equação:

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$

QP-127. Resolva, em R, a equação:

$$\left(26 + 15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 5.$$

QP-128. (ITA-2007). Seja Q(z) um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de Q(z), Q(0) = 2 e Q(1) = 8, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de Q(z) é igual a

A) 9. **B)** 7. **C)** 5. **D)** 3. **E)** 1.

QP-129. (ITA-2007). Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 – 63x + c$, numa diferença de dois cubos $(x + a)^3 – (x + a)^3$. Neste caso, /a + /b/ - c / é igual a

A) 104. **B)** 114. **C)** 124. **D)** 134. **E)** 144.

QP-130. (ITA-2004). A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - /z/^2 + 2z = 0$, $z \in C$, é igual a:

A) -2. **B)** -1. **C)** 0. **D)** 1. **E)** 2.

▶ **Resp.:** (**A**)

QP-131. (ITA-2004). Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo]0, 1[?

▶ **Resp.:** $d = \frac{10\sqrt{15}}{9} - 4$.

QP-132. (ITA-2003). Seja $k \in R$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

A) -6. **B)** -3. **C)** 1. **D)** 2. **E)** 8.

▶ **Resp.:** (**B**)

QP-133. (ITA-2007). Considere a equação $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$.

A) Para que valores do parâmetro real p a solução admite raízes reais?

B) Determine todas essas raízes reais.

QP-134. (Allunion Mathematical Olympiad, 1991). Dados 2n números distintos a_1,..., a_n, b_1, ..., b_n , uma tabela n x n é preenchida assim: em cada célula, na i-ésima linha e j-ésima coluna, é escrito o número $a_i + b_j$. Prove que se o produto dos números de cada coluna é o mesmo, então o produto dos números de cada linha é o mesmo também.

QP-135. O polinômio $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$, com coeficientes não negativos $a_1, \ldots, a_{n-1}$, tem n raízes reais. Prove que $p(2) \geq 3^n$.

QP-136. Resolva, em R, a equação $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

QP-137. Fatore em Z[x] os seguintes polinômios:

A) $x^{10} + x^5 + 1$

B) $x^4 + x^2 + 1$

C) $x^8 + x^4 + 1$

D) $x^9 + x^4 - x + 1$

QP-138. Qual o resto da divisão de $x^{100} - 2x^{51} + 1$ por $x^2 - 1$?

QP-139. Em que condições é possível que cada um dos polinômios de 2º grau $P(x) = ax^2 + bx + c$, $Q(x) = cx^2 + ax + b$ e $R(x) = bx^2 + cx + a$ tenha duas raízes reais ?

QP-140. Se a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ tem raízes reais, qual é o valor mínimo de $a^2 + b^2$?

QP-141. (ITA-2018). Para que o sistema

$$\begin{cases} x+y & =1 \\ x^3+y^3 & =c^2 \end{cases}$$

admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

A ( ) $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$. **B ( )** $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\infty\right[$. **C ( )** $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$.

D ( ) $\left[\frac{1}{2},\infty\right[$. **E ( )** $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right[$.

QP-142. (*Desigualdade Geral de Bernoulli* **).** Se x > - 1 é uma variável real e p é uma constante real, então valem as seguintes desigualdades:

I. $(1+x)^p \geq 1+px$, se p < 0 ou p > 1.

II. $(1+x)^p \leq 1+px$, se 0 < p < 1.

Prove essas desigualdades usando propriedades das derivadas.

QP-143.(IMO-2017, Lista curta). Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ k$ e M inteiros positivos tais que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=k$$

e $a_1 a_2 \ldots a_n = M$.

Se M > 1, prove que o polinômio

$$P(x)=M(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$$

não tem raízes positivas.

QP-144. Existe uma sequência (a_n) de números positivos, tal que as séries $\sum a_n$ e $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ sejam convergentes?

QP-145. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ as raízes do polinômio $P(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$. Prove que

$$\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_n}=\frac{n}{2}.$$

QP-146. (IME-2019). Seja a inequação: $6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$.

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

A) 2. **B)** 13/6. **C)** 1/3. **D)** 5/2. **E)** 8/3.

QP-147. (IME-1989/1990). Para que valores de *p* a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

QP-148.(IME-2001/2002).

A) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio *P(x)* de quarto grau para que *P(x) = P(1 – x).*

B) Considere o polinômio *P(x)* = $16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz a condição do item apresentado.

QP-149.(IME-1996/1997). Considere a função $y = f(x) = Ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ em que Ln denota o logaritmo neperiano. Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.

A) Se $g(x) = Ln(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g?

B) Pode-se afirmar que a função definida por $H(x) = \frac{f(x)}{2}$ é uma primitiva para a função $T(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$?

QP-150. Resolva, em R, o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 2058 \end{cases}.$$

QP-151. (IME-2019). Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

A) 32 – a. **B)** 48 – 2a. **C)** 48. **D)** 48 + 2a. **E)** 32 + a.

QP-152. Sejam a, b números reais positivos. Prove que para todo n inteiro positivo vale a desigualdade

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \frac{(a+b)^n}{2}.$$

QP-153. Prove que o número $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ é um número inteiro.

QP-154. (JNCF). Considere a sequência finita F = $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2)$, tal que $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ seja uma progressão aritmética de razão r = 3. A soma dos n primeiros termos da sequência F é dada por um polinômio P(n) de grau 3, em que o coeficiente do termo de maior grau é igual a:

A) 1/3. **B)** 3. **C)** 9. **D)** 6. **E)** 1.

▶ **Resp.:** (**B**).

QP-155. (ITA-1994). As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

A) 190. **B)** 191. **C)** 192. **D)** 193. **E)** 194.

▶ **Resp.:** (**D**)

QP-156. (ITA-1994). Seja P(x) um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e *i* como raízes. Se P(1)P(- 1) < 0, então o número de raízes reais de P(x) pertencentes ao intervalo]- 1, 1[é:

A) 0. **B)** 1. **C)** 2. **D)** 3. **E)** 4.

▶ **Resp.:** (**B**)

QP-157. (IME-1992/1993). Considere a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b\ e\ c$ são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa função é igual a 2i, calcular os menores valores de $a, b\ e\ c$ para que exista um ponto máximo e um ponto mínimo de reais.

QP-158. Calcule o produto $\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)...\text{sen}\left[(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$.

POLINÔMIOS CONTÍNUOS E NÚMEROS DE FIBONACCI

Um polinômio contínuo $P_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, com n indeterminadas, é definido pela seguinte relação de recorrência:

$P_0(\ ) = 1$; $P_1(x_1) = x_1$; $P_n(x_1, x_2, ..., x_n) = P_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})x_n + P_{n-2}(x_1, x_2, ..., x_{n-2})$.

Exemplos:

A) $P_2(x_1, x_2) = P_1(x_1)x_2 + P_0() = x_1x_2 + 1$.

B) $P_3(x_1, x_2, x_3) = P_2(x_1, x_2)x_3 + P_1(x_1) = x_1x_2x_3 + x_3 + x_1$.

C) $P_4(x_1, x_2, x_{3,}\ x_4) = x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_2 + 1$.

Verifique que o número de termos de cada polinômio contínuo é um número de Fibonacci. De modo mais preciso, verifique que: $P_n(1, 1, ..., 1) = F_{n+1}$.

No "código Morse" usamos "." e "-" para representarem "palavras". Se fizermos uma analogia de um ponto indicando uma variável incluída e um traço indicando duas variáveis excluídas, podemos interpretar uma sequência de Morse de comprimento n, que tem k traços e n - k pontos, como um termo do polinômio contínuo. Logo a quantidade de termos que podemos escrever será dada por $\binom{n-k}{k}$, que é o número de modos que podemos escrever a sequência de n - k pontos e k traços de comprimento n(permutações com repetição de n elementos, sendo n - k pontos e k traços).

Com essa analogia podemos concluir que o número de termos de um polinômio contínuo será dado por $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} = F_{n+1}$.

Lembre-se da soma dos termos de uma diagonal do triângulo de Pascal, de que falamos no capítulo 1, na QF- 8. Vale a pena agora você provar, usando indução forte(supondo válida a hipótese para n - 1 e n, provar para n + 1), essa fórmula das diagonais.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-P(4)

DRN-P114:

Observe que $x_1{}^{t_1}.x_2{}^{t_2}\ldots x_n{}^{t_n} = e^{t_1\ln(x_1)+t_2\ln(x_2)+\ldots+t_n\ln(x_n)}$.

Obs.: Verifique que se $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1/n$, então a desigualdade anterior se torna MA ≥ MG.

DRN-P115:

Use $x = (x^a)^{\frac{1}{a}}$ e QP-114.

DRN-P116:

Suponha $\sum_{i=1}^{n} x_i{}^a = \sum_{i=1}^{n} y_i{}^b = 1$ e use a desigualdade de Young em x_iy_i para obter: $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq 1$. A seguir, faça

$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^a = A$, $\sum_{i=1}^{n} y_i{}^b = B$, $x_i{}' = x_i/A^{1/a}$, $y_i{}' = y_i/B^{1/b}$ e deduza que

$1 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i{}'\,y_i{}' = \frac{1}{A^{1/a}B^{1/b}}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$. A partir desse resultado chegue à conclusão.

DRN-P118:

Usar o binômio de Newton e a convexidade da soma de funções potências convexas.

Outra alternativa é usar o binômio de Newton, simplicar e observar que $\binom{n}{2k}x^{2k} \leq \binom{n}{2k}$, pois /x/ ≤ 1. Disso e da condição n ≥ 2, deduz-se o resultado.

DRN-P120:

Combinar a convexidade com a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

DRN-P121:

Use a concavidade de f(x) = $\sqrt{x}$, com t_1 = 1/10, t_2 = 2/10, t_3 = 3/10 e t_4 = 4/10 para chegar em

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10\sqrt{\frac{12a + 6b + 4c + 3d}{120}}.$$

Observe que $\frac{4}{10}\left(\frac{d}{16}\right) = \frac{d}{40}$ e verifique que $12a + 6b + 4c + 3d \leq 120$.

DRN-P122:

Use a convexidade da função f(x) = $\frac{1}{1+e^x}$, com $r_i = e^{x_i}$ para algum $x_i > 0$.

DRN-P123:

Mostre que f(x) = $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ é convexa e é crescente para x > 1. A seguir, use a desigualdade de Jensen para f($a.\frac{1}{a} + b.\frac{1}{b}$) e f($b.\frac{1}{a} + a.\frac{1}{b}$).

DRN-P124:

Verifique que f(0) = g(0) = 0 e mostre, usando derivadas, que f decrescente e g é crescente no mesmo domínio.

Para o item (**B**) use ln[P(n)] combinado com a relação de (**A**) para obter a desigualdade

$$\frac{k}{n^2} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2.$$

Por fim, use o limite da composta para obter que *lim*[P(n)] = $\sqrt{e}$.

DRN-P125:

Perceba que é uma equação recíproca de primeira espécie e de expoente par. Dividindo por x^4 e usando a substituição y = x + 1/x, obtém-se: $y^4 - 7y^3 = 0$. Disso, segue que as raízes reais são $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

DRN-P126:

Use x = cos θ para obter 8cos θ. cos 2θ. cos $4\theta = 1$. Depois, multiplique por senθ para chegar em sen8θ = senθ.

▶ **Resp.:** cos$\frac{2\pi}{7}$, cos$\frac{\pi}{9}$ e 1/2.

DRN-P127:

Faça y = $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x$ para obter $y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0$. Observe que essa equação é recíproca.

▶ **Resp.:** As raízes reais são x = 1 e x = - 1.

DRN-P128:

Faça Q(z) = $(z^3 + z^2 + z + 1)(z^2 + bz +$ **C)** e deduza que b = - 1 e c = 2.

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P129:

Use igualdade de polinômios.

▶ **Resp.:** (**E**)

DRN-P133:

Mostre que $x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)}$ e substitua esse valor na equação original para chegar em /3p – 4/ + 2/p/ = /p – 4/.

▶ **Resp.: A)** 0 ≤ p ≤ 4/3 **B)** x = $\frac{p-4}{\sqrt{8(2-p)}}$, pois x > 0.

DRN-P134:

Consideremos o polinômio p(x) = $\prod_{i=1}^{n}(x + a_i) - \prod_{j=1}^{n}(x - b_j)$ de grau menor do que n.

Se p(b_j) = $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_j) = k$, para todo j = 1, ..., n, então o polinômio q(x) = p(x) – k tem, pelo menos, n raízes distintas. Isto implica p(x) – k = 0, para todo x.

Decorre disso que k = p(- a_i) = - $\prod_{j=1}^{n}(- a_i - b_j) = (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)$, o que conclui a demonstração.

DRN-P135:

Todas as raízes de p(x) são negativas, em virtude dos coeficientes. Se x_i é uma raiz, então y_i = - x_i > 0. Por MA ≥ MG 2 + y_i = 1 + 1 + y_i ≥ 3 $\sqrt[3]{y_i}$. Use relações de Girard para concluir e fatore p(x) com y_i.

DRN-P136:

Faça y = $\sqrt[4]{x}$, z = $\sqrt[4]{97 - x}$ e use polinômios simétricos.

▶ **Resp.:** (2, 3) e (3, 2).

DRN-P137:

A) Use raiz cúbica da unidade para obter o fator $x^2 + x + 1$.

B) Observe que $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 – x^2$.

C) Veja que $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 – x^4$.

D) Verifique que $x^9 + x^4 – x – 1 = x(x^8 – 1) + (x^4 – 1)$.

DRN-P138:

R(x) = ax + b. Faça x = 1 e x = -1.

▶ **Resp.:** - 2x + 2.

DRN-P139:

Primeiro, estude o Δ de cada uma das equações P(x) = 0, Q(x) = 0, R(x) = 0, supondo que os sinais de a, b e c são iguais e obtenha uma contradição. Depois avalie o Δ de cada uma das equações, supondo que um dos coeficientes tem sinal contrário ao sinal comum dos outros dois. Conclua que dentro dessa condição, devemos ter o quadrado do primeiro maior do que ou igual a quatro vezes o produto dos outros dois, que têm o sinal comum, para que a hipótese seja possível. Para maior clareza, se a < 0, b > 0 e c > 0, então devemos ter $a^2 \geq 4bc$. Por permutação cíclica obtenha os outros casos. De modo análogo, vale para a > 0, b < 0 e c < 0. Exemplos numéricos: a = - 4, b = 3 e c = 1; a = 5, b = - 2 e c = - 3. Verifique.

DRN-P140:

Observe que a equação é recíproca. Dividindo-a por x^2 e usando y = x + 1/x, ela fica na forma ay + b = 2 – y^2.

Como x é real, então o Δ da equação $x^2 - yx + 1 = 0$ deve satisfazer $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 4$.

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz chegamos em

$$(2 - y^2)^2 = (a.y + b.1)^2 \leq (a^2 + b^2)(y^2 + 1).$$

Mas $y^2 \geq 4 \Rightarrow (y^2 - 2)^2 \geq 4 \Rightarrow (y^2 - 2)^2/(y^2 + 1) \geq 4/(y^2 + 1)$. Como a função $f(z) = (z - 2)^2/(z + 1)$, para $z = y^2 \geq 4$, é crescente, temos que $f(z) \geq f(4) \geq 4/5$.

A igualdade ocorre se y = a/b e $y^2 = 4$. Isso implica x = 1 ou x = - 1. Portanto, o valor mínimo de $a^2 + b^2$ é 4/5.

Obs.: $f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{z + 1} \Rightarrow f'(z) = \frac{(z + 1)(2z - 4) - (z^2 - 4z + 4)}{(z + 1)^2} = \frac{(z + 1)^2 - 10}{(z + 1)^2}$.

E para z > 3 temos que $f'(z) > 0$, o que implica f ser crescente.

DRN-P141:

Use polinômios simétricos ou relações de Girard para chegar em $c^2 = 1 - 3xy$. Do sistema chega-se a $3x^2 - 3x + 1 - c^2 = 0$.

▶ **Resp.:** (**E**)

DRN-P142:

Seja $f(x) = (1 + x)^p – (1 + px)$. Então, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = p(p – 1)$.

Obs.: Se $x > 0$, $f(x) = 0$ equivale a $p = 1$, pois nesse caso, teríamos $f'(x) = 0$, o que equivale a $p(1+ x)^{p-1} = p$, que equivale a $(1 + x)^{p-1} = 1 \iff p – 1 = 0$.

DRN-P143:

De início, verificamos que

$$P(x) = a_1 a_2 \dots a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n),$$

que pode ser escrito assim

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i (x+1)^{1/a_i} - \prod_{i=1}^{n} (x+a_i).$$

Pela desigualdade geral de Bernoulli temos que, para $x > 0$, $a_i (x+1)^{1/a_i} \leq a_i \left(1 + \frac{x}{a_i}\right) = x + a_i$, (1) com igualdade ocorrendo somente quando $a_i = 1$.

Multiplicando as desigualdades (1) para i = 1, 2, ..., n obtemos

$$\prod_{i=1}^{n} a_i (x+1)^{1/a_i} \leq \prod_{i=1}^{n} (x+a_i),$$

que equivale a $P(x) \leq 0$, com igualdade ocorrendo se e só se $a_i = 1$ para i = 1, 2, ..., n. Mas isso implica M = 1, o que contradiz a hipótese (M > 1). Concluímos, então, que $P(x) < 0$ par todo $x > 0$, o que significa afirmar que P(x) não tem raízes positivas.

DRN-P144:

Use MA ≥ MG.

DRN-P145:

Pense no polinômio com raízes $y_k = \frac{1}{1-a_k}$. Então, $a_k = \frac{y_k - 1}{y_k}$ e a soma desejada se torna $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. Verifique que y_k é raiz do polinômio $Q(X) = (X – 1)^n + X(X - 1)^{n-1} + \dots + X^{n-1}(X – 1) + X^n$, que pode ser escrito assim $Q(X) = (n + 1)X^n – X^{n-1}\left(\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{1}{1}\right) + \dots$ Use relações de Girard para obter

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{1}{1}}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}.$$

Derivação logarítmica

Um outro caminho para resolver esta questão é com o uso de *derivação logarítmica*, isto é, aplicando $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Vejamos como. Sabemos que P'(x) = $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 1$ e que P(x) = $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$. Disso decorre: P'(1) = n + (n -1) + ... + 1 = n(n + 1)/2 e $\text{Ln}|P(x)| = \ln|x - a_1| + \ln|x - a_2| + \ln|x - a_n|$. Derivando ambos os membros, em relação a x, obtemos

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}.$$

Essa igualdade implica que $\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \cdots + \frac{1}{1-a_n}$.

E como P(1) = n + 1 e P'(1) = n(n + 1)/2, concluímos que

$$\frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \cdots + \frac{1}{1-a_n} = \frac{n}{2}.$$

NOTA:

Sendo $|x| = \sqrt{x^2}$, verificamos, com a ajuda da regra da cadeia, que $(\ln|x|)' = (\ln\sqrt{x^2})' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}\right) = \frac{1}{x}$.

DRN-P146:

Verifique, pelo teorema das raízes racionais, que – 2 é uma raiz do polinômio dado. Disso chegue em x(x + 2)(3x – 1)(2x – 5) < 0. S = (-2, 0) ∪ (1/3, 5/2).

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P147:

Seja r raiz dupla. Então dividindo o polinômio dado por $x^2 - 2rx + r^2$ obtemos o quociente $x^2 + 2rx + 3r^2$ e o resto na forma $(p + 4p^3)x + 3(1 - r^4)$. Por identidade de polinômios deduzimos: r = 1, - 1, i, - i ; p = - 4, 4, 4i, - 4i e x = r(- 1 $\pm\sqrt{2}\ i$).

▶ **Resp.:** $\begin{cases} p = -4 \Rightarrow x = \{1, 1, -1 + \sqrt{2}i, -1 - \sqrt{2}i\} \\ p = 4 \Rightarrow x = \{-1, -1, 1 + \sqrt{2}i, -1 - \sqrt{2}i\} \\ p = 4i \Rightarrow x = \{i, i, \sqrt{2} - i, -\sqrt{2} - i\} \\ p = -4i \Rightarrow x = \{-i, -i, \sqrt{2} + i, -\sqrt{2} + i\} \end{cases}$.

DRN-P148:

A) Seja *P(x)* = $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$. Como *P(x)* = *P(1 – x)*, então podemos expressá-lo como um polinômio de grau 2 na variável *y* = *x(1 – x)*, assim: *P(x)* = $a[x(1-x)]^2 + B[x(1-x)] + k$. Disso segue $b = -2a$ e $d = a - c$.

B) Usando o procedimento do item(**A**), obtemos

$$P(x) = 16[x(1-x)]^2 + B[x(1-x)] + 77.$$

Desenvolvendo e comparando, obtemos: B = 72 .

Logo, *P(x)* = *Q(y)* = $16y^2 + 72y + 77$. Disso vem y = - 7/4 ou y = -11/4. Substituindo cada um desses valores em *y* = *x(1 – x)*, encontramos as 4 raízes de *P(x)*: $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$ e $\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$.

Obs.: Perceba que a técnica usada anteriormente é simplesmente uma aplicação do Teorema do Resto. Pois, o resto da divisão de P(x) por x é k e por 1 - x também é k. Logo P(x) = x(1 – x)q(x) + k , onde q(x) = $Mx^2 + Nx + E$. Mas veja que a identidade $a[x(1-x)]^2 + B[x(1-x)] + k$ = x(1 – x)q(x) + k sempre é possível para M = $-a$, N = a e E = B. Ou seja, q(x) = - $ax^2 + ax + B$.

DRN-P149:

A) Sendo x^2 + 1 > x^2, temos que $\sqrt{x^2+1}$ > *x*. E como f é crescente, então o gráfico de f está sempre acima do gráfico de g. Por outro lado, quando *x* tende para $+\infty$, $\sqrt{x^2+1}$ tende para *x*, que implica g(x) $\rightarrow$ f(x).

B) Como *H'(x)* = $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$, então *H(x)* não é uma primitiva para *T(x).*

DRN-P150:

Usando polinômios simétricos(fórmulas de Newton) e relações de Girard chegue em $S_{n+3} + bS_{n+1} - 6S_n = 0$, em que $S_n = x^n + y^n + z^n$.

DRN-P151:

Use relações de Girard.

▶ **Resp.:** (**C**).

DRN-P152:

Use convexidade.

DRN-P153:

Use QF-11 e chegue em $x^3 - 21x - 90 = 0$. Conclua que x = 6.

DRN-P157:

Usar $f'(x)$ e $f''(x)$ para deduzir que os menores valores são $a = 4, b = 4\ e\ c = 16$ e também que $f(x)$ tem máximo local em x = - 2 e mínimo local em x = - 2/3.

DRN-P158:

Temos que $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + ... + z^{n-1})$ e que suas raízes distintas são $\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$, em que $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n}$. Excluindo $\varepsilon^n = 1$, todas as outras n – 1 raízes de $z^n - 1$ são raízes do polinômio:

$$(1)\ P(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}.$$

Logo, podemos fatorar P(z) assim:

$$(2)\ P(z) = (z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2)\ ...\ (z - \varepsilon^{n-1}).$$

Por (1) e (2) deduzimos: $P(1) = 1 + 1 + 1^2 + ... + 1^{n-1} = n$ e

$$P(1) = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)\ ...\ (1 - \varepsilon^{n-1}) \text{ e por consequência}$$

$$n = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)\ ...\ (1 - \varepsilon^{n-1}), \text{ o que acarreta}$$

$$n = |1 - \varepsilon||1 - \varepsilon^2|...|1 - \varepsilon^{n-1}|. \quad (*)$$

Por outro lado, $1 - \varepsilon^k = 1 - cis(\frac{2k\pi}{n}) = -2isen(\frac{k\pi}{n})cis(\frac{k\pi}{n})$ e $\left|cis(\frac{k\pi}{n})\right| = 1$.

Logo,

$$\left|1 - \varepsilon^k\right| = 2sen\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{ k = 1, 2, ..., n – 1.}$$

Substituindo esse resultado em (*), obtemos:

$$n = 2sen\left(\frac{\pi}{n}\right).2sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)...2sen\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$n = 2^n.sen\left(\frac{\pi}{n}\right).sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)...sen\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right).sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)...sen\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^n}.$$

COMENTÁRIO: (Polinômio Ciclotômico):

Considere $\varepsilon_n = \frac{\cos 2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n}$, em que *n* é um inteiro positivo. Denominamos de o n-ésimo **Polinômio Ciclotômico,** ao polinômio definido, com mdc(n, k) =1, por $\phi_n(x) = \prod_{1\le k\le n-1} (x - \varepsilon_n^k)$.

Percebe-se que o grau desse polinômio é $\varphi(n)$, em que φ é a *função totiente de Euler*. Esses polinômios ciclotômicos são todos irredutíveis em Q e de coeficientes inteiros. Eis uma lista dos primeiros:

$$\phi(x) = x - 1$$
$$\phi_2(x) = x + 1$$
$$\phi_3(x) = x^2 + x + 1$$
$$\phi_4(x) = x^2 + 1$$
$$\phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$\phi_6(x) = x^2 - x + 1$$
$$\phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$\phi_8(x) = x^4 + 1$$
$$\phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$$
$$\phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$
$$\phi_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$$
$$\phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$$
$$\phi_{13}(x) = x^{12} + x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1$$

Um resultado interessante relacionado com esses polinômios e que generaliza o caso visto na QP-153, é o seguinte:

Supondo mdc(k, n) = 1 e que n não seja uma potência de um primo, vale a seguinte identidade

$$\prod_{1\le k\le n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^{\varphi(n)}}.$$

A prova dessa identidade e de outras análogas, você poderá ver na referência [Andreescu and Dorin, 2006].

QP-159. (IME-2000/2001). Determine todos os números inteiros *m* e *n* para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

QP-160. (IME-1984/1985). Sejam as funções

$$z = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1-x^4}.$$

Mostre que no subconjunto dos reais em que as funções são definidas $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{x^4}$.

QP-161. Usando as raízes da equação $x^{2n} - 1 = 0$, prove que:

A) $sen\frac{\pi}{2n} sen\frac{2\pi}{2n} sen\frac{3\pi}{2n} sen\frac{4\pi}{2n} \dots sen(n-1)\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

B) $cos\frac{\pi}{2n} cos\frac{2\pi}{2n} cos\frac{3\pi}{2n} cos\frac{4\pi}{2n} \dots cos(n-1)\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, para todo $n \neq 1, n \in Z^+$.

C) $sen\frac{\pi}{n} sen\frac{2\pi}{n} sen\frac{3\pi}{n} \dots sen(n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, para todo $n \neq 1, n \in Z^+$.

COMENTÁRIO:

A equação só tem duas raízes reais e as outras formam pares conjugados. Assim se obtém:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2xcos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

E quando levamos ao limite em x = 1 ou em x = -1, obtemos $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ = *n*.

Para deduzir (c) use (a) e (b) combinado com $sen\, a = 2sen\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

Obs.: $(x - \varepsilon_k)(x - \bar{\varepsilon}_k) = x^2 - 2xcos\frac{k\pi}{n} + 1$.

REGRA DE L'HÔPITAL

Aqui, para se enxergar melhor o cálculo do limite, precisamos usar uma regra especial(L'Hôpital), que nos permite, em casos como esse, derivar o numerador e o denominador para eliminar a indeterminação 0/0.

No caso em questão, a expressão $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ torna-se equivalente a $\frac{2nx^{2n-1}}{2x}$, que em x = 1 ou em x = -1 resulta em *n*.

De modo mais preciso, a regra de L`Hôpital é formulada assim: "*Suponhamos que* $\lim_{x\to a} f(x)$ = *0,* $\lim_{x\to a} g(x)$ = *0 e que exista* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. *Então existe* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *e* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ = $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$." Uma prova direta dessa regra, supondo $f(a) = g(a) = 0$, f'(a)/g'(a)

Tem que supor g'(a) diferente de zero.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{(x-a)}}{\frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para ilustrar o uso eficaz dessa regra em certos casos, calculemos o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x\ -x}{x-sen\,x}.$$

Temos que $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-sen\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{sec^2 x-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{(cos^2 x)(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{cos^2 x} = 2.$

A regra de L'Hopital também vale para as funções complexas. Por exemplo,

$$a)\ \lim_{z\to 0}\frac{sen\,z}{z\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{\cos z - z\,sen\,z} = \frac{\cos 0}{\cos 0 - 0} = 1;$$

$$\text{e}\quad b)\ \lim_{z\to 1}\frac{e^z - e}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{1} = e.$$

NOTA-2:

Essa questão pode ser resolvida sem o uso de limites. Basta usar o método adotado na resolução da questão QP-158 e observar que $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1$ tem *n* termos no segundo membro, com n – 1 pares de raízes conjugadas. Ou seja, colocando $\varepsilon = cis\frac{\pi}{n}$, podemos escrever:

P(x) = $(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})\ldots(x-\varepsilon^{n-1})(x-\bar{\varepsilon}^{n-1})$. Observar que $|1-\varepsilon| = |1-\bar{\varepsilon}|$.

QP-162. (JNCF). Calcular o valor da soma

$$\frac{1}{sen^2(2^o)} + \frac{1}{sen^2(6^o)} + \frac{1}{sen^2(10^o)} + \cdots + \frac{1}{sen^2(86^o)}.$$

QP-163. Calcule o valor da soma

$$S = tg^2(1^o) + tg^2(3^o) + tg^2(5^o) + \ldots + tg^2(87^o) + tg^2(89^o).$$

QP-164. Prove que

$$cotg^2\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) + cotg^2\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + cotg^2\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) + \cdots + cotg^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

QP-165. (Adaptada - Olimpíada de Matemática da Romênia – Última fase, 2000). A função f: $R^2 \to R$ é chamada de Olímpica se ela obedece a seguinte propriedade: dados $n \geq 3$ pontos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in R^2$, se $f(A_1) = f(A_2) = \ldots = f(A_n)$ então os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os vértices de um polígono convexo. Seja $P \in \mathbb{C}[X]$ um polinômio não constante. Prove que a função f: $R^2 \to R$, definida por $f(x, y) = |P(x+iy)|$, é Olímpica se todas as raízes de P são iguais.

QP-166. (ITA-2009). Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in R$, $b \neq 0$, formam numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, a/b é igual a

A) -3. **B)** -1/3. **C)** 1/3. **D)** 1. **E)** 3.

QP-167. A função f : Z_7 Z_7, definida por $f(x) = x^2$ é uma função par? Justifique sua resposta.

Obs.: Z_7 é o corpo dos inteiros modulares(classes residuais módulo 7).

QP-168. (JNCF). Demonstre o seguinte teorema:

"Se a e b são constantes reais e x é uma variável real, então

$asenx + bcosx = \sqrt{a^2+b^2}sen(x+\theta)$, em que $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$."

Obs.: Decorre desse teorema o seguinte resultado:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq asenx + bcosx \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$

QP-169. (IME-2021). Seja a equação

$$7^{4x} - 10.7^{3x} + 17.7^{2x} + 40.7^{x} = 12.7\,.$$

Para cada uma das raízes reais não nulas dessa equação, constrói-se um segmento de reta cujo comprimento corresponde ao módulo do valor da raiz. A partir de todos os segmentos obtidos:

A) Pode-se construir um triângulo escaleno.

B) Pode-se construir um triângulo isósceles.

C) Pode-se construir um quadrilátero.

D) Pode-se construir um pentágono.

E) Não é possível construir qualquer polígono.

QP-170. (JNCF). Considere a situação atual(2021) da pandemia de Covid-19 em nosso país. Se temos as médias semanais dos casos de Covid-19 nos 27(26 + DF) estados, podemos considerar que a média aritmética dessas 27 médias estaduais é uma medida aproximada da média semanal do país? A mediana dessas médias dos estados seria também uma medida aproximada da média nacional?

Obs.: Entenda aqui a média semanal como a média diária da semana.

QP-171.(Média Aritmética das somas parciais de uma série). Considere uma sequência (a_k) convergente de limite igual a *b.* As somas parciais dos termos dessa sequência são indicadas por $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Mostre que a sequência (t_n), com $t_n = \frac{S_n}{n}$ das médias aritméticas dessas somas parciais, também converge para b. Isto é, mostre que $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = b$.

Mostre, com um contra-exemplo, que a recíproca é falsa.

QP-172.(JNCF). Qual é a expressão da média total em função das médias parciais? Que tipo de média é essa?

QP-173.(JNCF). Três amigas marcaram um encontro, às 3h e meia da tarde, num shopping. Sabe-se que elas costumam atrasar em seus encontros. Suponha-se que cada uma delas vai chegar entre 3h e meia e 5h da tarde e que se dispõe a esperar, no máximo, 20 minutos pelas outras. Qual a probabilidade delas se encontrarem?

QP-174.(IME-2021). Seja a função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 4x - 7$. Considere uma reta qualquer que corta o gráfico dessa função em quatro pontos distintos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ e (x_4, y_4).

O valor de $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$ é:

A) 1. **B)** 3/2. **C)** 2. **D)** 7/2. **E)** 4.

QP-175.(IME-2022). As raízes da equação $4x^3 - 40x^2 + 129x - 135 = 0$ são os comprimentos dos lados de um triângulo em metros. Determine a área deste triângulo.

DICAS-RESOLUÇÕES-NOTAS-P(5)

DRN-P159:

Estudar os 4 casos possíveis para *m*(par ou ímpar) e *n*(par ou ímpar) e as duas possibilidades para o *a*: igual a 0 ou diferente de 0.

DRN-P162:

Use $tg^2 x + \frac{1}{tg^2 x} = \frac{4}{sen^2(2x)} - 2$ para "aproximar" essa soma da soma da questão QP-163.

Denominando a soma ilustrada por A, mostre que A = $\frac{S + 43}{4}$. ▶ **Resp.:** A = 1012.

DRN-P163:

Sendo $tgx = cotg(\frac{\pi}{2} - x)$ e 1° = $\frac{\pi}{180}$, podemos colocar a soma dada na forma:

$$S = cotg^2\left(\frac{\pi}{180}\right) + cotg^2\left(\frac{3\pi}{180}\right) + \cdots + cotg^2\left(\frac{87\pi}{180}\right) + cotg^2\left(\frac{89\pi}{180}\right).$$

A equação $cos(2n + 2)x = 0$ tem um conjunto de soluções nas formas $x = \frac{(4k+1)\pi}{4n+4}$ ou $x = \frac{(4k+3)\pi}{4n+4}$, com k inteiro. Se 4n + 4 = 180, então n = 44 e temos a seguinte sequência de 45 soluções distintas no intervalo (0, $\frac{\pi}{2}$):

$$\frac{\pi}{180}, \quad \frac{3\pi}{180}, \quad \frac{5\pi}{180}, \quad \cdots \quad , \quad \frac{87\pi}{180}, \quad \frac{89\pi}{180}. \qquad (*)$$

Por outro lado, usando à formula de Moivre e o Binômio de Newton, obtemos:

$$cos(2n + 2)x + isen(2n + 2)x = (cosx + isenx)^{2n+2}$$

$$= \sum_{p=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{p} (cosx)^{2n+2-p}(senx)^p i^p =$$

$$\binom{2n+2}{0}(cosx)^{2n+2} + i\binom{2n+2}{1}(cosx)^{2n+1}.senx$$

$$-\binom{2n+2}{2}(cosx)^{2n}(senx)^2 - i\binom{2n+2}{3}(cosx)^{2n-1}.(senx)^3$$

$$+$$

$$\vdots$$

Agrupando os termos sem “i” e os que têm “i”, usando a igualdade de números complexos e cosx = senx.cotgx, obtemos:

$$cos(2n + 2)x$$

$$= \binom{2n+2}{0}(cosx)^{2n+2}$$

$$-\binom{2n+2}{2}(cosx)^{2n}(senx)^2 + \cdots =$$

$$= (senx)^{2n+2}.[\binom{2n+2}{0}(cotgx)^{2n+2} - \binom{2n+2}{2}(cotgx)^{2n} + \cdots] =$$

$$= (senx)^{2n+2}.[\binom{2n+2}{0}(cotg^2x)^{n+1} - \binom{2n+2}{2}(cotg^2x)^n + \cdots].$$

Como $senx \neq 0$, para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, então se $cos(2n + 2)x = 0$ e $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos:

$$\binom{2n+2}{0}(cotg^2x)^{n+1} - \binom{2n+2}{2}(cotg^2x)^n + \cdots = 0. \qquad (1)$$

Fazendo y = $cotg^2 x$, transformamos (1) na equação polinomial:

$$y^{n+1} - \binom{2n+2}{2} y^n + \cdots = 0. \quad (2)$$

Tomando n = 44 em (2), obtemos a equação: $y^{45} - \binom{90}{2} y^{44} + \cdots = 0$, cujas raízes são:

$cotg^2\left(\frac{\pi}{180}\right), cotg^2\left(\frac{3\pi}{180}\right), \ldots, cotg^2\left(\frac{87\pi}{180}\right), cotg^2\left(\frac{89\pi}{180}\right)$, em virtude de (*).

Logo, usando as relações de Girard, concluímos que **S =** $\binom{90}{2} = 4005$.

Obs.: Perceba nessa resolução a integração de alguns tópicos da Matemática: Trigonometria, Números Complexos, Combinatória e Polinômios. Da importância dessa integração no Método das Aproximações Multifárias aplicado à Matemática Intermediária falamos assim na Introdução:

"Achamos que o momento histórico, de muitos avanços na produção de textos e resultados de pesquisas em Matemática, favorece o ***desenvolvimento sistemático da Matemática Intermediária,*** *que é compreendida, na presente obra, como uma Transição por Aproximações Multifárias da Matemática Elementar para a Matemática Avançada ou Superior, bem como de integração das diferentes áreas da Matemática em geral."*

DRN-P164:

Se inspire na questão anterior(QP-163), usando a equação $sen(2n + 1)x = 0$.

DRN-P165:

Suponha que todas as raízes do polinômio P sejam iguais a w. Então, pelo teorema da fatoração podemos escrever P(z) = $a(z - w)^n$ para algum a de C e n natural. Em virtude disso, e da hipótese, temos que $f(A_i) = a(A_i - w)^n$, o que nos leva a $\left|\frac{f(A_i)}{a}\right| = |A_i - w|^n$ ou $|A_i - w| = \sqrt[n]{\left|\frac{f(A_i)}{a}\right|}$. Logo, os pontos A_i estão na circunferência de raio r = $\sqrt[n]{\left|\frac{f(A_i)}{a}\right|}$ e por conseguinte são vértices de um polígono convexo.

DRN-P166:

Use as relações de Girard.

▶ **Resp.:** (**B**).

DRN-P168:

COMENTÁRIO(MHS): Há uma relação desse resultado com o tema MHS(Movimento Harmônico Simples) da Física. Um MHS se caracteriza por ter aceleração proporcional ao deslocamento s(t) relativo a um ponto O, isto é, s''(t) = A.s(t), em que A é uma constante. O movimento do pêndulo simples, para pequenos deslocamentos (ângulo menor do que 20°) se aproxima desse tipo de movimento ideal. Verifique que se um móvel se desloca em movimento linear descrito pela equação s(t) = a sen(kt) + bcos(kt), com a, b e k constantes, então ele está em MHS, com A = - k^2. Por outro lado, se o movimento tem um certo amortecimento ao longo do tempo, então um modelo mais aproximado para descrevê-lo é dado por s(t) = Ae^{-ct}(a.sen(kt) + b.cos(kt)), c > 0, onde a exponencial decrescente Ae^{-ct} expressa o amortecimento ao longo do tempo.

Vale a pena, recordar aqui, a propriedade característica de uma função exponencial f: f'(x) = A.f(x). Mas disso segue que f''(x) = Af'(x) = A^2.f(x). Então, por que o MHS não é descrito por uma função exponencial? E por que g(x) = asenx + bcosx descreve esse tipo de movimento? De início vem à nossa mente que o movimento é periódico, logo nada melhor para descrevê-lo do que uma função periódica. Além disso, sabemos que (senx)" = -senx e (cosx)'' = - cosx e, por conseguinte, [sen(kx)]'' = - k^2sen(kx) e [cos(kx)]' = - k^2cos(kx). Logo temos que s(t) = a sen(kt) + bcos(kt) satisfaz à condição s''(t) = - k^2s(t) = As(t), com A = - k^2. Que ligação há entre essas funções, aparentemente, tão diferentes? Já vimos isso antes, através da maravilhosa fórmula de Euler e^{ix} = cosx + isenx, que

$senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, que por sua vez se relacionam, umbilicalmente, com as séries de potências:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$sen\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n\ +\ 1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

E dessa forma, elas podem ser vistas como aproximações de polinômios também. Daí ser importante rever as notas sobre o Teorema de Aproximação de Weierstrass e o Teorema de Taylor, colocadas na parte inicial do capítulo sobre Polinômios e Aproximações, bem como o tópico sobre aproximação por séries de Fourier colocado no último capítulo.

Obs.: Para uma revisão do tema MHS veja o livro Curso de Física 2 de H. Moysés Nussenzveig citado nas Referências Bibliográficas. Uma alternativa é consultar textos na internet ou dialogar com uma IA generativa, como a DeepSeek R1.

DRN-P169:

Faça $y = 7^x$ para obter o polinômio $P(y) = y^4 - 10y^3 + 17y^2 + 40y = 12.7$. Usando o teorema das raízes racionais, encontre as raízes 2 e – 2. Fazendo a divisão euclidiana obtenha $P(y) = (y^2 - 4)((y^2 - 10y + 21)$. As outras raízes são 3 e 7. Como $7^x = -2$ não tem raiz real, então temos as seguintes três raízes reais: $\log_7 2$, $\log_7 3$ e $\log_7 7 = 1$. Precisamos saber se esses valores são as medidas dos lados de um triângulo. Sendo $\log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 6 < \log_7 7$, pela desigualdade triangular concluímos que não é possível construir um triângulo com tais segmentos e, por conseguinte, qualquer polígono. Logo a alternativa correta é (E).

DRN-P170:

Como as médias dos Estados não estão relacionadas com as populações dos estados respectivos, então a média semanal nacional é apenas a soma dessas médias. Logo, se $a_1, a_2, \ldots, a_{27}$ são os números de casos semanais respectivos dos 27 estados, então temos:

$$\frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7} + \ldots + \frac{a_k}{7} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{7}.$$

DRN-P171:

Na primeira parte use a definição de limite de uma sequência assim: para algum M > 0, $|a_n - b| \leq M$; e dado $\varepsilon > 0$, existem naturais n_0 e n_1 tais que $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, se $n \geq n_0$; e $\frac{Mn_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, se $n \geq n_1$. Então

$$|t_n - b| = \left|\frac{S_n - nb}{n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b)}{n}\right| \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{|a_k - b|}{n} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \left(\frac{|a_k - b|}{n}\right) \leq \frac{Mn_0}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

se $n \geq n_1$. Na segunda parte veja $y_n = (-1)^n$.

DRN-P172:

$\overline{m} = \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + \cdots + k_p m_p}{n}$, onde $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ e $m_1, m_2, \ldots, m_p$ são as médias parciais. Perceba que $\overline{m}$ é uma média ponderada das médias parciais.

DRN-P173:

Reveja a resolução da QF-164, a nota sobre probabilidade geométrica e a dica da QT-180. Quanto ao cálculo do volume da região favorável W, ele pode ser feito apenas por geometria analítica, do mesmo modo que foi feito para o sólido S da QT-180; ou usar o “método das

fatias" do cálculo Integral, que é uma generalização do Princípio de Cavalieri. Observar que o volume de W é a soma do volume de S com o das duas pirâmides triangulares dos "cantos" do cubo de lado 90. O volume total V_T da região favorável é 64000; logo a probabilidade é $p = 64000/90^3 = 64/729 \cong 8{,}8\%$. Algumas informações complementares: 1) No uso da geometria analítica obtém-se a equação do plano da base quadrangular da pirâmide, que é 9x – 14 y + 9z = 180 e com isso se calcula a distância do vértice da pirâmide ao plano → $h = \frac{460}{\sqrt{358}}$. 2) No caso do método das fatias é determinante expressar as bases do trapézio da seção transversal de S em função de *u,* que é a distância da seção transversal a uma das bases de S. Indicando por A(u) a área dessa seção, tem-se:

$A(u) = 200\sqrt{3} + 20\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{177}}u - \frac{4\sqrt{3}}{177}u^2$. Integrando: $Vol(W) = \int_0^{10\sqrt{177}} A(u)du = \frac{8000\sqrt{531}}{3}$.

DRN-P174:

Seja y = ax + b a equação da reta qualquer que corta o gráfico de f. Então $f(x) - ax - b = 0 = 0$ para $x = x_i, i = 1,2,3,4$. Mas pelas relações de Girard a soma das raízes é 8/2 = 4. Logo, o valor pedido é 2.

DRN-P175:

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $P(x) = 4x^3 - 40x^2 + 129x - 135$.

Usando as relações de Girard obtemos: $x_1 + x_2 + x_3 = 40/4 = 10$. Isso implica o semiperímetro p = 10/2 = 5. Mas a forma fatorada

$P(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ nos dá P(5) = 10. Agora podemos usar a fórmula de Hierão para encontrar $S = (5\sqrt{2})/2$.

O Método de Newton de aproximação de raízes

Vamos considerar a equação f(x) = 0, onde f : R → R é uma função definida por

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1.$$

Desejamos obter a raiz real dessa equação. Por inspeção vemos que f(1) = -1 < 0 e f(2) = 3 > 0. Pelo teorema do valor intermediário existe um r no intervalo (1, 2) tal que f(r) = 0.

Temos, ainda, que $f'(x) = 3x^2 - 2x$ e $f''(x) = 6x - 2$.

Disso deduzimos que f'(x) > 0 e f"(x) > 0 para x > 1, o que implica f ser convexa e crescente nesse intervalo. Logo, seu gráfico tem a forma indicada na figura abaixo. Traçando a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ vemos que ela cruza o eixo-x no ponto $(x_1, 0)$. E traçando a

reta tangente em $(x_1, f(x_1))$ vemos que ela cruza o eixo-x no ponto $(x_2, 0)$. Esse processo pode ser continuado para se obter x_3, x_4, ... O desejável é que a sequência seja convergente para r. Verificamos assim, que os pontos x_0, x_1, x_2 vão se aproximando da raiz r. Eles são aproximações da raiz r.

O método de Newton consiste em expressar essa ideia através de uma fórmula de recorrência usando a derivada de f. A equação da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ tem a forma $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, que expressa também, o polinômio de Taylor de 1º grau da função *f* em $x = x_{0,}$

Como a ordenada do ponto $(x_1, 0)$ é $y = 0$, então colocando esse valor na equação acima encontramos

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

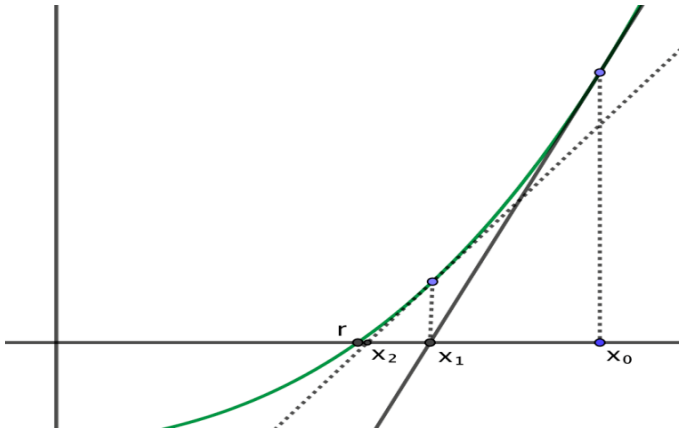
De modo análogo encontramos

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1).$$

Generalizando teremos

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Voltemos à função considerada. Pondo $x_0 = 2$, obtemos $x_1 = 2 - 3/8 = 13/8 = 1{,}625$. E repetindo o processo encontramos $x_2 \cong 1{,}4858$. Esse valor é uma aproximação da raiz $r = 1, 4546$.

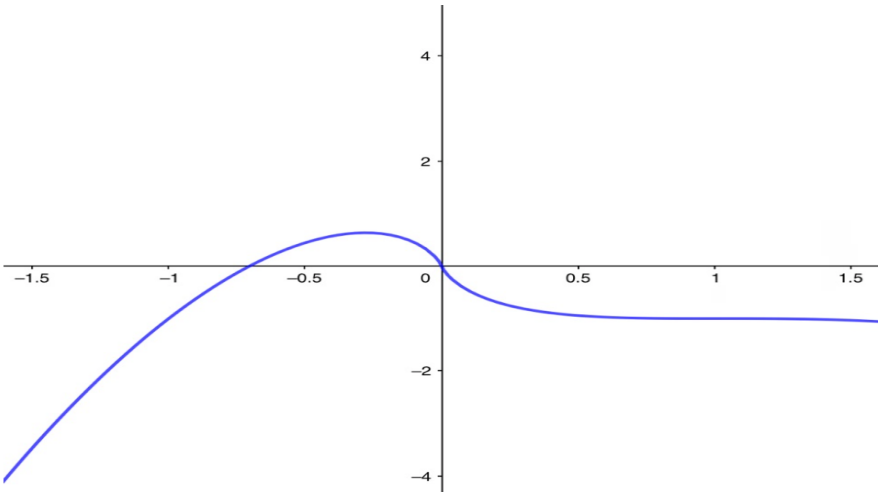


Um outro exemplo, mais complexo, é o de obter a raiz real da equação:

$$x\ln(x^2) - x^2 = 0.$$

- Usando $x_0 = -1$, em cinco iterações do método, obtém-se a raiz $r = - 0{,}703467$. Os valores das aproximações são: $x_1 = - 0, 75$; $x_2 = - 0, 705216$; $x_3 = - 0{,}70347$ e $x_4 = - 0, 703467$. Esses resultados foram encontrados com o aplicativo/programa WolframAlpha.Abaixo temos o esboço do gráfico de $f(x) = x\ln(x^2) - x^2$ obtido com o aplicativo/programa Geogebra. Calcule, usando esse método, o ponto de máximo de f. Para isso

resolva a equação f´(x) = 0. O valor a ser encontrado deve ser x ≅ - 0, 27846. Estude os sinais de f'(x) e f"(x) para justificar o formato do gráfico de f.



Para ampliar os conhecimentos sobre este método consulte a referência [Lima, 2004] **Acesse o Código QR**.

Nesse link, além do método de Newton em R, tem uma extensão dele para o plano complexo que o relaciona aos fractais.

A CURVA DE GAUSS E SUAS APROXIMAÇÕES

Podemos agora compreender a forma da Curva de Gauss, de tanta utilidade na vida social e econômica da sociedade. Ela é o gráfico cartesiano da função real definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

em que μ é a média dos valores de x e σ é o desvio padrão.

Primeiramente, verificamos que *f(x)* é positiva em todo o *R.* Em segundo lugar, vemos que *f(x)* = *(goh)(x)*, em que *g(x)* = *ke*^{x} e *h(x)* = - *c(x* - μ*)*^{2}, ambas de R em *R,* com k = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ e $c = \frac{1}{2\sigma^2}$.

Ou seja, *f* é a composta de duas funções deriváveis em todo o *R.* Logo *f* é derivável em todo o R, também.

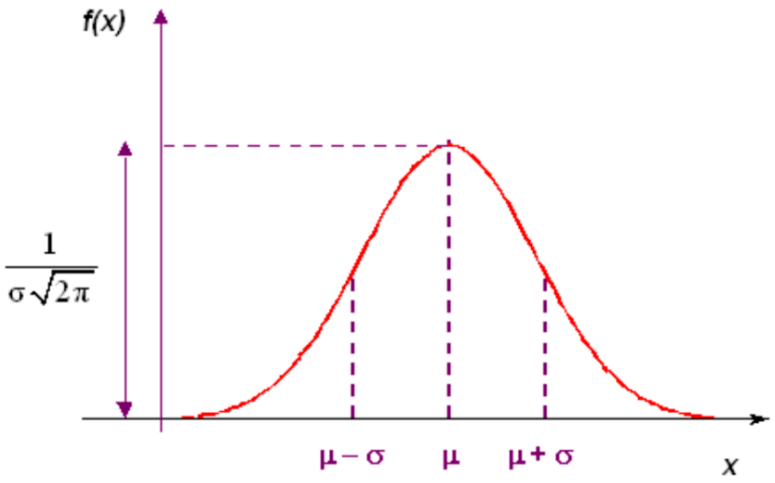
Calculando f'(x) e resolvendo a equação *f'(x) = 0,* obtemos um único ponto crítico *x* = μ. Estudando o sinal de *f'(x)* verificamos que *f'(x) > 0,* se *x* < μ e *f'(x) < 0,* se *x* > μ . Portanto, *f* é crescente no intervalo (- ∞, μ) e decrescente no intervalo (μ, + ∞).

A seguir, calculando *f''(x)* e estudando o seu sinal ao longo do eixo dos x, obtemos: dois pontos de inflexão, $x_1 = \mu - \sigma$ e $x_2 = \mu + \sigma$; um ponto de máximo, $x = \mu$; que *f''(x)* < 0, se $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$; e que *f''(x)* > 0, se $x < \mu - \sigma$ ou $x > \mu + \sigma$.

Disso Concluímos que *f* é convexa em $(-\infty, \mu - \sigma)$ e $(\mu + \sigma, +\infty)$, e é côncava em $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Por fim, observamos que f(x) tende a 0, quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, o que implica o gráfico ser assintótico ao eixo dos x.

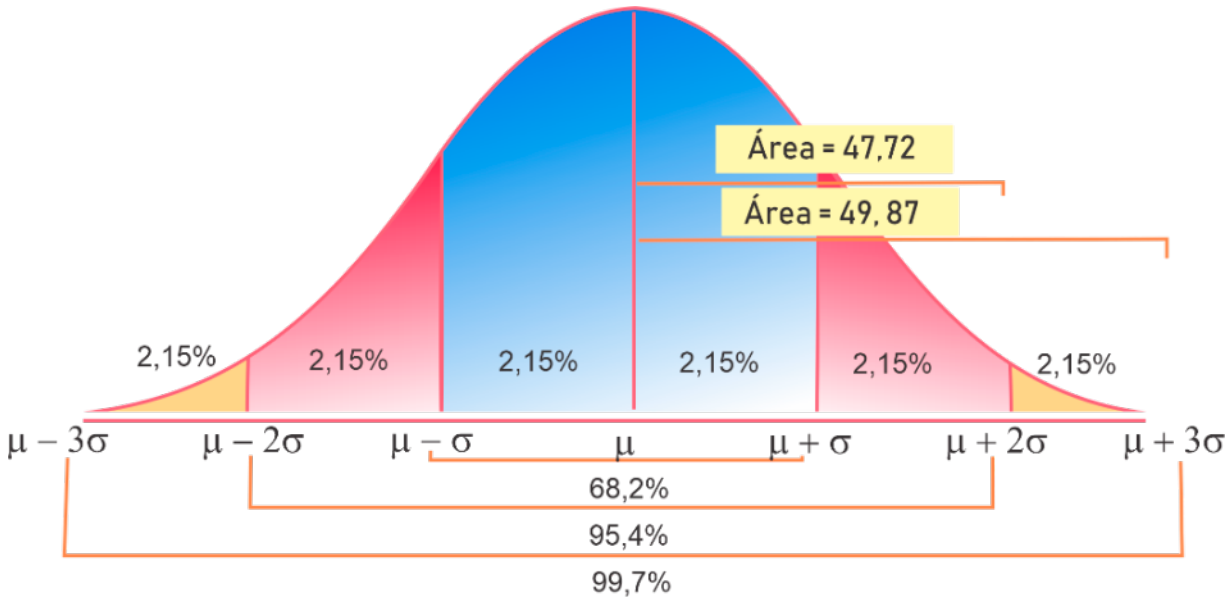
O esboço do gráfico que atende a essas características tem a conhecida *"forma de sino"*:



A função f mostrada na figura não tem uma primitiva elementar.

Para se calcular a área sob a curva temos que utilizar métodos semelhantes àqueles que esboçamos no início do presente capítulo. Isso reforça mais ainda o **método das aproximações multifárias** de que falamos na introdução.

A área da região sob a curva de Gauss expressa o total das probabilidades associadas à variável x. Ela é igual a 1. Noutras palavras, a integral da função f(x) em $R = (-\infty, +\infty)$ é igual a 1. A área sob essa curva, no intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, corresponde, aproximadamente, a 68,3% da área total. Isso significa que a probabilidade da variável aleatória x assumir algum valor entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ é igual a 68,3%. Já tínhamos mostrados, no capítulo -1, a figura a seguir, ilustrando esse e outros valores.



Algo de fabuloso, conhecido como **Teorema do Limite Central**, aumenta a relevância da Curva de Gauss nas aplicações cotidianas da Estatística e a sua popularidade na mídia. Esse Teorema afirma de forma breve e compreensível o seguinte:

Dada uma amostra aleatória e representativa de uma população de dados, a distribuição de todas as médias possíveis será distribuída segundo a Curva de Gauss, independentemente da forma da população de dados da qual se obteve a amostra.

Por isso, na prática, a média de uma única amostra serve como a média de todas as médias possíveis e o desvio padrão dessa amostra serve para estimar o erro padrão da distribuição de todas as médias possíveis. Por outro lado, isso exige uma responsabilidade ímpar na formatação da amostra, tanto do ponto de vista da sua configuração representativa da população de dados estudados, como no padrão aleatório de sua escolha. É claro que tudo isso ocorre dentro do universo das aproximações! Mas as aproximações podem ser sempre melhores e mais precisas!

David Salsburg escreveu:

"O significado da probabilidade na vida real está bem estabelecido para os exames de amostragem. Ele não está bem estabelecido quando os métodos estatísticos são usados para estudos observacionais em astronomia, sociologia, epidemiologia, lei ou previsão do tempo. As disputas que surgem nessas áreas frequentemente se baseiam no fato de que diferentes modelos matemáticos darão origem a diferentes conclusões." [Salsburg, 2009].

Isso é o reconhecimento real dos riscos de se tomar modelos matemáticos como se fossem “exatos”. Os modelos, quaisquer que sejam, mesmo sendo consistentes, quando aplicados à realidade tornam-se aproximações. Por isso, o estudo, cada vez mais aprimorado da realidade em foco devem ser feito e novos

modelos construídos em consonância aproximativa com os novos resultados. Principalmente, em nossos dias, em que os avanços nos algoritmos da Inteligência Artificial aplicada têm impactos abrangentes em quase todos os aspectos das sociedades atuais, como alertamos antes na introdução. Complementando o que expomos nela, acrescentamos a seguinte reflexão da Matemática e pesquisadora de modelos de Big Data, Cathy O'Neil: "*Todo modelo é, por sua própria natureza, uma simplificação. Nenhum modelo pode incluir toda a complexidade do mundo nem os matizes da comunicação humana. É inevitável que parte da informação fique de fora... Ao criar um modelo, portanto, tomamos decisões sobre o que é importante o suficiente para incluir no modelo e simplificamos o mundo em uma versão de brinquedo que pode ser fácil de entender e da qual fatos e ações importantes podem ser deduzidos. Esperamos que o modelo execute uma única tarefa e aceitamos que às vezes ele se comportará como uma máquina que não faz ideia de nada, uma máquina com enormes pontos cegos... Os pontos cegos de um modelo refletem as opiniões e prioridades de seus criadores." (...) "Vemos , pois, que os modelos, apesar de sua reputação de imparcialidade, refletem objetivos e ideologias... Nossos próprios valores e desejos influenciam nossas escolhas, desde os dados que decidimos coletar até as perguntas que fazemos. Modelos são opiniões embutidas na matemática ... Em cada caso, devemos nos perguntar não apenas quem desenhou o modelo, mas também o que a pessoa ou empresa em questão está tentando alcançar com ele."* (...)

"*Os processos de big data codificam o passado. Eles não inventam o futuro. Inventar o futuro requer imaginação moral e isso é algo que só os seres humanos podem oferecer. Devemos integrar explicitamente os melhores valores em nossos algoritmos e criar modelos de big data que sigam nossa orientação ética. E às vezes isso significa priorizar a justiça sobre o lucro."* [O'Neil, 2020].

O físico teórico David Bohm já alertava na década de 1970, de modo mais profundo ainda: *"Pode-se de fato comparar uma teoria com uma determinada visão de algum objeto. Cada visão dá apenas uma aparência do objeto em algum aspecto. O objeto todo não é percebido em nenhuma visão mas, em vez disso, é apreendido só implicitamente como aquela realidade única que é mostrada em todas as visões". (...)*

"Além de uma consciência geral do papel das teorias conforme anteriormente indicado, é necessário dar especial atenção àquelas teorias que contribuerm para a expressão de nossas visões de mundo pessoais. Isto porque, em grande parte, é nessas visões de mundo que nossas nocões gerais sobre a natureza da realidade e sobre a relação entre o pensamento e a realidade são implícita ou explicitamente formadas." [Bhom, 1980].

Também é oportuna a repetição de uma colocação de Xavier Zubiri que mencionamos na Introdução:

"A construção matemática é sempre, portanto, um ato de inteligência senciente. E portanto, o objeto matemático tem realidade postulada. Não é um conceito objetivo da realidade, mas realidade em conceito. É, insisto, a realidade mesma de qualquer coisa real sencientemente apreendida, mas com um conteúdo livremente construído na referida realidade segundo conceitos."

E como os conceitos, de acordo com a nossa teoria das aproximações multifárias, são também aproximações da realidade estudada, **toda a Matemática é também uma rede de aproximações multifárias da realidade estudada.** Por isso, como já afirmamos na introdução deste livro, não existe ciência exata!

Algumas "aproximações" que ampliam a compreensão da distribuição normal.

Consideremos a função real g(x) = e^{-x^2}. Seu gráfico tem aproximadamente a mesma forma da curva de Gauss. A partir da série de Taylor de e^x pode-se obter, facilmente, a série de Taylor de g(x). Fazendo o desenvolvimento até 12 termos e integrando termo a termo, no intervalo [-3/2, 3/2] , obtemos o valor aproximado de 1, 71353, com o aplicativo WolframAlpha. E usando esse mesmo aplicativo para a integral de g(x), obtemos o valor aproximado de 1, 71238. Na verdade, o valor da integral de g(x), na reta toda $(-\infty, +\infty)$, é igual a $\sqrt{\pi}$, que é aproximadamente 1,77245. Isso explica, em boa parte, a existência da fração $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ na expressão da função f. Quanto ao cálculo mais preciso da integral de g(x) em $(-\infty, +\infty)$, podemos construir algumas aproximações. Imagine a rotação do gráfico de g, no espaço(R^3), em torno do eixo dos z. Assim, a superfície gerada é gráfico da função de duas variáveis z = $e^{-x^2-y^2}$.

Para se calcular o volume da região que fica sob o gráfico de z, e acima do plano xy, integramos essa função, primeiro em relação a *x* e depois em relação a *y,* considerando em cada caso a outra variável constante. Fazemos primeiramente no quadrado (- b, b) x (-b , b) e depois no plano todo $(-\infty, +\infty)\ X\ (-\infty, +\infty)$. Este método de calcular o volume de um sólido é conhecido por *processo das seções transversais ou das "fatias*".

Indicando por L o valor da integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, chega-se ao resultado : V = $4L^2$. A seguir, interpretando a região sob o gráfico como um sólido de revolução, calculamos pela fórmula V = $\int_0^{\infty} 2\pi x g(x) dx$, que decorre do método das "cascas cilíndricas" ou teorema de Pappus. Nesse caso verifique que a primitiva de $2\pi x g(x)$ é $-\pi g(x)$ = $-\pi e^{-x^2}$.

Logo,

$\int_0^{\infty} 2\pi x g(x)dx = \lim_{b\to\infty} \pi(1-e^{-b^2}) = \pi$. Disso segue que $4L^2 = \pi$ e, portanto, $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Observe que, em virtude de g(x) ser par, temos: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Também relacionada com a função g, temos a "*função erro*" que se expressa assim: erf(x) = $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$ ou erf(x) = $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}dt$, definida para todo x real.

Há uma relação direta dessa função com a "*função de distribuição acumulada"* da *distribuição normal padrão*($\mu = 0, \sigma = 1$)*:*

$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$ ou erf(x) = $2\,\Phi\left(x\sqrt{2}\right) - 1$, em que $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$. No caso geral, em que $\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$, teremos $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$.

Vimos, anteriormente, a função $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ cujo gráfico tem boa proximidade com o gráfico da g(x) vista acima. Através da série de Taylor de *f* , desenvolvida na vizinhança de 0, e com a integração termo a termo, obtivemos a série de Taylor que define a função *arctg(t)*, pois a primitiva de $\frac{1}{1+t^2}$ é *arctg(t).* Assim, o valor da área sob o gráfico de $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, na reta toda $(-\infty, +\infty)$, é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\lim_{b\to\infty}[arctg(b) - arctg(0)] = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

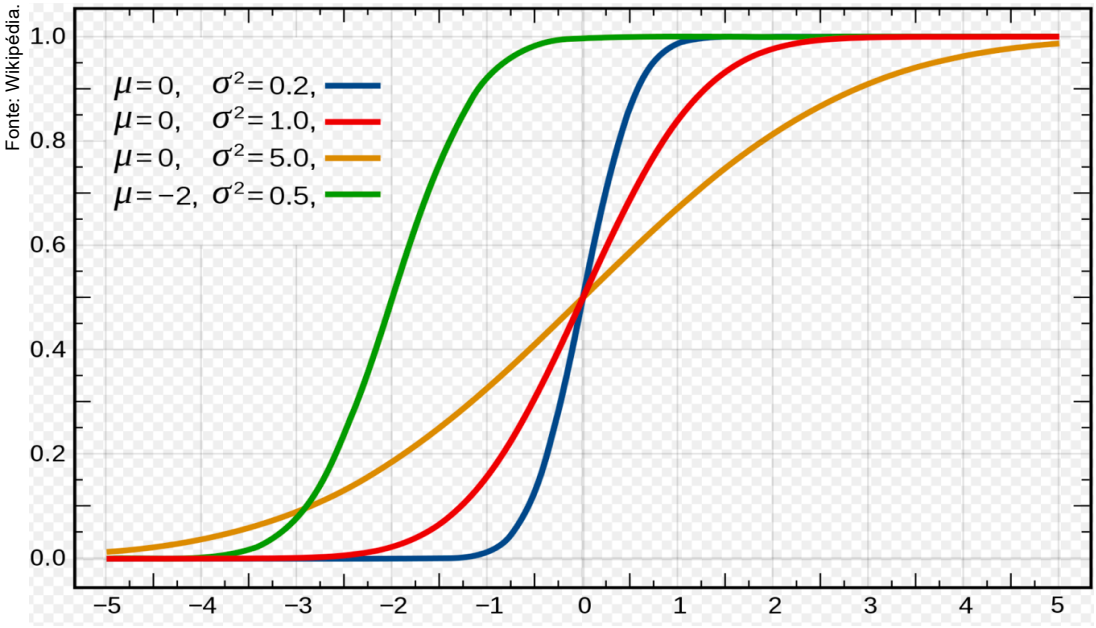
Perceba que a função g(t) = $\frac{1}{\pi}f(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$, já mencionada no segundo capítulo, é uma boa candidata a função densidade de probabilidade, pois $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 1.$

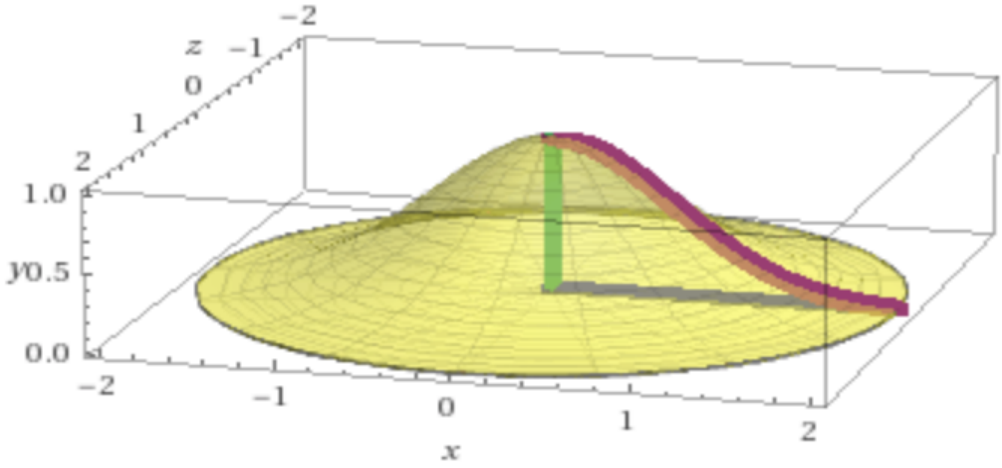
A conhecida *função de distribuição(acumulada) de Cauchy* é dada por

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg(t).$$

A seguir, ilustramos os gráficos das funções $\Phi(x)$ e z = $e^{-x^2-y^2}$.

Fonte: Wikipédia.





Obs.: Uma "casca cilíndrica" de altura h e raios(interno e externo) r_1, r_2, com $r_2 > r_1$, tem volume igual a V = $\pi(r_2^2 - r_1^2)h = 2\pi rh \triangle r$, onde $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ e $\triangle r = r_2 - r_1$. Uma boa aproximação do volume do sólido de revolução descrito anteriormente pode ser dada pelo somatório de volumes $V_i = 2\pi u_i g(u_i) \triangle x_i$ de finas "cascas cilíndricas" de altura $g(u_i)$ e raio médio u_i ao longo de uma partição do intervalo [0, $+\infty$). Mas isso significa uma soma de Riemann que levada ao limite se transforma na integral $\int_0^\infty 2\pi x g(x)dx$.

Para mais informações sobre a curva de Gauss consulte o **Código QR**.

INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS

Assim como definimos derivada parcial, também podemos definir integral parcial. Seja f uma função real de duas variáveis definida no retângulo $[a,b]X[c,d]$ com valores em R. Então, a integral $\int_c^d f(x,y)dy$ é compreendida como uma integral definida de f em relação à variável y, mantendo x constante. Por exemplo, seja $f(x,y) = xy$, definida no retângulo $[2,5]X[1,3]$. Então temos $\int_2^5 xy\,dx = \frac{21}{2}y$.

Pondo G(y) = $\frac{21}{2}y$, podemos agora repetir o processo de integração em relação à variável y: $\int_1^3 \frac{21}{2}y\,dy$ =42. De fato, fizemos o seguinte: $\int_1^3 G(y)dy = \int_1^3 [\int_2^5 xydx]dy$, que é uma **integral iterada ou integral repetida.** Comumente, indicamos essa integral sem usar os colchetes, mas deixando subentendido que a ordem de integração é de "dentro para fora": $\int_1^3 [\int_2^5 xydx]dy = \int_1^3 \int_2^5 xy\,dxdy$. A ideia aqui é interpretarmos essa integral iterada como uma integral dupla da função f no retângulo dado. Verifique no exemplo dado que a inversão da ordem de integração não altera o resultado. Isso é o desejado. O teorema que apresentamos a seguir caracteriza as condições em que podemos usar integral iterada para calcular uma integral de uma função de duas variáveis em um determinado subconjunto de R^2. Os subconjuntos que vamos considerar são de um dos seguintes tipos: *verticalmente simples e horizontalmente simples.* Um subconjunto de R^2 é verticalmente simples, quando tem a forma {(x, y); $x \in [a,b]$ e $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$}, em que y_1 e y_2 são funções contínuas em $[a,b]$. E um subconjunto de R^2 é horizontalmente simples, quando tem a forma {(x, y); $y \in [c,d]$ e $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$}, em que $x_1(y)$ e $x_2(y)$ são funções contínuas em $[c,d]$.

Perceba que esses dois tipos de subconjuntos do plano são casos especiais de conjuntos simplesmente conexos. Geometricamente, a interseção de uma reta vertical com um conjunto verticalmente simples é um segmento ou um ponto; e a interseção de uma reta horinzontal com um conjunto horizontalmente simples é um segmento ou um ponto.

TEOREMA DA INTEGRAL ITERADA:

Seja $f: D \subset R^2 \to R$ uma função contínua em D.

Se D é um conjunto verticalmente simples, então

$$\iint_D f dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dydx.$$

Se D é um conjunto horizontalmente simples, então

$$\iint_D f dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dxdy.$$

Um caso importante de funções que são adequadas para a aplicação desse teorema são as funções contínuas de duas variáveis que podem ser expressas como um produto de funções contínuas de uma variável:

$f(x,y) = g(x).h(y)$. Verifique que o exemplo dado é desse tipo. Nesse caso, se D for um retângulo $[a,b]X[c,d]$, ocorre o seguinte:

$$\iint_D f dA = [\int_a^b g(x)].[\int_c^d h(y)dy].$$

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [Apostol, 1969]. A demonstração de Apostol está seguindo a integral de Riemann e está bem didática, pois primeiro prova para regiões retangulares e depois é que prova para regiões simples. E como se trata de funções contínuas, não há diferença relevante em relação à definição que usamos nesta nossa obra. Esse teorema é que justifica os métodos de integração citados no tópico sobre a curva de Gauss: método das fatias e método das “cascas cilíndricas” ou **teorema de Pappus**. No estudo mais especializado da Teoria da Medida temos o famoso **Teorema de Fubini**. O teorema da integração repetida para retângulos é um caso particular desse teorema.

Pensando com a visão das aproximações multifárias, percebemos que nesse contexto partimos do caso mais simples de um retângulo para outras formas de D mais complexas. Pois o que estamos tentado fazer é calcular uma integral dupla em função de integrais simples que já

“aprendemos” a calcular de modo mais fácil. Numa analogia aproximativa, assim como a derivada de uma função de várias variáveis pode ser expressa em termos de suas derivadas parciais, representada pela jacobiana, gostaríamos de expressar a integral dela em termos de integrais parciais simples. Este teorema faz esse papel. Ele pode ser generalizado para dimensões maiores, em que as funções são de n variáveis, pondo D como um cubo de dimensão n. Aqui percebemos a dificuldade de se calcular integrais múltiplas, bem como volumes de conjuntos de dimensões maiores com formas mais complexas. Por isso tantos métodos e algoritmos são desenvolvidos para dar conta dos problemas concretos da realidade estudada. E com a facilidade de cálculo algorítmico das TDIC, podemos e devemos cada vez mais nos dedicarmos ao aprimoramento dos métodos e teorias em todas as áreas da Matemática. **Mais uma vez vemos como a realidade concreta, em contexto histórico-cultural, é a verdadeira fonte germinal dos problemas e das teorias de toda a matemática. O que a gente às vezes não percebe é a cadeia de transições/aproximações que ligam os aparentes problemas abstratos dos problemas e questões originais que os produziram**. Basta passar uma vista rápida na história da ciência e da tecnologia para perceber a influência do contexto histórico-cultural sobre os problemas prioritários da física e das engenharias, que por sua vez provocaram e condiconaram o desenvolvimento das teorias e problemas da matemática.

Precisamos na atualidade estudar matemática e suas aplicações com as possibilidades da computação e mediação digitais,incluindo a IA generativa,e não só o que podemos fazer com lápis e papel. Acredito inclusive, que com a adoção do ENEM digital no Brasil, teremos a oportunidade de adequar o programa de Matemática do ensino médio e fundamental(anos finais) para a configuração das aproximações multifárias como estamos aqui defendendo.

Recordemos algo dito na introdução: “Mestres e pesquisadores dessa linda ciência-arte-linguagem devem usar, cada vez mais, com mediação técnico-simbólica digital, aproximações e transições, com mais metáforas e narrativas associadas à realidade contextualizada dos aprendentes, nos processos de Aprender/Ensinar. Sobretudo, integrando tópicos de diferentes áreas da própria Matemática. Mas, também, indicando suas relações com ideias e conceitos de outras áreas da ciência/tecnologia, bem como usando de forma habilidosa e humanista as TDIC no processo dinâmico de Aprender/Ensinar.”

Nós vamos concluir este capítulo com a resolução de dois problemas. O primeiro deles é bem antigo e famoso na matemática, conhecido pelo nome de **problema isoperimétrico.** Uma maneira de formulá-lo é a seguinte: *Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento ℓ, qual delas limita a maior área?* Dessa forma o problema já era conhecido dos antigos gregos, que sabiam qual era a solução: uma circunferência. No entanto, a demonstração disso, ainda em uma forma matemática complexa, só veio acontecer em 1870 com Karl Weierstrass. A demonstração que vamos apresentar aqui depende, em parte, do Teorema de Green. Recordo que já mostramos antes, no capítulo 3, uma solução geométrica simples desse problema. Também, nesse mesmo capítulo, na questão QT-47 "Por que o quadrilátero inscritível é o de maior área?", apresentamos dois métodos de resolução, e em um deles usamos a propriedade isoperimétrica de que *o círculo é a figura plana de maior área entre todas aquelas que têm o mesmo perímetro.* Vale a pena rever esses pontos do capítulo 3. Desse jeito, através de um problema bem contextualizado e de formulação simples, estaremos vivenciando a integração de tópicos da matemática com uma transição aproximativa da Matemática Intermediária.

TEOREMA DE GREEN(PARA REGIÕES CONVEXAS)

Seja D uma região convexa do plano limitada por uma curva suave fechada α, orientada no sentido anti-horário. Se P e Q são funções reais com derivadas parciais contínuas em D e α, então

$$\int_{\alpha} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA.$$

Prova:

A curva α, conforme ilustra a figura a seguir, consiste dos gráficos de duas funções: $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Então

$$\int_{\alpha} P(x,y)dx = \int_{a}^{b} P(x,g(x))\ dx + \int_{b}^{a} P(x,f(x))\ dx$$

$$= \int_{a}^{b} P(x,g(x))\ dx - \int_{a}^{b} P(x,f(x))\ dx$$

$$= \int_{a}^{b} [P(x,g(x)) - P(x,f(x))]\, dx.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, deduzimos que

$$P\left(x, g(x)\right) - P(x, f(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} -\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Logo

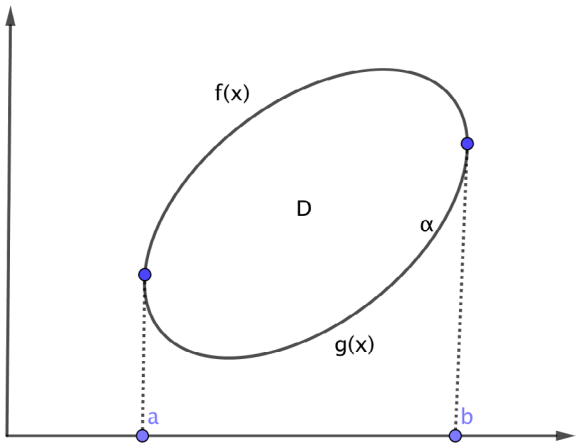
$$\int_{\alpha} P(x,y)dx = \int_{a}^{b}[-\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\, dy]\, dx$$

E pelo teorema da integral iterada temos que

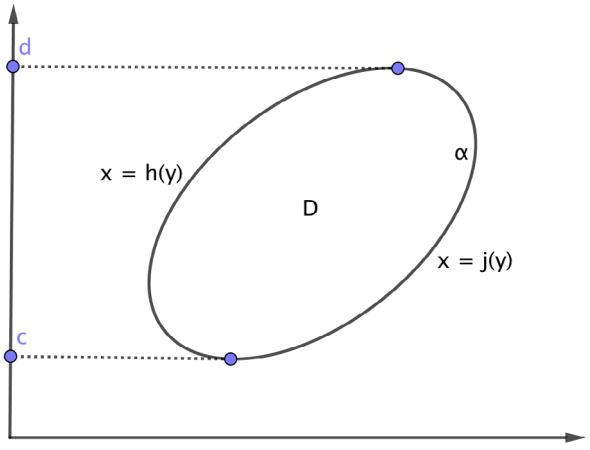
$$\int_{a}^{b}[-\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\, dy]\, dx = \iint_{D} \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\right] dA.$$

Combinando esses resultados , concluímos:

$$\int_{\alpha} P(x,y)dx = \iint_{D} \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\right] dA. \qquad (1)$$



Para calcular $\int_{\alpha} Q(x,y)dy$ procedemos de modo análogo, agora colocando a curva α como resultante da união dos gráficos das funções $x = h(y)$ e $x = j(y)$, conforme indica a figura a seguir.



Assim, obtemos

$$\int_\alpha Q(x,y)dy = \iint_D \left[-\frac{\partial Q}{\partial x}\right] dA. \qquad (2)$$

Por (1) e (2) concluímos que

$$\int_\alpha P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA.$$

Corolário

A área de uma região convexa D do plano, delimitada por uma curva suave fechada α, orientada no sentido anti-horário, tem área A dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha -ydx + xdy = \int_\alpha -ydx = \int_\alpha xdy.$$

Prova:

Pondo $P(x,y) = -y$ e $Q(x,y) = 0$ no Teorema de Green, obtemos:

$$\int_\alpha -ydx = \iint_D 1\, dA = A.$$

P(x, y) = 0 e Q(x,y) = x $P(x,y) =$ e $Q(x,y) = x$ no Teorema de Green, obtemos:

$$\int_\alpha x\, dy = \iint_D 1\, dA = A.$$

Combinando esses dois resultados, deduzimos que $\frac{1}{2}\int_\alpha -ydx + xdy =$ A. Portanto,

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha -ydx + xdy = \int_\alpha -ydx = \int_\alpha xdy.$$

Como um exemplo ilustrativo desse corolário, calculemos a área A de uma região do plano delimitada por uma elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Parametrizando com $x = a\cos t$ e $y = b\,sen\,t$, $t \in [0, 2\pi]$, e usando $A = \int_\alpha xdy$, obtemos

A = $\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\, dt = ab\int_0^{2\pi} cos^2 t\, dt = ab\int_0^{2\pi} (\frac{1+\cos 2t}{2})\, dt = \pi ab.$

O teorema de Green pode ser visto, de forma aproximada, como o análogo do teorema fundamental do cálculo para funções de duas variáveis definidas em um conjunto convexo D do plano. Perceba que no caso de uma variável a integral de uma função *f*, em um intervalo [a, b], é igual ao valor de uma primitiva de *f* na fronteira de [a, b]: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. No caso do teorema de Green, a integral dupla de cada uma das funções $\frac{\partial Q}{\partial x}$ e $-\frac{\partial P}{\partial y}$ em D, é igual à

integral de linha de uma função respectiva na fronteira de D. Embora não exista uma primitiva global nesse caso, mas temos uma "aproximação", pois P e Q são "primitivas parciais" de $-\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$, respectivamente, de acordo com a demonstração do teorema de Green.

O teorema de Green se estende para superfícies curvas do espaço(R^3) com o nome de teorema de Stokes. Além disso, através das "formas diferenciais", o teorema de Stokes se generaliza para superfícies de dimensão m contidas em R^n. Sobre isso, veja as referências [Lima, 2011] e [Rudin, 1971].

NOTA(Teorema de Cauchy das funções complexas)

Um teorema que resulta ser um corolário do Teorema de Green é o Teorema de Cauchy da funções de uma variável complexa. Vamos apresentar aqui uma versão mais simples, em sintonia com a versão dada do teorema de Green.

"Sejam D $\subset \mathcal{C}$ um aberto conexo e f uma função holomorfa com derivada contínua em D. Se D é um aberto convexo com fronteira α contida em D, então* $\int_\alpha f(z)dz = 0$."

Para provar esse teorema, devemos considerar $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$.Disso se obtém:

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\alpha u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\alpha v(x,y)dx + \text{u(x, y)dy.}$$

Como f é holomorfa, então ela satisfaz às condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Disso segue $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Usando o Teorema de Green e esses resultados, teremos:

$$\int_\alpha u(x,y)dx - v(x,y)dy = -\iint_{D*} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] dA = 0$$

e

$$\int_\alpha v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_{D*} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dA = 0.$$

Disso segue $\int_\alpha f(z)dz = 0$.

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

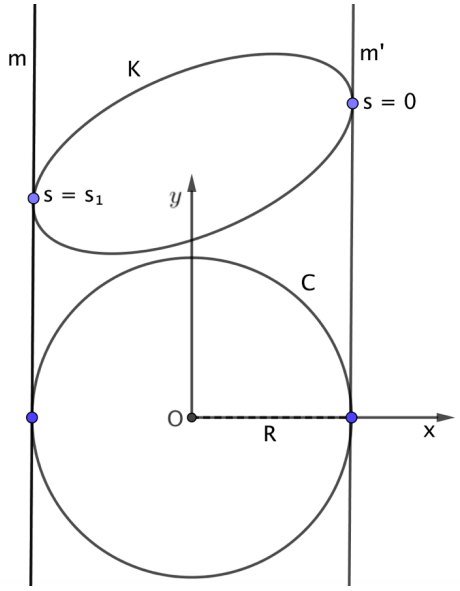
Seja D uma região convexa do plano limitada por uma curva suave K fechada de comprimento ℓ. Seja A a área da região convexa plana limitada por K. Então

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0 \quad e$$

$$\ell^2 = 4\pi A \Leftrightarrow K \text{ é uma circunferência.}$$

Prova:

Em virtude da convexidade de K podemos traçar, no plano de K, duas retas tangentes a K , m e m', que são paralelas, conforme indica a figura a seguir. Seja 2R a distância entre essas duas retas. Tracemos também uma circunferência C, de raio R e centro O, tangente às duas retas m e m' e que não intersecta a curva K. Construamos também um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com centro em O. Agora, vamos parametrizar K pelo comprimento de arco: $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com orientação anti-horária e os pontos de tangência com as retas m e m' dados por s = 0 e s = s_1, respectivamente. E vamos parametrizar C assim: $\beta(s) = \big(u(s), v(s)\big) = \big(x(s), v(s)\big),\ s \in [0, \ell]$.



Usando o corolário do teorema de Green mostrado antes, podemos calcular a área A assim: $A = \int_0^\ell xy'ds$. Por outro lado, a área do círculo de raio R é S = $\pi R^2 = \int_0^\ell - vx'ds$.

Segue disso que

$$A + \pi R^2 = \int_0^{\ell} xy'ds + \int_0^{\ell} - vx'ds = \int_0^{\ell} (xy' - vx')ds$$
$$= \int_0^{\ell} (x', y').(-v, x)ds.$$

Podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao produto interno $(x', y').(-v, x)$ para obter $|(x', y').(-v, x)| \leq |(x', y')||(-v, x)| = 1.|(-v, x)| = |(-v, x)| = |\beta(s)|$, em virtude da parametrização ser pelo comprimento de arco ($|\alpha'(s)| = 1$).

Logo,

$$A + \pi R^2 = \int_0^{\ell} (x', y').(-v, x)ds \leq \int_0^{\ell} |\beta(s)|ds.$$

Mas $|\beta(s)| = R$,então $\int_0^{\ell} |\beta(s)|ds = R\,\ell$. Disso se conclui que $A + \pi R^2 \leq R\,\ell$.

Sendo A e πR^2 positivos, podemos aplicar a desigualdade MA ≥ MG para obter:

$$2\sqrt{A\pi R^2} \leq A + \pi R^2, \text{ que implica } 2\sqrt{A\pi R^2} \leq R\,\ell\ .$$

Disso segue $4A\pi R^2 \leq R^2\ell^2$, de onde se obtém a desigualdade desejada:

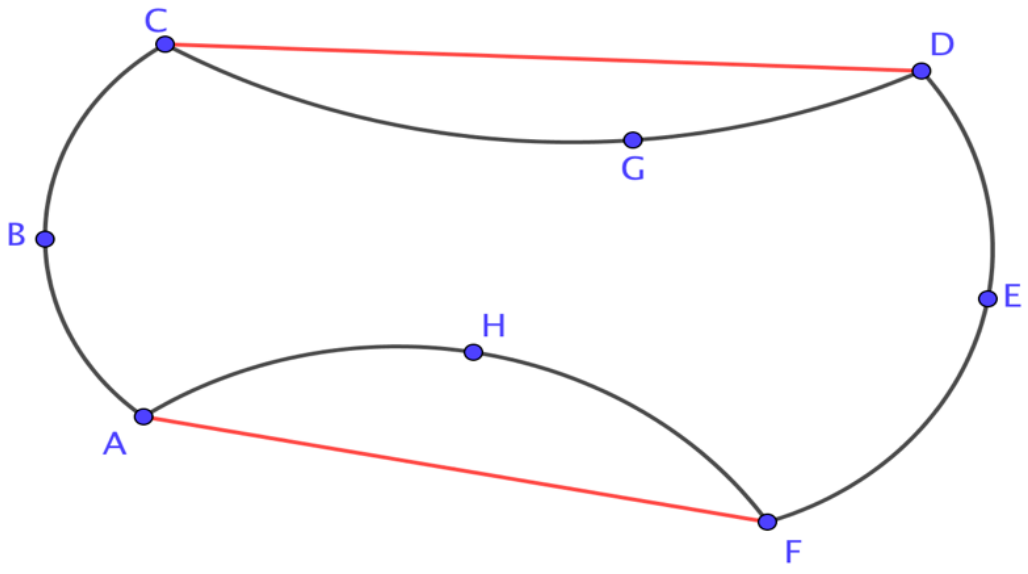
$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0\ .$$

Falta provarmos a segunda parte.

Sabemos que MA = MG se e só se $A = \pi R^2$. Se $\ell^2 = 4\pi A$, então $\ell = 2\pi R$. Portanto, A é máxima quando $A = \pi R^2$ e $\ell = 2\pi R$. Isso mostra que esse resultado não depende da direção das retas paralelas escolhidas, m e m'. Logo, poderíamos tomar outro par de retas paralelas tangentes a K e perpendiculares a m e m' e fazer uma argumentação análoga. Ademais, decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz que a igualdade $|(x', y')||(-v, x)| = |\beta(s)| = R$, implica a proporcionalidade $(x', y') = \frac{1}{R}(-v, x)$. Disso segue $y' = \frac{1}{R}x$. No caso do par de retas perpendiculares a m, teríamos $x' = \frac{1}{R}y$.

Com isso, concluímos que $(x')^2 + (y')^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$, que é a equação de uma circunferência de raio R.

Embora a demonstração apresentada esteja restrita a curvas convexas, ela é bem abrangente. Pois se a curva não for convexa, podemos usar a *envoltória convexa* dela, a qual tem comprimento menor e área maior. Define-se a *envoltória convexa* de uma curva plana fechada simples K como a fronteira do menor conjunto convexo que contém o interior de K. Esclarecemos, que no campo da Otimização o conceito de fecho convexo ou envoltória convexa de um dado conjunto D de pontos de R^n significa o menor conjunto convexo de R^n que contém D. A figura mostrada a seguir ilustra a envoltória convexa de uma curva fechada simples não convexa formada pela união de quatro arcos: ABC, CGD, DEF e FHA. Observe que a envoltória é formada pelos arcos ABC e DEF e os segmentos de reta AF e CD.



Obs.: Perceba a presença marcante das desigualdades MA ≥ MG e de Cauchy-Schawrz na demonstração da desigualdade isoperimétrica. São mais evidências das "aproximações multifárias" na construção do conhecimento matemático da Realidade Estudada.

Para ampliar seus conhecimentos sobre a história e a evolução do problema isoperimétrico, bem como outros caminhos de solução, há muita coisa disponível via web. Três exemplos são os links colocados a seguir. **Acesse o Código QR(I)**, **Código QR(II)** e **o Código QR(III)**. A seguir, vamos expor e resolver o segundo problema anunciado, que é o cálculo do volume de uma bola esférica do espaço vetorial euclidiano R^n.

QR (I) QR (II) QR (III)

CÁLCULO DO VOLUME DE UMA ESFERA(BOLA) DO R^n

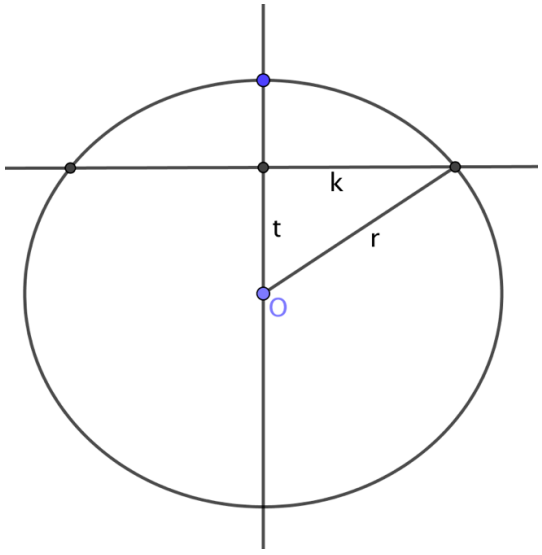
Sabemos que a área(volume de uma figura plana) de um círculo de raio r é πr^2 e o volume de uma esfera(bola) do R^3 é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Essas fórmulas podem ser obtidas pelo método das fatias, que está fundamentado na integração iterada. No caso da reta R, a bola de raio r é o intervalo [- r, r] que tem comprimento(volume) 2r. Mostremos o caso de R^3. Considere a bola esférica centrada na origem do sistema cartesiano ortogonal. Então qualquer interseção de um plano paralelo ao plano xy com a bola no intervalo (- r, r) do eixo-z é um disco de raio k = $\sqrt{r^2 - t^2}$, onde t é a distância do plano à origem do sistema. Assim temos que o volume $V_3(r)$ da bola é

$$V_3(r) = 2\int_0^r \pi(r^2 - t^2)dt = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Para provar a fórmula $V_2(r) = \pi r^2$ em R^2, procedemos de modo análogo usando retas paralelas ao eixo-x para intersectar o disco no intervalo (-r, r). Cada segmento da interseção tem comprimento igual a $2\sqrt{r^2 - t^2}$, onde t é a distância dele à origem do sistema. Logo, $V_2(r) = 2\int_0^r 2\sqrt{r^2 - t^2}\, dt$.

Fazendo $t = rsen\, x$, temos d$t = rcosxdx$,

o que nos leva a $V_2(r) = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos^2 x\, dx = 2r^2 \frac{\pi}{2} = \pi r^2$. A figura a seguir ilustra parcialmente esses casos.



Vamos agora calcular o volume da bola esférica em R^4. Denotemos por w o quarto eixo cartesiano. Então, para cada w = t no intervalo (- r, r) teremos uma esfera de raio k = $\sqrt{r^2 - t^2}$, pois

$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2$. Assim, o volume $V_4(r)$ da bola em R^4 será dado pela integral da esfera(bola) de raio variável k, ao longo do segmento [- r, r]. E considerando a simetria da esfera(bola) teremos:

$$V_4(r) = 2\int_0^r \frac{4}{3}\pi(r^2 - t^2)^{3/2}\, dt = \frac{8}{3}\pi \int_0^r (r^2 - t^2)^{3/2}\, dt.$$

Se r = 1, então temos que

$V_4(1) = 2V_3(1) \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2}\, dt$, $V_3(r) = 2V_2(1) \int_0^1 (1 - t^2)\, dt$, $V_2(1) = \pi = 2V_1(1)\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$. Isso sugere uma possível recorrência geral. Ela tem a seguinte forma: $V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt$, para $n \geq 2$. Provaremos essa fórmula, mais à frente. Por outro lado, usando a transformação linear em R^n dada por T(X) = AX, em que A é uma matriz diagonal escalar com cada escalar da diagonal igual a r, obtemos que o volume da bola de raio r em R^n é dado pelo produto do detA = r^n pelo volume da bola de raio unitário: $V_n(r) = r^n V_n(1)$. Com isso podemos determinar $V_n(r)$ para uma bola de raio r no espaço euclidiano R^n pela fórmula de recorrência:

$$V_n(r) = 2r^n V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt. \quad (1)$$

Voltando ao cálculo de $V_4(1)$, observe que fazendo $t = sen\, x$, obtemos

$$\int_0^1 (1 - t^2)^{3/2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{16}.$$

Logo, $V_4(1) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi^2}{2}$ e , por conseguinte $V_4(r) = \frac{\pi^2}{2} r^4$.

Agora vamos provar a recorrência $V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt$. O modelo é o mesmo que usamos para calcular $V_4(1)$, combinado com a fórmula $V_n(r) = r^n V_n(1)$. Temos, por definição, que a bola esférica de raio unitário em R^n é dada por $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$.

Disso segue

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2.$$

Para cada $x_n = t$, temos uma bola de raio k = $\sqrt{1 - t^2}$ em R^{n-1}. Usando o método das fatias temos que o volume de $V_n(1)$ é dado por

$$V_n(1) = 2 \int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1 - t^2}\right) dt = 2 \int_0^1 V_{n-1}(1)\left(\sqrt{1 - t^2}\right)^{n-1} dt = 2V_{n-1}(1)$$

$$\int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt.$$

Existe outro caminho para calcular $V_n(r)$. Ele decorre da percepção de uma recorrência que resulta da comparação dos valores de $V_4(1)$ com $V_2(1)$ e de $V_3(1)$ com $V_1(1)$. Ela tem este formato:

$$V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1), \qquad \text{se } n \geq 3.$$

Com isso temos uma nova fórmula para $V_n(r)$:

$$V_n(r) = \frac{2\pi}{n} r^n V_{n-2}(1). \quad (2)$$

Essa última fórmula de recorrência pode ser colocada noutra configuração, com o uso da função gama, que é uma função que generaliza o fatorial para valores reais. A fórmula (2) fica assim:

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \quad (3)$$

Recordemos algumas propriedades da função gama:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(2) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Analisando a fórmula (1), vemos que o integrando da integral $\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$ é um polinômio real de grau *n – 1,* se *n* é ímpar, o que facilita a integração. É o caso de n = 5, onde o integrando é o polinômio P(t) = $(1-t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$, de grau 4. Disso vem $\int_0^1 P(t)dt = \frac{8}{15}$, o que nos leva a $V_5(r) = \frac{8}{15}\pi^2 r^5$. Falta provar a fórmula (2).

Consideremos a condição definidora de uma bola unitária de R^n , centrada na origem:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1.$$

Decorre dessa condição, de modo equivalente, que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_n^2 - x_{n-1}^2 \text{ e } x_n^2 + x_{n-1}^2 \leq 1.$$

Logo, podemos expressar o valor de $V_n(1)$ pela integral dupla, sobre o disco unitário D dado por $x_n^2 + x_{n-1}^2 \leq 1$, da bola de raio k = $\sqrt{1-(x_n^2+x_{n-1}^2)}$ de R^{n-2}. Isto é,

$$V_n(1) = \iint_D V_{n-2}(k)dA. \ (*)$$

Para calcular essa integral, façamos $x = x_{n-1}$ e $y = x_n$. E usando a fórmula $V_n(r) = r^n V_n(1)$, obtemos:

$$V_{n-2}(k) = k^{n-2}V_{n-2}(1) = \left(\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)^{n-2}V_{n-2}(1) = \left(1-(x^2+y^2)\right)^{\frac{n-2}{2}}V_{n-2}(1).$$

Substituindo esse resultado em (*), encontramos:

$$V_n(1) = \iint_D \left(1-(x^2+y^2)\right)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2}(1)\, dA.$$

Mudando para coordenadas polares, deduzimos:

$$V_n(1) = V_{n-2}(1)\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r\,dr\,d\theta = V_{n-2}(1)\,\frac{2\pi}{n}.$$

Observe a segunda fórmula: $V_n(r) = \frac{2\pi}{n}r^n V_{n-2}(1)$. Vamos compará-la com a (3). Perceba que a (2) implica o seguinte:

$$V_n(r) = \frac{V_{n-2}(1)}{\frac{n}{2}}\pi r^n = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\frac{n}{2}.(\frac{n-2}{2})....(\frac{2}{2})} = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}$$, se n for par; e

$$V_n(r) = \frac{V_{n-2}(1)}{\frac{n}{2}}\pi r^n = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\frac{n}{2}.(\frac{n-2}{2})....(\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}$$, se n for ímpar.

Verifique que da combinação das fórmulas (1) e (3) resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Agora pare um pouco e contemple as fórmulas (1), (2), (3) e essa última, com a visão das Aproximações Multifárias, para perceber as diversas relações e integrações de conteúdos incluídos nelas, revelando a beleza das formas e padrões decorrentes disso. A presença da paridade e sua relação com funções polinomiais e transcendentes(trigonométricas) e a dimensão do espaço vetorial R^n; a transição do discreto para o contínuo tão bem realizada pela função gama, que unifica a paridade e generaliza o fatorial; por último a presença da teoria da medida/integração em espaço euclidiano, passando pela generalização do teorema da integração iterada em conjuntos convexos(as bolas) e o teorema da mudança de variável para funções de várias variáveis, sobre o qual comentamos, com um pouco mais de detalhes, no último capítulo. Perceba ainda a presença marcante do conceito de sequência nessa interação harmoniosa de conteúdos.

Tudo isso revela o poder integrador do uso sistemático das Aproximações Multifárias na construção da Matemática e das ciências mais próximas delas.

Um resultado curioso decorre da fórmula (3). Para cada n natural, o espaço vetorial euclidiano R^n tem dimensão finita n. Consideremos, agora, um espaço vetorial, de dimensão infinita, que generaliza o R^n. Como seria o volume de uma bola de raio r nesse espaço? Uma resposta surpreendente para essa questão é:

$$V_\infty(r) = \lim_{n\to\infty} V_n(r) = 0. \quad (!!)$$

Ou seja, em um espaço euclidiano de dimensão infinita, uma bola de raio r se comporta como se fosse um ponto!! Isso teria alguma aproximação com as teorias sobre a origem do Universo a partir de um ponto de densidade energética infinita? Mais uma vez, a beleza surpreendente da matemática se revela! Veja, como dissemos no fim da introdução deste livro, que para perceber a beleza é preciso contemplar com dedicação a realidade em foco. E assim novas questões se apresentam implicando novos estudos, e assim por diante, em sucessivas aproximações multifárias! É nesse processo de aprimoramento sucessivas das aproximações multifárias que, em dado momento, de forma surpreendente, percebemos a beleza e ficamos maravilhados!

CAPÍTULO VI

OUTRAS APROXIMAÇÕES INTEGRADORAS

I - MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS

Para formularmos, de maneira mais compreensiva, alguns métodos de cálculo de máximos e mínimos condicionados, vamos precisar de alguns conceitos relacionados com funções reais de várias variáveis, tais como: conjunto convexo, gradiente, jacobiana, extremos locais e extremos condicionados.

1. Conjuntos convexos e extremos locais

Um conjunto $M \subset R^n$ é denominado de *convexo,* quando dados dois pontos quaisquer de M, X e Y, o segmento XY está contido em M. Em outras palavras, M é *convexo* quando X, Y $\in$ M, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow (1 - t)X + tY \in M$. Por exemplo, toda bola B de R^n é um conjunto convexo. Lembre-se da definição de função convexa dada anteriormente. Segundo essa definição, a função f de R em R, definida por $f(x) = x^2$, é convexa. Mostre que o conjunto

$A = \{ (x, y) \in R^2; y \geq x^2 \}$ é convexo. Este conjunto é denominado de *epigráfico* de f. Veja assim que há uma relação estreita entre conjunto convexo(de R^2) e função convexa(de R em R). Perceba que todo intervalo de R é um conjunto convexo. A seguir, estendemos a definição de função convexa de R em R para função convexa de R^n em R.

Seja $D \subset R^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : D \subset R^n \rightarrow R$ denomina-se *convexa* quando, para quaisquer X, Y $\in R^n$ e t $\in$ [0, 1], tem-se $f((1 - t)X + tY) \leq (1 - t)f(X) + t\, f(Y)$. Pode ser mostrado que se $D \subset R^n$ é um aberto convexo e $f : D \subset R^n \rightarrow R$ é convexa, então o epigráfico $E(f) = \{(X, y) \in D \text{ X } R; y \geq f(X)\} \subset R^{n+1}$ é convexo. As funções convexas são muito importantes nos problemas de otimização(determinação de máximos e mínimos). E uma das propriedades que contribui para isso é a seguinte: *Todo ponto crítico C de uma função convexa f : D → R, que possui todas as derivadas parciais contínuas em D, é um ponto de mínimo global, isto é, f(X) ≥ f(C)*. Para maiores detalhes sobre isso veja as referências [Bortolossi, 2011] e [Lima, Vol. 2, 2004]. Para noções mais aprofundadas sobre convexidade, com aplicações à Otimização, veja as referências [Zornig, 2011], [Izmailov, 2005], [Izmailov, 2007] e [Bazaraa, 1993] . Um texto mais breve você pode acessar no **Código QR**.

Uma propriedade que generaliza a sua análoga para funções de uma variável é a seguinte:

"Toda função contínua f : D ⊂ R^n → R, definida no compacto D, atinge seus valores máximo e mínimo em pontos de D." Essa propriedade é comumente chamada de **teorema de Weierstrass.** Ele foi demonstrado no capítulo 2 para o caso de *D* ⊂ R e no capítulo 3 para o caso *D* ⊂ R^n.

Seja f : D ⊂ R^n → R uma função definida no aberto D. Diremos que um ponto P de D é um ponto de *máximo local* de f se existe uma bola aberta B, centrada em P e com raio r > 0, tal que para todos os pontos X de B, temos f(X) ≤ f(P). De maneira análoga, definimos ponto de *mínimo local* de f, pondo f(X) ≥ f(P).

Sabemos que para uma função real derivável f, de uma variável, vale o terorema: *" Se x é um ponto de máximo(ou de mínimo) local de f, então f'(x) = 0."* Esse teorema pode ser generalizado para funções f *:* D ⊂ R^n → *R* assim:

"Seja f : D ⊂ R^n → R uma função definida em um aberto D. Se todas as derivadas parciais de f são contínuas em D e P é um ponto de máximo(mínimo) local de f em D, então P é um ponto crítico de f."

Alguns autores denominam esse teorema de **Regra de Fermat.** Perceba nela uma generalização do Teorema de Fermat apresentado no capítulo 2.

Por exemplo, para a função f definida por f(x, y z) = x^4 + y^2 + 3z^2 em R^3, o único ponto crítico de f em R^3 é (0, 0, 0). Como f(x, y, z) ≥ 0, para todos os pontos X = (x, y, z) de R^3 e f(0, 0, 0) = 0, então (0, 0, 0) é o único ponto de mínimo de f e seu valor mínimo é 0.

2. Gradiente de uma função f : D ⊂ R^n → R

Considere uma função f : D ⊂ R^n → R, em que D é um aberto e todas as suas derivadas parciais são contínuas em D. Se a ∈ D, então definimos o *gradiente* de f em a, indicado por *grad* f(a) ou ∇f(a), assim:

$$grad\ f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

E denominamos de função ou *campo gradiente* de f à função vetorial ∇f: D $\subset R^n \rightarrow R^n$ tal que

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\right), \text{ onde } X = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

O símbolo ∇ chama-se "nabla".

Exemplos:

1) Seja $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + 3z$. Então $\nabla f(x, y, z) = (3x^2, -4y, 3)$.

2) Seja $g(x, y, z, w) = 3x^2 + y^4 - z^3 + 5w$. Então,

$$\nabla g(x, y, z, w) = (6x, 4y^3, -3z^2, 5).$$

3) Seja $h(x, y, z, w) = \text{senx} + \cos y + zw$. Então,

$$\nabla h(x, y, z, w) = (\cos x, -\text{seny}, w, z).$$

O gradiente possui as propriedades de um operador linear:

$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ e $\nabla(cf) = c\nabla f$, em que c é uma constante real.

A *derivada,* no ponto $a \in$ D, de uma função f : D $\subset R^n \rightarrow$ R, em que D é um aberto e todas as suas derivadas parciais são contínuas em D, é a função ou transformação linear $f'(a) : R^n \rightarrow R$ que associa a cada vetor **v** = $(v_1, \ldots, v_n)$ de R^n o número $\langle grad\ f(a), \mathbf{v}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).v_n$.

Compare esse conceito de derivada com o que foi dado anteriormente.

Por exemplo, consideremos a função f : $R^3 \rightarrow$ R, definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Então, a sua derivada, no ponto $a = (1, 2, 3)$ é a transformação linear T: $R^3 \rightarrow$ R, dada por T(v) = $\langle grad\ f(a), \mathbf{v}\rangle = 2v_1 + 4v_2 + 6v_3$.

Uma questão natural surge: *em qual direção a derivada de uma função f cresce mais?* Isto equivale a perguntar o seguinte: Qual o maior valor que o produto $\langle grad\ f(a), \mathbf{v}\rangle$ pode assumir?

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\langle grad\ f(a), \mathbf{v}\rangle \leq |grad\ f(a)||\mathbf{v}|.$$

Substituindo **v** por $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, teremos: $\langle grad\ f(a), \mathbf{u}\rangle \leq |grad\ f(a)|$.

Fazendo agora **u** = $grad\, f(a)/|grad\, f(a)|$, teremos $\langle grad\, f(a), \mathbf{u}\rangle = |grad\, f(a)|$.

Portanto, *a derivada da função f no ponto* a *de D tem crescimento máximo na direção e sentido do gradiente dela no mesmo ponto.*

O vetor $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ pode ser interpretado como uma matriz linha e, com isso, podemos falar na *matriz da derivada* de f.

Obs.: Para noções mais aprofundadas sobre convexidade, com aplicações à Otimização, veja as referência [Zornig, 2011], [Izmailov, 2005], [Izmailov, 2007] e [Bazaraa, 1993] . Um texto mais breve você pode acessar no link: **Acesse o Código QR**.

3. Matriz jacobiana de uma função vetorial(de várias variáveis)

Quando se trata de uma função vetorial f : D $\subset R^n \rightarrow R^m$, então a matriz da derivada é denominada de *matriz jacobiana.* Às vezes, para simplificar, alguns autores, consideram a derivada de f, f'(X), como a própria jacobiana. No caso especial de uma transformação linear, a *matriz jacobiana é a própria matriz dessa transformação*. E se f não é linear, mas tem todas as derivadas parciais contínuas, então os seus valores aproximados podem ser obtidos usando a matriz jacobiana de f, que representa uma transformação linear. É o caso do **método de Newton**, que faz aproximações sucessivas recorrentes para obter as soluções de sistemas não lineares. Já vimos antes esse método aplicado para o caso de f ser uma função de R em R. No caso atual de várias variáveis, esse método se aplica de modo análogo:

$Y = f'(X_0)(X - X_0) + f(X_0)$, em que $f'(X_0)$ é a matriz jacobiana de f em $X = X_0$ e com a recorrência na seguinte forma:

$$X_{k+1} = X_k - [f'(X_k)]^{-1} f(X_k),$$

em que X_k é uma aproximação de uma solução X, $[f'(X_k)]^{-1} f(X_k)$ é o vetor obtido pelo produto da inversa da jacobiana de f em X_k pelo vetor coluna $f(X_k)$. Começa-se com a escolha de uma aproximação inicial X_0 conveniente. Também se usa uma forma modificada, que diminui os cálculos com a inversa de cada matriz jacobiana, que depende apenas da jacobiana em X_0 :

$X_{k+1} = X_k - [f'(X_0)]^{-1} f(X_k)$. Nesta forma, a convergência é mais lenta, mas sob certas condições ela é garantida [Williamson,1975].

Exemplifiquemos. Consideremos o sistema não linear:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}.$$

Ele pode ser apresentado na forma f(X) = P, de uma função f de R^3 em R^3 definida por

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \\ x^3+y^3+z^3 \end{bmatrix}.$$

Tomemos $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A jacobiana geral de f é:

$$[f'(X)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix}.$$

E em X_0 é:

$$[f'(X_0)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 12 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então, a inversa da jacobiana de f em X_0 é:

$$[f'(X_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}. \quad \text{E } f(X_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Obs.: Seja $D \subset R^n$ um conjunto convexo. Toda função convexa $f: D \to R$ possui um ponto de mínimo? Verifique que a função $f: D \to R$, com $D = \{x \in R; x > 0\}$ e $f(x) = 1/x$ não tem ponto de mínimo, mas é convexa, pois $f''(x) = 2/x^3 > 0$. Para compreender melhor este exemplo, veja o tópico 7 sobre Matriz Hessiana e pontos críticos.

Calculemos X_1 e X_2.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/6 \\ 16/9 \\ -11/18 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -7/6 \\ 16/9 \\ -11/18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 4{,}89 \\ 3{,}42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}82 \\ 1{,}40 \\ 0{,}42 \end{bmatrix} .$$

X_2 é uma solução aproximada ainda ruim. Mas imagine com dezenas de iterações da recorrência, o grau de precisão que podemos atingir. E hoje, com o desenvolvimento dos computadores e dos algoritmos computacionais, não temos mais motivos para nos preocuparmos com os "cálculos complicados e enfadonhos", mostrados acima. Devemos, sim, aprimorar os métodos e os algoritmos, buscando novas e melhores "Aproximações Multifárias" da realidade estudada. O relevante a destacar aqui é a importância dos métodos de aproximações lineares na resolução de problemas não lineares, sobretudo na era atual, em que temos computadores e algoritmos aprimorados para realizarem cálculos complexos em pouco tempo.

Em Programação Não Linear é feita uma adequação do método de Newton para minimizar uma função $f: R^n \to R$ da seguinte forma.

Suponha f três vezes continuamente diferenciável com a Hessiana $H\,f(x)$ definida positiva em $x \in R^n$, isto é, f é estritamente convexa. Se $C(x_0) = \{x \in R^n; f(x) \leq f(x_0)\}$ é limitado, então o método de Newton com busca linear exata converge quadraticamente para o único ponto x* de mínimo global de f. [Zonig, 2011]. Falamos sobre a Hessiana um pouco mais à frente.

4. Jacobiana, Volume e Mudança de variáveis

Mostramos no Capítulo 3 que uma transformação linear F de R^n em R^n, definida por F(X) = AX, onde A é a matriz de F, multiplica o volume de um paralelepípedo Q, de dimensão n, pelo fator $|\det A|$, isto é,

$$\text{Vol.}[F(Q)] = \text{Vol.}[Q].\ |\det A|.$$

Mencionamos acima que a derivada de uma função vetorial $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ é uma transformação linear cuja matriz é denominada de matriz *jacobiana.* E essa serve para dar uma aproximação de F em cada ponto X de D. Na verdade, no caso de F ser linear, isto é, F(X) = AX, temos que a jacobiana de F coincide com A, o que significa ter o mesmo valor(constante) em cada ponto X do aberto D. Por outro lado, no caso de F ser não linear teremos, normalmente, uma variação da jacobiana de F ao longo de D. Em termos aproximados, para pequeninos cubos Q_i , em que X_i é um ponto interior de D e de Q_i, podemos afirmar a validade da propriedade do volume de $F(Q_i)$, na forma:

$\text{Vol.}[F(Q_i)] \cong \text{Vol.}[Q_i].|\det J_F(X_i)|$, onde $J_F(X_i)$ representa a jacobiana de F no ponto X_i de D.

Naturalmente vem a pergunta: como mediremos o volume da imagem de uma região $Q \subset D$, pela função não linear F? Para facilitar a compreensão, pensemos primeiro no caso n = 3, isto é, F é uma função definida em um aberto $D \subset R^3$ e com imagem em R^3, que tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos da região Q e sua derivada tem a matriz Jacobiana $J_F(X)$, com $\det JF(X_i) \neq 0$. Além disso, $Q \subset D$ é um conjunto compacto. Uma primeira aproximação seria dada, construindo-se uma soma, análoga à de Riemann-Lebesgue, de volumes, para uma união enumerável de cubinhos Q_i, de mesmo diâmetro d_i, com interiores disjuntos dois a dois, tais que $Q_i \cap Q \neq \emptyset$ e $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$. *O volume de Q poderia ser definido como o ínfimo de todas as somas* $\sum_{i=1}^{n} V_i$, V_i = volume de Q_i, associadas às diferentes construções de cubinhos com as duas condições referidas. Uma aproximação alternativa é Vol.[Q] = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i$. De modo análogo, podemos definir Vol.[F(Q)] = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i.|\det J_F(X_i)|$.

Mas tal limite representa uma integral definida de alguma função em algum conjunto. Interpretemos pois essas somas em termos de integrais. É claro que aqui estamos falando de integral de uma função de três variáveis em uma região limitada do espaço R^3. Temos, pois que

Vol.[Q]= $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \int_Q 1dV$, e Vol.[F(Q)]= $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i.|\det J_F(X_i)| = \int_Q |\det J_F(X_i)|dV$.

Em outros termos $\int_{F(Q)} 1dV = \int_Q |\det J_F(X_i)|dV$.

Estas fórmulas são válidas para R^n. E no caso de R^2, o volume é interpretado como área, bem como no caso de R , como comprimento. Considere a função F que representa a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares:

F(r, θ) = (x, y) = (r.cosθ, r.senθ), sendo (x, y) $\in R^2$ e (r, θ) $\in$ [0, $+\infty$) X [0, 2π].

A jacobiana de F é

$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -rsen\theta & rcos\theta \end{pmatrix}$ e $|\det J_F(r,\theta)| = r$.

Por isso, quando desejamos calcular a área de uma região curvilínea Q_1 do plano cartesiano, em coordenadas polares, temos que interpretar Q_1 como a imagem de uma região mais simples(-geralmente retangular fechada) Q contida em [0, $+\infty$) X [0, 2π]. Ou seja, Q_1 = F(Q). Depois é só fazer a integração do fator variável r sobre Q.

Lembremos do método de integração por substituição para funções reais contínuas de uma variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, onde u = g(x).

Perceba que essa fórmula poderia ser apresentada assim:

$\int_Q f(g(x))g'(x)dx = \int_{G(Q)} f(u)du$, onde Q = [$a$, b].

No caso de funções de duas ou mais variáveis, a mudança de variáveis mantém uma certa analogia, mas aparece o determinante da matriz jacobiana no lugar da derivada. A fórmula generaliza o que vimos acima para volume:

$\int_{G(Q)} f(X)dV = \int_Q f(g(X)).|\det[G'(X)]|dV$, em que *f* é uma função contínua limitada em G(Q) e G tem as mesmas características da função F na fórmula do volume. Nessa fórmula [G'(X)], indica a matriz jacobiana da derivada de G. Para maiores detalhes veja referências de Cálculo e Análise tais como [Wiliamson,1975], [Apostol, 1969], [Lima, 2004, Vol 2] e [Rudin, 1971].

5. O Método dos Multiplicadores de Lagrange

Considere o seguinte problema:

"Deseja-se construir uma caixa de água em forma de um prisma reto de base retangular, sem tampa, tendo 45 m² de área total de superfície. Qual o maior volume possível, em m³, que essa caixa pode ter?"

Vamos resolver esse problema usando, o método dos multiplicadores, que será enunciado logo depois. Sejam x, y e z as dimensões da caixa. Então o volume da caixa é V = xyz e a área total é A_T = xy + 2xz + 2yz. Desejamos obter o volume máximo de V sujeito à condição xy + 2xz + 2yz = 45.

Interpretemos agora esses dados na linguagem das funções. Temos uma função f : D $\subset R^3 \rightarrow$ R, definida por f(x, y, z) = xyz, onde D é formado por todos os pontos de R^3 que têm coordenadas positivas (x > 0, y > 0 e z > 0). Por outro lado, temos a função

g: D $\subset R^3 \rightarrow$ R, definida por g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz – 45.

Desejamos obter o valor máximo de f sujeito à condição g(x, y, z) = 0. Seja S o conjunto dos pontos (x, y, z) de D, tais que g(x, y, z) = 0. Assim, o que de fato queremos é o valor máximo de f restrito a S.

Calculemos os gradientes de f e de g:

∇f(x, y, z) = (yz, xz, xy) e $\nabla g(x, y, z)$ = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y). Vamos agora supor a existência de um número real λ tal que ∇f(x, y, z) = $\lambda\ \nabla g(x, y, z)$. Observe ainda que $\nabla g(x, y, z) \neq 0$. Resolvamos o sistema de 4 equações e 4 incógnitas:

$$yz = \lambda(y + 2z),$$

$$xz = \lambda(x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2x + 2y),$$

$$xy + 2xz + 2yz - 45 = 0.$$

Isolando λ nas três primeiras equações, obtemos: x = y = 2z. E substituindo esses valores na última equação, temos: z = $\sqrt{15}$/2, x = y = $\sqrt{15}$. Logo, o único ponto extremo de f, restrito a S, é ($\sqrt{15}$/2, $\sqrt{15}$, $\sqrt{15}$) e o valor extremo correspondente é 15$\sqrt{15}$/2. Para concluirmos que esse valor é máximo devemos observar ainda o seguinte:

f(x, y, z) = xyz > 0 para todo ponto (x, y, z) de D e, por conseguinte, também de S. Como g(1, 1, 11) = 0 e f(1, 1, 11) = 11 < 15$\sqrt{15}$/2, então Concluímos que esse é o valor máximo, em m^3, do volume da caixa com área total de 45 m^2.

Revisitemos a QT-152 que tem o seguinte enunciado: “As diagonais de um quadrilátero convexo ABCD se intersectam em O. Qual é a menor área que esse quadrilátero pode ter, se os triângulos AOB e COD têm áreas 4 e 9, respectivamente?”

Usando o Teorema do Lado Comum, obtemos xy = 36, onde x e y representam as áreas respectivas dos outros dois triângulos que compõem o quadrilátero. Com isso, podemos interpretar o problema assim: a área T do quadrilátero é dada por T(x, y) = x + y + 13 e desejamos obter o valor máximo de T sujeito à condição g(x, y) = xy – 36 = 0. Usando o método da questão anterior, teremos:

$$\nabla f(x, y) = (1, 1) \text{ e } \nabla g(x, y) = (y, x) \text{ e } \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Disso, segue o sistema:

1 = λx e 1 = λy, que implica x = y. Como xy = 36 e x > 0, então x = 6 e T(6, 6) = 25, que é o valor mínimo de T em S, onde S é o gráfico da função y = 36/x, x > 0. Observe que f não tem valor máximo, pois x + 36/x, com $x > 0$, é ilimitada.

Já tínhamos resolvido tais problemas com o uso da desigualdade MA ≥ MG. Comparando com esse método que acabamos de usar, que é o método dos multiplicadores de Lagrange, somos inclinados a reconhecer a grande simplicidade da resolução com a referida desigualdade. Mas se pensarmos na amplitude dos casos que podemos aplicar esse método, inclusive com várias restrições e não apenas com uma, como os exemplos acima ilustram, teremos que reconhecer o seu grande potencial de aplicações. Não é à toa que hoje, grande parte dos métodos computacionais usados na área de Otimização, são, basicamente, generalizações ou aproximações mais sofisticadas desse método criado por Lagrange há mais de 200 anos. Como exercício resolva um problema análogo ao primeiro, mas com a seguinte modificação: desejamos obter o valor mínimo da área total da superfície da caixa, em m², com a condição V = $15\sqrt{15}/2$ m³.

Vamos, então, formular o método dos multiplicadores de Lagrange.

Teorema (dos Multiplicadores de Lagrange)

Seja f : D ⊂ R^n → R uma função, em que D é um aberto, n ≥ 2 e todas as suas derivadas parciais são contínuas em D. E seja g : D ⊂ R^n → R uma função com todas as suas derivadas parciais contínuas em D, também. Se P é um ponto extremo de f sujeito à condição g(P) = 0, isto é, P ∈ S é um ponto extremo de f : S ⊂ D → R, onde S = { X ∈ D; g(X) = 0} e $\nabla g(P) \neq 0$*, então existe* $\lambda \in R$ *tal que* $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

O número real λ é denominado de *multiplicador de Lagrange*. A introdução dele no sistema iguala o número de equações ao número de incógnitas, o que facilita a sua resolução.

Esse Teorema pode ser estendido para *k* restrições, o que implica na existência de *k* multiplicadores de Lagrange. Nesse caso, a igualdade final do teorema fica assim:

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(P),$$

com a condição dos gradientes das funções g_i serem linearmente independentes, substituindo a condição $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$.

Se considerarmos a função $L : D \times R \rightarrow R$, definida por $L(X, \lambda) = f(X) - \lambda g(X)$, então as condições do teorema acima, $\nabla f(X) = \lambda \nabla g(X)$ e $g(X) = 0$, serão equivalentes a $\nabla L(X, \lambda) = \mathbf{0}$, ou seja, os pontos extremos de f sujeitos à condição g(X) = 0 são exatamente os pontos críticos da função *L*.

Essa função, comumente, é chamada de *Lagrangeana* do problema de extremos condicionados. No caso geral, a Lagrangeana é expressa assim:

$$L(X,\lambda_1, ..., \lambda_k) = f(X) + \lambda_1 g_1(P) + \lambda_2 g_2(P) + \ldots + \lambda_k g_k(P).$$

Podemos dizer, de forma muito breve, que o método dos multiplicadores de Lagrange consiste em resolver o sistema

$$\nabla L(X,\lambda_1, ..., \lambda_k) = \mathbf{0}.$$

A demonstração mais comum desse teorema depende do Teorema da Função Implícita. Para isso consulte a referência [Williamson, 1975].

6. Os Multiplicadores e a desigualdade MA ≥ MG

Consideremos, por último, o seguinte problema: *provar a desigualdade das médias MA ≥ MG usando o método dos multiplicadores de Lagrange.*

Sabemos que

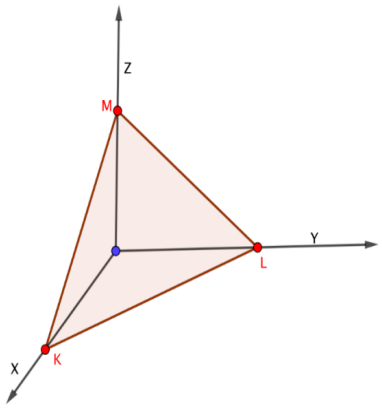
$$MA = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \text{ e } MG = (x_1.x_2 \ldots x_n)^{1/n} \text{ e } x_i > 0.$$

Primeiramente, devemos formular o problema na linguagem das funções que o método exige. Seja $D \subset R^n$ o conjunto dos pontos de coordenadas positivas. Definamos as funções $f : D \subset R^n \rightarrow R$ *e* $g : D \subset R^n \rightarrow R$, tais que, para todo $X \in D$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tem-se $f(X) = x_1.x_2 \ldots x_n$ e $g(X) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n - A$, onde $A > 0$ é uma constante real. Desejamos determinar o valor máximo de f sujeita à condição g(X) = 0.

Formemos, agora, a *Lagrangeana* do problema:

$L(X, \lambda) = f(X) - \lambda g(X)$. O sistema $\nabla L(X, \lambda) = \mathbf{0}$ fica assim:

$$x_2 \ldots x_n = \lambda/n;\ x_1x_3 \ldots x_n = \lambda/n;\ \ldots;\ x_1 \ldots x_{n-1} = \lambda/n \text{ e } (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n = A.$$



Decorre das *n* primeiras igualdades que $x_1 = x_2 = ... = x_n$. E substituindo isso na última igualdade, obtemos que todas são iguais a A. Vemos que a condição $\nabla g(X) = (1/n, 1/n, ..., 1/n) \neq \mathbf{0}$ é satisfeita. Logo, o único ponto extremo de f sob a restrição g(X) = 0 é P = (A, A, ..., A). Em outras palavras, $P \in S$, onde S = {$X \in D$; g(X) = 0}, é o único ponto extremo de f : S → R, definida por $f(X) = x_1.x_2 ... x_n$. Observe que S é limitado, pois qualquer coordenada x_i de um ponto X de S satisfaz a condição: $0 < x_i < nA$. Seja S' o conjunto formado pela união de S com sua fronteira. Então, S' é compacto e pelo teorema de Weierstrass existe um ponto X_o de S' em que a função f : S' → R assume valor máximo. Se X_o estiver na fronteira de S', então, pelo menos uma de suas coordenadas será 0, o que implica $f(X_o) = 0$. Porém, f(X) > 0, para todo X de D. E como P é o único ponto extremo de f em S, concluímos $X_o = P = (A, A,..., A)$ é ponto de máximo e o valor máximo de f em S é $f(P) = A^n$. Ou seja, $x_1.x_2 ... x_n \leq A^n$ e a igualdade só ocorre quando $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Mas isso equivale à desigualdade MG ≤ MA. Talvez alguém pergunte: e por que P não é ponto de mínimo de f em S ? Veja bem, no compacto S', também deve existir, pelo teorema de Weierstrass, pelo menos um ponto de mínimo. E de fato, existem vários pontos na fronteira de S', tais que f(X) = 0. E, evidentemente, em S' temos que f(X) ≥ 0.

Para se ter uma visualização geométrica desse problema, considere apenas três variáveis: x, y e z. Assim, g(x, y, z) = 0 equivale a x + y + z = 3A. O gráfico dessa equação, em R^3, é a região triangular KLM, em que K = (3A, 0, 0), L = (0, 3A, 0) e M = (0, 0, 3A). O interior dessa região é o conjunto S e a fronteira de S é o triângulo T de vértices K, L e M. O conjunto S' é o compacto $S \cup T$. Observe que em qualquer ponto da fronteira T, ao menos, uma de sua três coordenadas é igual a 0. Portanto, f tem valor mínimo em qualquer ponto da fronteira de S, os quais não pertencem a S. Use o método dos multiplicadores para resolver a seguinte questão. A interseção da esfera $\{(x, y, z) \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o plano $\{(x, y, z) \in R^3;\ x + y + z = 1\}$ é um círculo C. Ache a distância mínima do ponto (0, 3, 3) ao círculo C. Encontra-se ao final da resolução duas soluções: (1, 0, 0) e (-1/3, 2/3, 2/3). Esse último é o mais próximo.

7. Matriz Hessiana e pontos críticos:

Considere uma função f : $D \subset R^n \rightarrow R$, em que *D* é um aberto de R^n. Se todas as derivadas parciais de f, de ordem 2, forem contínuas em D, então dizemos que f é uma *função de classe* C^2. Suponhamos, pois, que f seja de classe C^2. Se $f'(X_0)$ é a derivada de f em X_0 , então a matriz jacobiana de $f'(X_0)$, que indicaremos por $f''(X_0)$ é denominada de *matriz Hessiana de f* no ponto X_0. Pode-se provar que a forma do polinômio de Taylor de 2º grau de f, em X_0, é:

$P(X) = f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0) + ½ (X - X_0)^T.f''(X_0).(X - X_0)$ e, portanto, na vizinhança de X_0, temos que P(X) é uma boa aproximação de f(X). Se X_0 é um ponto crítico de f, então $f'(X_0) = 0$ e $f(X) - f(X_0) \cong ½ (X - X_0)^T.f''(X_0).(X - X_0)$. Indicando $X - X_0$ por h, temos que $f(X_0 + h) - f(X_0) \cong ½ h^T.f''(X_0).h$.

Se o sinal do polinômio quadrático $Q(h) = h^T.f''(X_0).h$, $h \neq 0$, for positivo em R^n, então X_0 será um ponto de mínimo local, e se for negativo, X_0 será ponto de máximo local. Usualmente, denomina-se Q(h) de *forma quadrática hessiana*. Indiquemos, a partir de agora, $f''(X_0)$ por $H(X_0)$.

Como a matriz hessiana $H(X_0)$ é simétrica, então, um teorema da Álgebra Linear garante que ela é diagonalizável, ou seja, é semelhante a uma matriz diagonal M. Em outras palavras, existe uma base ortonormal, em relação à qual, $H(X_0)$ se reduz a uma matriz diagonal. Outra forma de dizer isso: $H(X_0)$ pode ser fatorada assim $H(X_0) = UMU^T$, onde U é uma matriz ortogonal(isto é, sua transposta é sua inversa) e M é uma matriz diagonal. Logo, a forma quadrática $Q(h) = h^T.H(X_0).h$ pode ser reduzida a $Q(h) = v^T.M.v$, onde $v = U^T.h$. Ou seja:

$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2$, onde $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $\lambda_1, \dots \lambda_n$ são os elementos da diagonal principal de M.

Estes elementos são comumente denominados de *autovalores* da matriz $H(X_0)$. Logo, o sinal de Q(h) depende dos sinais dos autovalores $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Com isso, teremos as seguintes possibilidades:

A) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são todos positivos → $Q(h) > 0$ => X_0 é ponto de mínimo local;

B) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são todos negativos → $Q(h) < 0$ => X_0 é ponto de máximo local;

C) alguns dos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são positivos e os outros são negativos => X_0 é ponto de sela.

Existe um outro critério para se classificar certas formas quadráticas, conhecido como *método de Jacobi*:

Seja Q(h) uma forma quadrática associada a uma matriz simétrica H de ordem n. Se todos os menores principais Δ_i de H forem diferentes de 0, então existe uma base B de R^n, em relação à qual, Q(h) pode ser expressa assim:

Q(h) $= \frac{1}{\Delta_1} v_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} v_2{}^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} v_n{}^2$, *onde* $(v_1, \ldots, v_n)$ *são as coordenadas de h na base B.*

Decorre disso que Q(h) é positiva se, e somente se, os menores principais de H forem positivos.

A vantagem desse método em relação ao anterior é não precisarmos calcular os autovalores de H e nem a base B. Basta calcularmos os menores principais de H e observarmos os sinais dos quocientes deles. Vejamos um exemplo direto para ilustrar esse método. Seja

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, os menores principais de H são

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \text{ e } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Quocientes: +½, +2/5, - 5/10. Logo, o ponto X_0, em que $Q(h) = h^T.H(X_0).h$, seria classificado como ponto sela da função.

Se fôssemos seguir o método dos autovalores, teríamos de resolver uma equação de 3º grau e as raízes envolveriam radicais. Vale a pena verificar isso com o WolframAlpha.

O importante aqui é percebermos a aproximação por analogia entre essa classificação de pontos críticos de uma função de várias variáveis e a classificação feita dos pontos críticos de uma função de uma variável usando a derivada segunda f"(x_0). No caso anterior, vemos que a hessiana, através da sua forma quadrática, faz o papel de f"(x_0). Vale salientar também, que se f for uma função convexa em D e D for um conjunto convexo de R^n, então os pontos extremos locais serão globais. Mostre, usando o método de Jacobi, que a função $f: R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = x^2 + xy^3$, não é convexa. Verifique que os menores principais da Hessiana de f são: 2 e - 9.

Outro resultado que tem analogia com o caso de função de uma variável real:

Uma função f : D ⊂ R^n → R de classe C^2, em que D é um aberto convexo de R^n, é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não negativa em todos os pontos de D.

Vale a pena ver o vídeo acerca do uso dos algoritmos aprendentes da IA para otimizar modelos para a Mecânica dos Fluidos. **Acesse o Código QR(I)**. Também é interessante conferir a biografia resumida de Joseph Louis Lagrange(1736-1813) no **Código QR(II)**.

II - APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE FOURIER EM ESPAÇO DE HILBERT

1. Um Espaço vetorial métrico completo de dimensão infinita

Sejam f e g funções reais contínuas no intervalo [a, b]. Indiquemos por *C*[a, b] o conjunto de todas as funções reais contínuas em [a, b]. Interpretando f e g como vetores, podemos considerar *C*[a, b] como um espaço vetorial real, com as operações $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \alpha \in R$ e $x \in$ [a, b]. Ele é um espaço de dimensão infinita. Podemos dotar esse espaço vetorial da norma $\|f\| = max|f(x)|$ ou $\|f\| = sup|f(x)|$, para $x \in$ [a, b], pois [a, b] é compacto em R e f é contínua. Decorre dessa norma a distância definida por

$$d(f,g) = sup|f(x) - g(x)|, \text{ para } x \in [a, b].$$

Assim, *C*[a, b] é também um espaço vetorial métrico. Perceba que com essa distância toda sequência de Cauchy de funções de *C*[a, b] converge uniformemente para uma função em [a, b]. Como a convergência é uniforme, então essa função é contínua e, por conseguinte pertence a *C*[a, b]. Assim, *C[a, b] é um espaço métrico completo*. Pelo Teorema de Aproximação Poligonal podemos aproximar uniformemente uma função contínua f por funções poligonais reais definidas em [a, b]. Seja Pol[a, b] o conjunto das funções poligonais definidas em [a, b]. Decorre desse teorema que *Pol[a, b] é denso em C[a, b]*. Mas Pol[a, b] é um conjunto não enumerável. Sabemos que toda função poligonal pode ser expressa por uma combinação linear de funções do tipo $|mx + n|$. Se considerarmos apenas as combinações lineares racionais, com m e n racionais, teremos um subconjunto enumerável que é denso em Pol[a, b] e em *C*[a, b]. Assim, *C[a, b] é um Espaço vetorial métrico completo e separável*.

QR (I) QR (II)

Além disso, pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, que vimos no capítulo sobre polinômios, sempre podemos aproximar uniformemente uma função contínua f por polinômios reais em [a, b]. Seja *P*[a, b] o conjunto dos polinômios reais definidos em [a, b]. Então, por esse teorema, temos que *P*[a, b] é um conjunto denso em *C*[a, b]. Mas *P*[a, b] não é enumerável. Se considerarmos o subconjunto *Q[a, b]* dos polinômios reais com coeficientes racionais, então teremos um subconjunto enumerável que também é denso em *C*[a, b]. Conclui-se novamente que *o espaço C[a, b], munido da distância* d, *é um Espaço vetorial métrico completo separável.*

Por outro lado, o espaços vetorial P[a, b], dotado da norma acima, não é completo, pois a função $f(x) = e^x$, definida em [a, b] e que não é um polinômio, é limite uniforme de uma sequência de polinómios de P[a, b].

Observe que o espaço vetorial *C*[a, b] tem dimensão infinita. Perceba que esse espaço não é um Espaço de Hilbert Separável, pois a norma acima não é proveniente de um produto interno definido nele. Ele é um exemplo de um Espaço de Banach separável. Dizemos que um espaço vetorial normado é de Banach quando ele é completo.

NOTA (A raridade das funções diferenciáveis entre as funções contínuas)

Sabemos que desde a criação do Cálculo Diferencial e Integral até o século XX, boa parte do desenvolvimento dessa área e de suas aplicações estiveram muito associadas às funções diferenciáveis. Um fato notável é sabermos que essas funções são relativamente raras quando comparadas com as funções contínuas. Para maior clareza, considere o espaço métrico completo *C*[a, b] e seja D o subconjunto de *C*[a, b] formado por todas as funções deriváveis em algum ponto de [a, b]. Prova-se em [Lima, 2005], usando o Teorema de Baire, que D, sendo um conjunto magro, tem interior vazio em *C*[a, b]. Isso equivale a dizer que seu complementar(que contém as funções contínuas e não deriváveis em $x \in$ [a, b]) contém uma interseção enumerável de abertos densos em *C*[a, b] e, por conseguinte, é denso em *C*[a, b]. Portanto, essas últimas são mais “abundantes” do que as deriváveis. Por outro lado, o conjuntos dos polinômios P[a, b] é denso em *C*[a, b] e é subconjunto de D. Ou seja, D também é denso em *C*[a, b], mesmo sendo um conjunto magro. Numa analogia aproximativa, lembramos que o conjunto Q(racionais) tem interior vazio e é denso em R(reais).

O Teorema de Baire afirma o seguinte: *"Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro D ⊂ M tem interior vazio."* Diz-se que D é *magro* em um espaço métrico M se D está contido numa reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio em M. Logo, o complementar de D em M contém uma interseção enumerável de abertos densos em M. Q é magro em R, pois é enumerável e não tem ponto isolado. Veja que R – Q também tem interior vazio, mas a união deles é R que não tem interior vazio. Isto revela uma diferença entre conjunto com interior vazio e conjunto magro. Pois, a união de dois conjuntos magros é um conjunto magro. Logo, R – Q não é magro. Perceba uma analogia entre R – Q e o complementar de D em *C*[a, b], descrito acima. Isso significa que R – Q é também uma interseção enumerável de abertos densos em R. Um exemplo típico de conjunto magro é a fronteira de um conjunto aberto A ⊂ *M.* Perceba que ela é um conjunto fechado com interior vazio, pois toda bola aberta com centro em um ponto dela tem pontos do interior e pontos do exterior de A. Um exemplo de conjunto fechado e não enumerável que tem interior vazio em R é o conjunto K de Cantor. Portanto, K é um conjunto magro em R.

2. Aproximações por polinômios trigonométricos

Podemos, também, dotar o espaço vetorial *C*[a, b] de uma outra norma através do seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Ao afirmar que isso define um produto interno em *C*[a, b], estamos, pois, admitindo que as seguinte condições são satisfeitas:

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
2. $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.
3. $\langle kf, g \rangle = k\langle f, g \rangle$, $k \in R$.
4. $\langle f, f \rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0$ e $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$.

A norma proveniente desse produto interno é

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}\ . \text{(*)}$$

Dessa norma decorre a distância $d^*(f,g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$.

Em analogia com os espaços métricos euclidianos reais R^n, podemos definir o erro quadrático médio entre f e g como

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

Como *C*[a, b] tem dimensão infinita, nos deparamos com o problema de encontrar "a melhor aproximação" de uma função f de *C*[a, b] dentre as funções g de um dado subespaço W de *C*[a, b] .

Isso significa que desejamos minimizar o **erro médio quadrático**

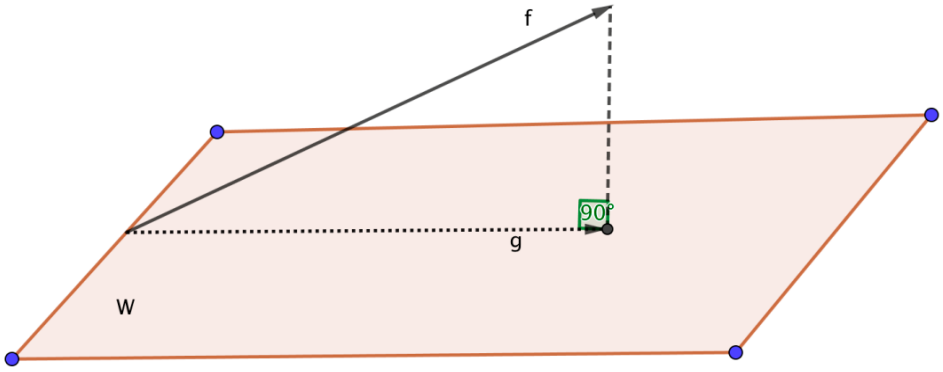
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

Por exemplo, considere um subespaço gerado pelo seguinte conjunto linearmente independente de funções reais : {1, x , x^2, .., x^n}. Esse subespaço gera todos os polinômios reais de grau ≤ n.

Pensando de modo análogo ao que se faz em R^n, usaremos o resultado conhecido da "aproximação de mínimos quadrados":

a melhor aproximação de f em W é a projeção ortogonal g de f sobre W.

A *projeção ortogonal g* de f em W é indicada por g = proj_W **f**. A figura a seguir ilustra esse conceito em R^3. Nela, a linha vertical pontilhada é perpendicular ao plano(subespaço de R^3).



Consideremos agora um *polinômio trigonométrico de ordem n*. Ele se define como uma função real T_n da forma

$$T_n(x)=a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + b_1\cos(x) + b_2 sen(2x) + \cdots + b_n sen(nx)$$

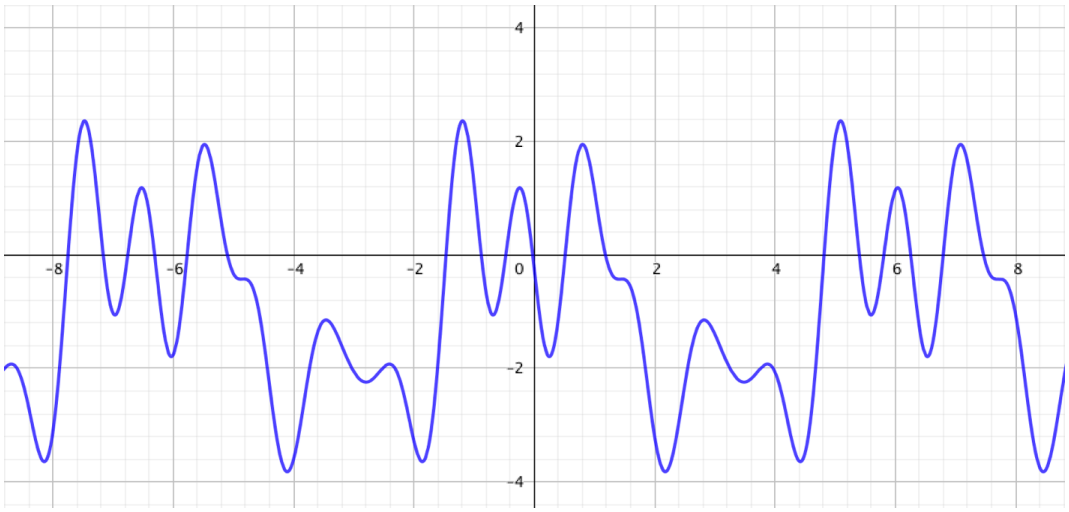
ou

$$T_n(x)= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k sen(kx)),$$

com a_n e b_n não nulos simultaneamente. Por exemplo, $T(x) = 5 + 2\cos(x) – 3\cos(3x) + \cos(5x)$ é um polinômio trigonométrico de ordem 5. Outro exemplo, mas de ordem 7, é

$$T(x) = -1 + 1{,}5.\cos(x) – 1{,}25.\cos(3x) + 0{,}5.\cos(5x) - sen(6x) – 0{,}5.sen(7x).$$

Seu gráfico, em um certo intervalo, feito com o Geogebra, está representado na figura a seguir. Verifique que todo *polinômio trigonométrico de ordem n* tem um período igual a 2π. É claro, que o período fundamental pode ser menor, como é o caso de F(x) = cos(4x).



Decorre dessa definição que os polinômios trigonométricos de ordem n ou menor são as várias combinações lineares possíveis de

$$1, \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx), sen(x), sen(2x), \ldots, sen(nx).$$

Pode ser provado que essas 2n + 1 funções são linearmente independentes e formam uma base ortogonal de um subespaço de dimensão 2n + 1 de C[0, 2π].

Vamos agora considerar o problema de se encontrar a aproximação por mínimos quadrados de uma função *f de* $C[0, 2\pi]$ por algum polinômio trigonométrico de ordem n ou menor. Ou seja, devemos obter a projeção ortogonal de *f* em W. Se g_0, g_1, g_2, ..., g_{2n} é uma base ortonormal de W, então

$$\text{proj}_W \boldsymbol{f} = \langle f, g_0\rangle g_0 + \langle f, g_1\rangle g_1 + \cdots + \langle f, g_{2n}\rangle g_{2n}.$$

Usando-se o produto interno acima definido, podemos obter a seguinte base ortonormal:

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, \ldots, g_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), g_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}senx, \ldots, g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(nx).$$

Assim, podemos escrever:

$\text{proj}_W \boldsymbol{f} = \frac{a_0}{2} + [\boldsymbol{a_1 cosx} + \cdots + \boldsymbol{a_n cos(nx)}] + [\boldsymbol{b_1 senx} + \cdots + \boldsymbol{b_n sen(nx)}]$, onde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \text{ e } b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,sen(kx)\,dx,$$

Para k = 1, 2, ..., n e $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$

Os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ são chamados de *coeficientes de Fourier* de f.

O *erro médio quadrático* tende para zero quando o *n* tende para o infinito.

Isto, de fato, pode ser provado, mesmo que f não seja contínua, mas satisfazendo certas condições. Antes, porém, é importante recordar que as funções trigonométricas $sen(kx)$ e $cos(kx)$ têm período 2π e podem ser apresentadas nas formas complexas:

$$cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \text{ e } sen(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}.$$

Portanto, os polinômios trigonométricos podem ser apresentados na forma

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}, \text{ em que}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ k > 0, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ e } c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2},\ k < 0.$$

Substituindo o intervalo [0, 2π] por $[-\pi, \pi]$, temos um nova apresentação para os coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f(x)dx.$$

Em outros termos,

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos kx + b_k sen kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos kx + b_k sen kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}.$$

A "soma infinita" da última fórmula é a soma da *série de Fourier* de f no intervalo $[0, 2\pi]$. Se ainda não sabemos que a série de Fourier converge, então escrevemos apenas assim

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos kx + b_k sen kx).$$

Dessa forma, dizemos que o polinômio trigonométrico de ordem n

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos kx + b_k sen kx)$ é uma *aproximação de Fourier* de f. Verique que a série de Fourier de cada polinômio trigonométrico é o próprio polinômio. Perceba nisso a analogia com o que ocorre entre cada polinômio usual e sua série de Taylor. Isso é um exemplo típico do que chamamos de Aproximação Multifária. Veja no link dado a seguir uma visualização das séries de Fourier e suas relações com a equação diferencial parcial do Calor. **Acesse o Código QR**.

QH-1. Prove que as funções trigonométricas reais *f(x) = sen(mx) e g(x) = sen(nx)*, com m e n. Inteiros positivos e $m \neq n$, são ortogonais no Espaço Vetorial *C*$[0, 2\pi]$ munido do produto interno

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x).g(x)dx.$$

Prove também a ortogonalidade das funções *f(x) = cos(mx) e g(x) = cos(nx)* nesse espaço.

DICA:

Use transformação soma-produto antes de integrar. Observe que se m = n, então $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \pi$.

QH -2. Considerando o mesmo espaço vetorial da QH-1, prove que as funções *f(x) = cos(mx)* e *g(x) = sen(nx)* são ortogonais.

QH -3. A) Prove a seguinte fórmula de adição trigonométrica:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} coskx = \frac{sen[\left(n+\frac{1}{2}\right)x]}{2sen\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

B) Prove a seguinte fórmula $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{sen[\left(n+\frac{1}{2}\right)x]}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$.

C) Seja $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} D_i(x)$. Prove que $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{1-\cos[(n+1)x]}{1-\cos x}\right\}$.

D) Verifique que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$.

DICA:

Um caminho é usar o mesmo método para questões semelhantes do capítulo 4. Observe ainda que $D_n(x)$ é o dobro do polinômio de (A). Basta fazer a conversão para complexos. Verifique que $D_n(x)$ é a soma dos termos de uma PG de 2n + 1 termos, razão $q = e^{ix}$ diferente de 1 e primeiro termo igual a e^{-inx}.

Obs.: O polinômio trigonométrico $D_n(x)$ é conhecido por **núcleo de Dirichlet** e $K_n(x)$ por **núcleo de Fejé***r*. Perceba que $K_n(x)$ é média aritmética dos $D_i(x), i = 0, 1, \ldots, n$. Esses núcleos, juntamente com outros têm importância no desenvolvimento da teoria e nas aplicações das séries de Fourier.

QH-4. Considerando a simbologia adotada na QH-3, prove que a n-ésima soma parcial da série de Fourier, $S_n(x)$, de uma função f, periódica de período 2π, satisfaz à condição:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

Obs.: Perceba que as integrais dessa questão representam uma *convolução* das funções f e D_n, com D_n sendo o *núcleo* dessa convolução. Veja no final deste tópico uma nota sobre média ponderada, convolução e redes neurais.

Teorema de Fejér(Convergência em média)

Um resultado, conhecido como **Teorema de Fejér**, sobre a convergência de uma série de Fourier cuja demonstração está associada com o núcleo de Fejér, é o seguinte:

"Se f é contínua, periódica de período 2π, e se (w_n) é a sequência das médias aritméticas das somas parciais da série de Fourier de f, então $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = f(x)$, sendo a convergência uniforme para todo x."

Para ver a demonstração consulte [Rudin, 1971]. Uma consequência desse teorema é o Teorema de Aproximação de Weierstrass. A principal passagem na dedução dele está no seguinte: todo polinômio trigonométrico pode ser desenvolvido em série de Taylor, pois as funções seno e cosseno são analíticas, como vimos antes.

Logo, a média aritmética das somas parciais da série de Fourier são analíticas também. Isso significa que elas são aproximadas uniformemente por polinômios em um dado intervalo compacto de seu domínio. Como elas convergem uniformemente para $f(x)$, pelo teorema de Fejér, então $f(x)$ é aproximada uniformemente por polinômios.

QH-5. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o teste de comparação de Weierstrass, mostre que dadas duas sequências (x_k) e (y_k) do espaço ℓ_2, a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k . y_k$ é convergente.

Reveja a descrição de ℓ_2 no capítulo 3.

Obs.:

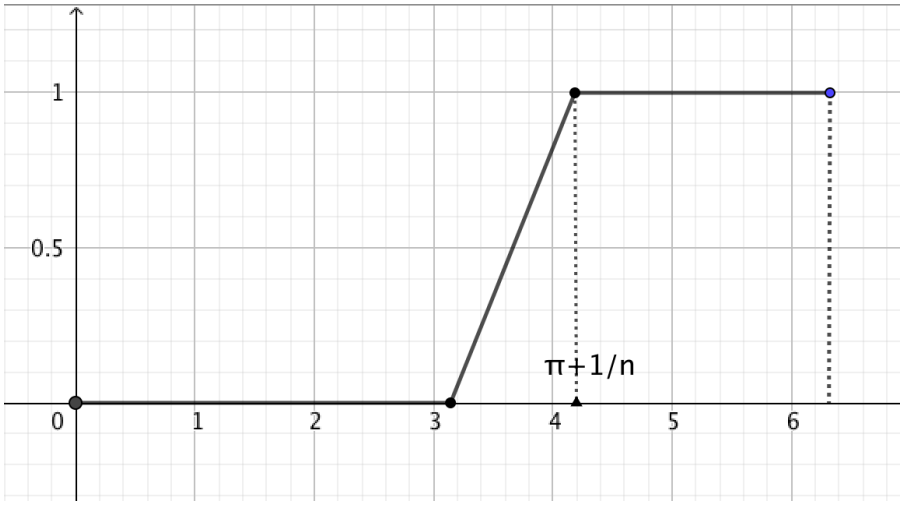
1) O Teste de Weierstrass afirma o seguinte: *"Dada a sequência de funções $f_k: X \to R$, seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série convergente de números reais $a_k \geq 0$ tais que $|f_k(x)| \leq a_k$, para todo k natural e todo $x \in X$. Nessas condições, as séries $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ são uniformemente convergentes."*

2) Uma sequência de funções $f_n: X \to R$ *converge uniformemente* para a função $f: X \to R$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in N$(dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. E dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ é *uniformemente convergente* em *X* se a sequência das somas parciais desta série converge uniformemente em *X*.

Em virtude do teorema de Fejér, o conjunto dos polinômios trigonométricos é um subconjunto denso de *C[0, 2π]* com a norma definida em (*). Esse teorema nos alerta sobre uma possível "incompletude" do espaço *C[0, 2π]* com a norma (*), pois a "convergência em média" não implica, necessariamente, a convergência uniforme. Além disso, temos um contraexemplo: a sequência de Cauchy das funções contínuas (f_n), definidas a seguir, converge para uma função descontínua f, definida por $f(x) = 0,\ \text{se}\ 0 \leq x \leq \pi$ e $f(x) = 1,\ se\ \pi < x \leq 2\pi$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ n(x-\pi) & \text{se} \quad \pi < x \leq \pi + 1/n, \\ 1, & \text{se} \quad \pi + 1/n < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

A figura a seguir ilustra o gráfico de uma dessas funções.



Concluímos, assim, que *C[0, 2π]* com a norma (*) não é um espaço vetorial métrico completo, o que motiva a ampliação desse espaço para outro que seja completo em relação a essa norma.

Existe um espaço vetorial mais amplo, dotado do mesmo produto interno e norma decorrente (*), indicado por $L_2[0, 2\pi]$, que contém o espaço *C[0, 2π]. Ele é formado por todas as funções integráveis(à Lebesgue)* f *em [a, b], tais que* $\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty$.

Normalmente, em L_2[a, b], se considera como a mesma função integrável f a classe de funções que diferem entre si apenas em um conjunto de pontos que tem medida nula. Prova-se que *o espaço* L_2*[a, b] com a norma (*) é um espaço métrico completo*. Além disso, prova-se que esse espaço é separável [Stein, 2005]. Temos, pois, que **o espaço** L_2**[a, b] é um Espaço**

de Hilbert Separável. Assim, nesse Espaço de dimensão infinita, as séries de Fourier de uma função integrável f convergem para f na norma (*).

Podemos dizer, que o conjunto infinito e enumerável de funções ortonormais formado pela união das duas sequências infinitas de funções:

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\; g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx,\; \ldots\,,\; g_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\,,\ldots$$

e

$h_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}senx,\ldots, h_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(nx),\ldots$ *se comporta, analogicamente, como uma "base ortonormal infinita enumerável" do espaço de Hilbert* L_2 *[0,* 2π*]*. Usualmente um conjunto como esse é denominado de conjunto ou **sistema ortonormal completo de funções.**

Um resultado importante relacionado com isso e que amplia nossa compreensão da beleza das conexões aproximativas em Matemática é o seguinte:

"Todo conjunto ortonormal completo de funções $\{\phi_n\}$ *induz uma correspondência biunívoca entre as classes de funções* f *de* L_2 *e as sequências* (a_n) *de quadrado somável de* ℓ_2*."*

Isso nos permite, de modo sintético, dizer que a representação

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$$

revela que L_2 pode ser considerado como um espaço euclidiano de dimensão infinita, no qual o ponto f tem coordenadas a_n e as funções ϕ_n são os vetores da base.

Com essa analogia podemos interpretar os coeficientes de Fourier de uma função f como as "coordenadas" em relação à base ortonormal de funções trigonométricas no espaço de Hilbert L_2 *[0,* 2π*]*. Noutros termos mais gerais: "*Qualquer espaço de Hilbert separável tem uma base enumerável ortonormal"* e *"Dois espaços de Hilbert separáveis e de mesma dimensão são isomorfos".*

Sobre essa "aproximação multifária" dos espaços de Hilbert com os espaços vetoriais de dimensão finita, escreveu Paul Halmos sobre Espaço de Hilbert noApêndice da referência [Halmos, 1978]: "*Provavelmente a mais útil e certamente a mais bem desenvolvida generalização da teoria dos espaços de dimensão finita com produto interno é a teoria dos espaços de Hilbert."*

Para ampliar seus conhecimentos sobre este tópico veja as referências [Rudin, 1971], [Rudin, 1987], [Iório, 2005], [Bartle, 1995], [Benchman, 2000] e [Stein, 2005, Vol. III]. Nessas duas últimas referências, a introdução aos espaços de Hilbert está bem didática e na referência [Iório, 2005] estão aplicações das séries de Fourier nas resoluções de algumas equações diferenciais parciais: equação da onda, equação do calor e equação de Laplace.

NOTA (Noções de Integral de Lebesgue)

No que se segue, usaremos *conjunto mensurável* no lugar de conjunto mensurável a Lebesgue.

Considere um conjunto mensurável $A \subset R^n$, tal que A = $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, com n natural, E_i mensurável e $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Uma função $f : A \subset R^n \rightarrow R$ será denominada de **função simples** se ela for uma combinação linear das funções características K_{E_i} dos conjuntos disjuntos E_i. Ou seja, uma função simples tem a representação dada por $f(x) = \sum_i^n a_i K_{E_i}$, onde a_i é real.

Decorre dessa definição que o conjunto imagem de uma função simples é sempre um conjunto finito. Perceba que uma *função escada* é uma função simples, em que os E_i são intervalos de R. Assim, podemos interpretar as funções simples de $A \subset R$ em R, como uma generalização, no sentido das aproximações multifárias, das funções escadas.

Sem perda de generalidade, vamos agora considerar f não negativa. Definimos a *integral de Lebesgue da função simples* f não negativa sobre o conjunto mensurável A, assim:

$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(E_i)$, em que μ representa a medida de Lebesgue.

Uma consequência imediata dessa definição é que $\int_A f d\mu = 0$ se A for um conjunto de medida nula.

A partir das funções simples podemos conceituar as *funções mensuráveis* não negativas. Dizemos que uma função $f : A \subset R^n \rightarrow R$, com A mensurável, é uma **função mensurável não negativa** se existe uma sequência (φ_n) não decrescente de funções simples não negativas que converge para *f* em cada ponto de A. Decorre dessa definição que se f for limitada a convergência é uniforme. Além disso, toda sequência convergente de funções mensuráveis converge para uma função mensurável.

A integral de Lebesgue de uma função mensurável não negativa $f : A \subset R^n \rightarrow R$ sobre o conjunto mensurável A é definida por $\int_A f d\mu = \sup \int_A \varphi d\mu$, onde o supremo é estendido sobre todas as funções simples φ definida de A em R tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in A$. E diremos que f é *integrável* se $\int_A f d\mu < +\infty$.

Um resultado decorrente dessa definição é que se duas funções integráveis diferem, apenas, em um conjunto de pontos que tem medida nula, então suas integrais são iguais.

Dois teoremas importantes relacionados com a integral de Lebesgue são apresentados a seguir. Neles, usa-se a expressão "converge em quase todo ponto". Isso significa que a convergência, eventualmente, só não acontece em um conjunto de pontos que tem medida nula.

Teorema da Convergência Monótona:

"Se (f_n) é uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas que converge para uma função f, em quase todo ponto do conjunto mensurável X, então $\int f d\mu = lim \int f_n d\mu$."

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

"Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável de valor real f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e $\int f d\mu = lim \int f_n d\mu$.

Para ampliar e aprofundar seu conhecimento da integral de Lebesgue veja, por exemplo, as referências [Bartle, 1995], [Rudin, 1971], [Rudin, 1987], [Medeiros, 2003] e [Stein, 2005]. Uma visão breve sobre a integral de Lebesgue você pode ver também na Wikipedia(em inglês) e em outros links específicos da web.

Mais uma vez, perceba a importância das Aproximações Multifárias: os conjuntos mensuráveis são aqueles que podem ser aproximados por conjuntos abertos(ou fechados), que por sua vez podem ser aproximados por cubos(abertos ou fechados); as funções mensuráveis são aproximadas por funções simples(que são constantes por partes); e a integral de Lebesgue é uma generalização(aproximação multifária) da integral de Riemann. Essa aproximação pode ser descrita de forma breve, mas bem compreensiva, como segue.

A integral de Riemann na reta pode ser toda construída a partir de funções escada(que são combinações lineares de funções características de subintervalos disjuntos) e a integral de Lebesgue a partir das funções simples(que são combinações lineares de funções características de subconjuntos mensuráveis disjuntos). *As funções integráveis segundo Riemann são aquelas que podem ser aproximadas por integrais de funções escada e as funções integráveis segundo Lebesgue são aproximadas por integrais de funções simples*. As funções integráveis a Riemann são integráveis a Lebesgue e têm o mesmo valor. Nós fizemos no capítulo 2 uma "apresentação híbrida" de Integral. Através do conceito de *função quase-escada* em intervalos compactos e de conjunto mensurável à Lebesgue, definimos uma integral tão ampla quanto a de Lebesgue, mas com a forma mais próxima da de Riemann. Um caminho "intermediário". Por isso, as "somas" associadas às partições do intervalo [a, b] foram chamadas de somas de Riemann-Lebesgue. Um ponto a mais que favorece o caminho "intermediário" é o teorema de aproximação de funções mensuráveis por funções escadas em quase todo ponto [Stein, 2005].

Por razões como essas, mas também por brevidade, não usamos a definição usual de função mensurável. Com ela, a definição que apresentamos acima se torna um teorema. A definição usual é a seguinte: Seja *f* uma função definida em um espaço mensurável M com valores em R $\cup \{+\infty\}$. Diz-se que a função *f* é *mensurável* se o conjunto {x $\in M$; *f*(x) > a} é mensurável para todo real a. No caso de função contínua, esse conjunto é aberto, logo mensurável. Por isso, toda função contínua é mensurável. Nesse sentido, podemos dizer que as funções contínuas são também aproximações de funções mensuráveis. Aliás, o conjunto das funções contínuas em [a, b] é denso em L_2[a, b]. E na demonstração desse fato, prova-se, com a ajuda do Teorema da Convergência Dominada, que *podemos aproximar funções simples por funções contínuas em [a, b], mostrando-se que podemos aproximar funções caracteríscas de subconjuntos fechados de [a, b] por funções contínuas.*

Para isso, procede-se assim:

A) Constrói-se uma sequência de funções contínuas (g_n) que converge para a função característica K_A do conjunto fechado A $\subset$ [a, b], a partir da função contínua d(x) que mede a distância de um ponto x de [a, b] ao conjunto A, isto é, d(x) = inf $|x - y|,\ y \in A.$

B) $g_n(x) = \frac{1}{1+nd(x)}, n \in N.$ Perceba que g_n é contínua em [a, b], $g_n(x) = 1$ em A e converge para 0 em B = [a, b] – A.

C) Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\|g_n - K_A\| = \sqrt{\int_B {g_n}^2 dx} \ \rightarrow \ 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \text{ [Rudin, 1971].}$$

Obs.: Sobre *função característica* de um conjunto veja a nota sobre ela no capítulo 4, logo após a questão QI-78. Lá apresentamos a definição dessa função. Mas vamos repeti-la aqui. Seja W um conjunto qualquer. Se E $\subset W$, então a **função característica** de E, denotada por χ_E, é definida por:

$$\chi_E(x) = 1, se\ \ x \in E,$$

$$\chi_E(x) = 0, se\ x \in W - E.$$

Por exemplo, considere o intervalo A = [2, 4] $\subset R$. Sua função característica é $\chi_A: R \rightarrow R$; $\chi_A(x) = 1$, se x $\in$ A e $\chi_A(x) = 0$, se x $\in$ *R* - A. Usamos no presente tópico a letra *K* no lugar de χ para designar a função característica de um conjunto.

O que desejamos acentuar com o que foi exposto acima é a importância das "aproximações em suas diversas formas", as aproximações multifárias, como o caminho natural a ser sistematicamente implementado, como atitude fundamental, na construção da Matemática, bem como de todo o conhecimento humano sobre a Realidade estudada. **A natureza como um todo nos ofertou essa faculdade/perspectiva otimizável de aprender por aproximações multifárias!** Refletindo sobre isso percebemos que essa foi uma solução otimizada da natureza em nossa formação ao longo da evolução das espécies e do Universo. Pois, como permitir que nós, tão limitados(as), tenhamos conhecimento de uma Realidade tão ampla e complexa? Evidentemente só poderia ser por aproximações multifárias. Para aprimorar a compreensão disso reveja a introdução deste livro, sobretudo a última parte dela, onde é disponibilizado o código QR do texto "A Via das Aproximações Multifárias com IA".

Comentário(sobre o método de Fourier):

O matemático Ian Stewart escreveu o seguinte comentário sobre o método de Fourier:

"Quase duzentos anos depois, a sacação inicial de Fourier tornou-se uma ferramenta indispensável para matemáticos, físicos e engenheiros. O comportamento periódico é generalizado, e, sempre que ocorre, podemos calcular a série de Fourier correspondente e ver aonde ela nos leva. Uma generalização, a transformada de Fourier, aplica-se a funções não periódicas. Uma análoga discreta, a transformada rápida de Fourier, é um dos algoritmos mais usados em matemática aplicada, com uso em processamento de sinais e aritmética de alta precisão em álgebra computacional. As séries de Fourier ajudam os sismólogos a compreender os terremotos e os engenheiros civis a projetar edifícios à prova deles. Auxilia os oceanógrafos a mapear as profundezas dos oceanos e as empresas petrolíferas a prospectar petróleo. Os bioquímicos as utilizam para solucionar a estrutura de proteínas. A equação de Black-Scholes, que os investidores empregam para precificar opções no mercado de ações, é um parente próximo da equação do calor. O legado do operador de calor é quase ilimitado." [Stewart, 2019, p.106]

Obs.: Uma noção, incluindo algumas aplicações, da **Transformada de Fourier** e suas variações usuais, você pode obter em [Iório, 2005] ou na Wikipédia, buscando a expressão "Transformada de Fourier" no Google. Uma noção inicial, breve e compreensiva, da Transformada de Fourier discreta, usando Matrizes e Raízes complexas da unidade, você poderá encontrar na referência [Carlen, 2009]. Outro texto bem didático está no **Código QR(I)**.

Sobre a vida e obra do grande Matemático e Físico Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1839) consulte o **Código QR(II)**.

QR (II) QR (I)

NOTA:

Média ponderada, Convolução e Redes neurais

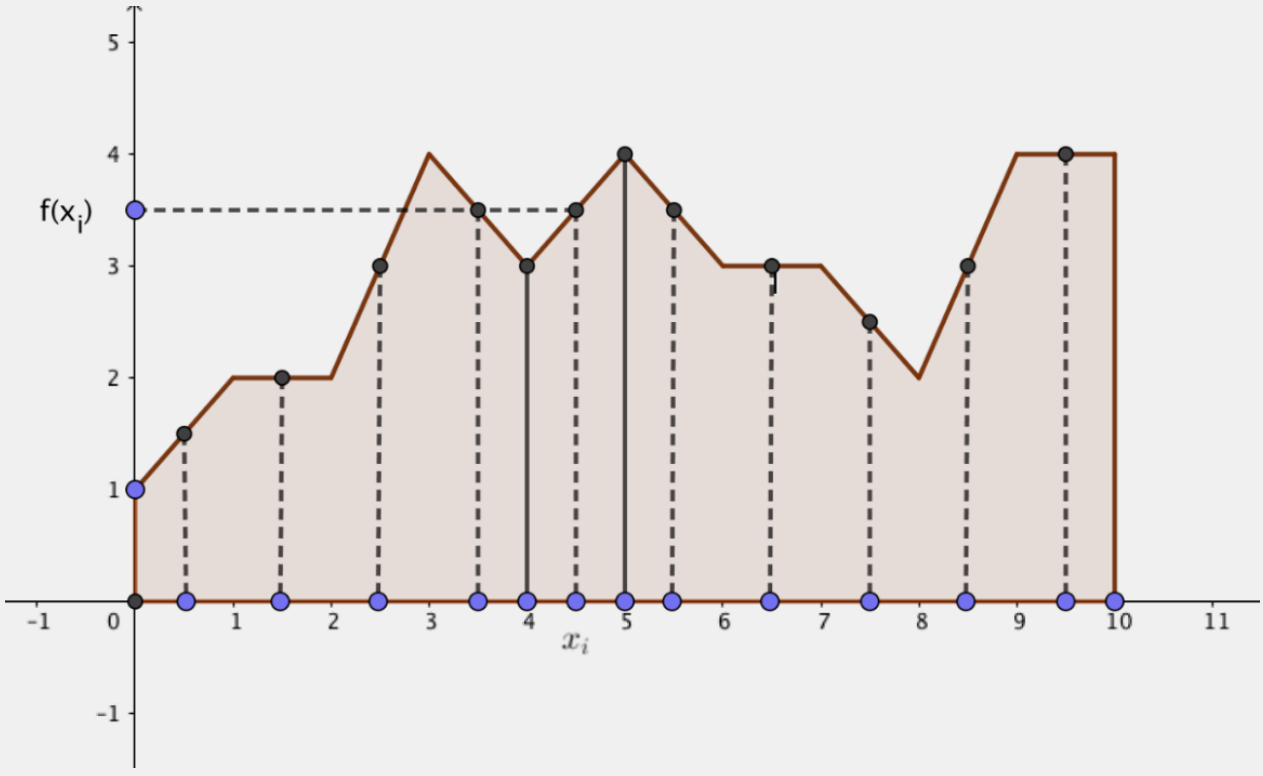
Um tipo de generalização da média aritmética, em que o conceito de integral de uma função é relevante, ocorre no caso do valor médio de uma função contínua positiva em um conjunto compacto (limitado e fechado). E com esse conceito várias aplicações nas ciências da natureza são realizadas. Para o caso de uma função $f : [a, b] \to R$, ele se define por $VM(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Tendo em mente a média aritmética como média ponderada em que os pesos são iguais, vemos que nesse caso todos os pesos seriam iguais a 1/($b - a$). Observe que $\int_a^b 1dx = b - a$. Então podemos rescrever o valor médio de f assim: $VM(f) = \frac{\int_a^b f(x).1dx}{\int_a^b 1dx}$. Agora podemos pensar em generalizar a média ponderada a partir da generalização do VM. Para determinar os pesos continuamente variáveis usamos uma outra função g(x) para substituir a função constante g(x) = 1. Nestes termos, o valor médio ponderado (por g) de f seria dado por

$$VMP(f) = \frac{\int_a^b f(x).g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

No caso de g(x) indicar a densidade linear de massa de um fio reto de extremidade inicial A e x a distância de um ponto do fio ao ponto A e f(x) = x, então $VMP(f) = \frac{\int_a^b x.g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ indicará a posição(coordenada) do centro de massa do fio.

Para percebermos melhor as aproximações conceituais do valor médio de uma função contínua f em um intervalo [a, b], com a média aritmética de um conjunto de valores de f nesse intervalo, consideremos f como uma função poligonal positiva de n segmentos lineares, tais que cada um deles corresponda a um subintervalo de [a, b] de comprimento $\Delta x_i = 1$, isto é, Δx_i = (b – a)/n = 1. Então a área sob o gráfico de f será $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{(b-a)}{n}$, em que x_i é a abcissa do ponto médio do subintervalo de ordem i. Dividindo esse valor por (b – a) obtemos: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$, que é a média aritmética dos n valores $f(x_i)$. Ou seja $\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$. Quando substituímos a função poligonal f por uma função contínua qualquer no intervalo [a, b], mudamos do somatório $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ para a integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, é “natural” definirmos o valor médio de f na forma acima apresentada, ou seja, $VM(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

A figura a seguir ilustra o gráfico de uma função poligonal f para o caso de n = 10 e o intervalo [0,10].



Obs.: No caso de a função f ser de várias variáveis reais, o valor médio dela em um conjunto mensurável K será dado por: $\frac{1}{V(K)}\int_K f(X)du$, em que V(K) indica o volume de K.

Consideremos ainda a fórmula

$$VMP(f) = \frac{\int_a^b f(x).g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Se $\int_a^b g(x)dx = 1$, então

$$VMP(f) = \int_a^b f(x).g(x)dx.$$

Essa ideia de média ponderada é usada para definir a convolução de uma função real contínua f com uma função real positiva g, ambas com domínio $[a,b]$. A convolução tem como objetivo “suavizar ou regularizar” uma função f através da média ponderada dos seus valores na vizinhança(intervalo aberto) de cada ponto de seu domínio.

Suponhamos que f e g tenham domínio R, com g positiva no intervalo [- h, h] e nula fora dele.

A convolução de f com g, comumente indicada por $f * g$, é a função definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t)dt = \int_{-h}^{h} f(x+t)g(t)dt.$$

Se $\int_{-h}^{h} g(t)dt = 1$, então $f * g$ pode ser interpretada como a média ponderada dos valores de f no intervalo [x – h, x + h], tendo g como a função dos pesos. Comumente essa função é chamada de núcleo da convolução. Nas aplicações práticas, com a ajuda dos computadores, pode se fazer convoluções discretas, em que as contas se fazem com somatórios, vetores ou matrizes. Ou seja, as contas se fazem com Álgebra Linear.

Atualmente usa-se essa ideia na construção de redes neurais convolucionais para aprimorar o desempenho dos algoritmos da Inteligência Artificial, principalmente no processamento de imagens. Uma noção introdutória e prática dessas redes neurais você pode encontrar no **Código QR**.

Para uma visão geral sobre Convolução consulte a Wikipedia com esse verbete ou então use uma IA generativa (DeepSeek, GPT, Copilot ou Gemini).

Observe a aproximação conceitual da convolução com a média ponderada e a aproximação contextualizada das redes neurais convolucionais, que nos proporciona um belo exemplo da potência das “aproximações discretas” das funções contínuas, visualizadas através de vetores e matrizes. Medite em tudo isso com o “olhar” das Aproximações Multifárias e perceba a beleza da compreensão que essa visão nos proporciona da Matemática!

III - FUNÇÕES POLIGONAIS PERIÓDICAS

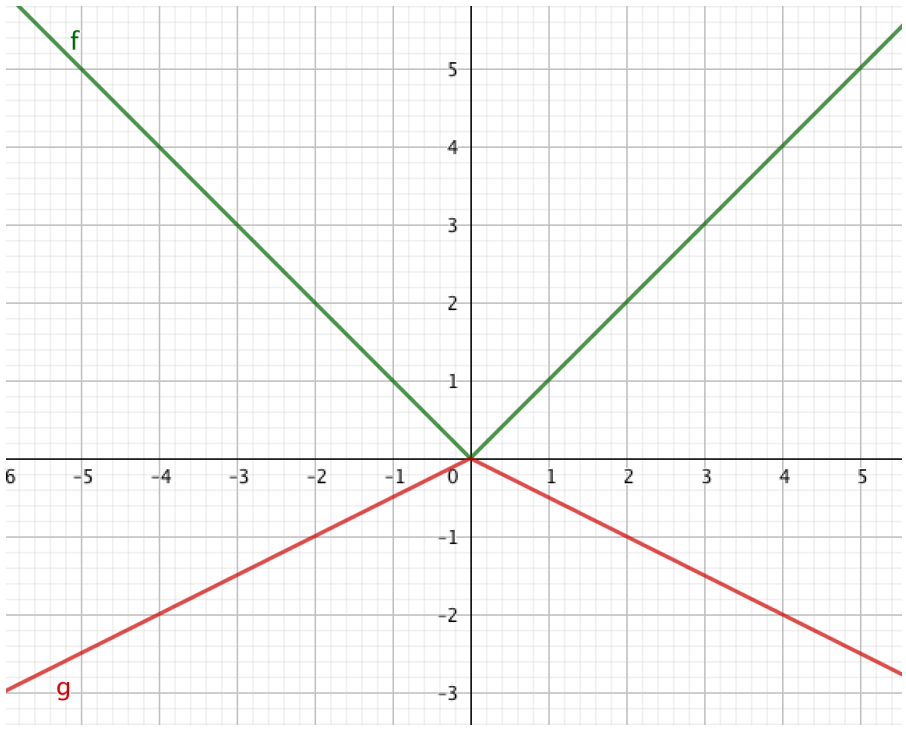
1 - FUNÇÕES POLIGONAIS

Inicialmente, consideremos um intervalo fechado $[a, b]$ de *R*. Uma *partição* P de $[a, b]$ é um subconjunto de n + 1 pontos x_i de $[a, b]$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Isso significa que o intervalo $[a, b]$ foi decomposto em subintervalos da forma $[x_{i-1},\ x_i]$ tal que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$. Seja $f: [a, b] \to R$ uma função contínua tal que se $x \in [x_{i-1},\ x_i]$, então $f(x) = a_i x + b_i$, para $i \in \{1, 2,\ \ldots, n\}$, em que a_i e b_i são constantes reais. Ou seja, o gráfico de f é uma linha poligonal formada pela união de segmentos(de retas) não verticais. Trata-se de uma função contínua e linear por partes. Uma função como essa é denominada de *função poligonal.* Também usamos essa denominação para os casos em que o domínio de f tem uma das formas: $(-\infty, b], [a, +\infty)$ ou R. Nesses casos teremos, no início ou no fim da poligonal, uma semirreta não vertical. A função poligonal mais simples é a função constante $f(x) = k$. Também são funções poligonais a função linear $f(x) = ax$ e a função afim $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$, ambas com domínio R ou um intervalo real não degenerado, isto é, de extremos distintos. No entanto, considerando a noção geométrica de linha poligonal aberta, podemos dizer que o modelo não linear mais simples de uma função poligonal é dado pela função modular $f(x) = |x|$, com domínio $[a, b]$, em que $a < 0 < b$. Seu gráfico tem a forma de um "V". Uma generalização dessa função é $f(x) = k + a|cx + d|$, sendo k, $a, c \neq 0$ e d constantes reais. Perceba que uma função poligonal f é completamente determinada pelas coordenadas de seus vértices, que são os pontos $(x_i, f(x_i))$. Evidentemente, podemos ampliar a generalização para uma combinação linear de *n* funções da forma $f_i(x) = |c_i x + d_i|$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

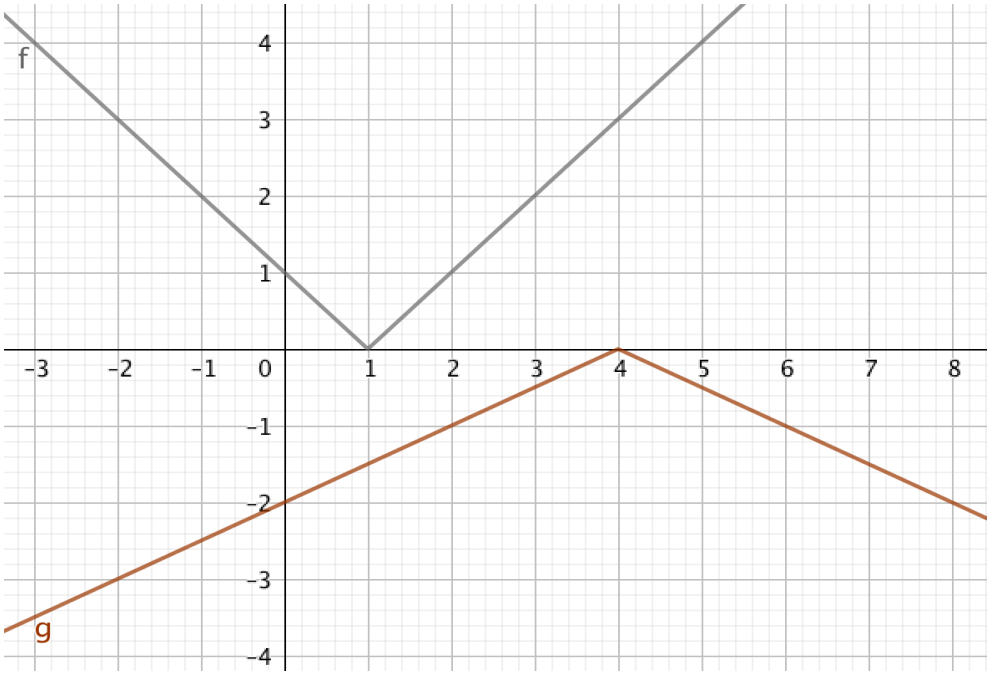
Assim podemos afirmar que toda função poligonal f pode ser escrita na forma $f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{n} c_i|x - x_i|$, em que a, b e c_i são constantes reais, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vejamos a seguir, alguns exemplos de funções poligonais e seus respectivos gráficos, em intervalos limitados.

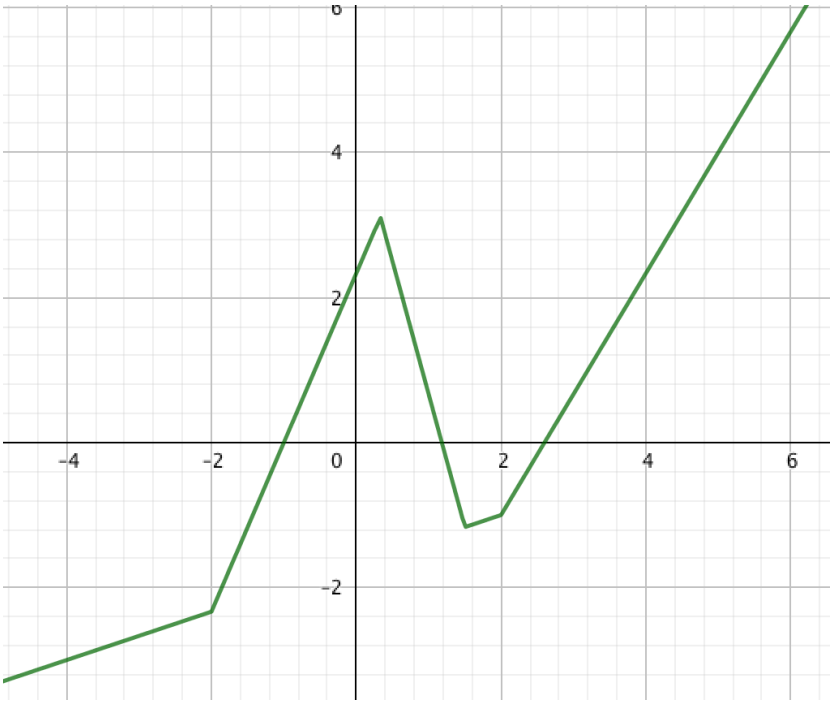
1) $f(x) = |x|$ e g(x) = - $\left|\frac{1}{2}x\right|$.



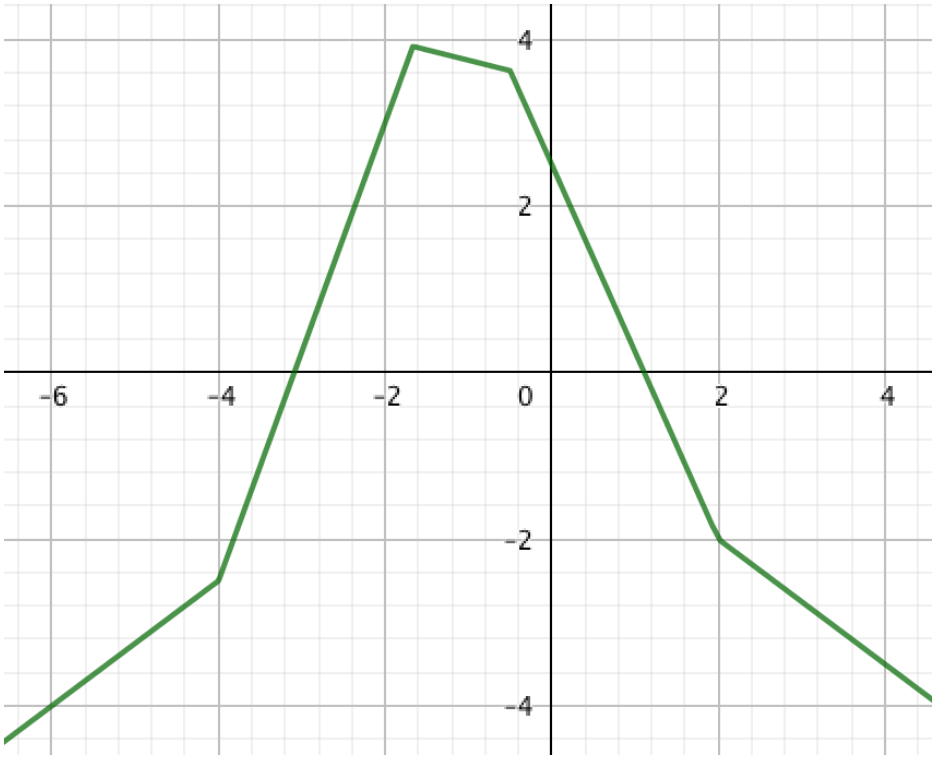
2) $f(x) = |x - 1|$ e g(x) = - $\left|\frac{1}{2}x - 2\right|$.



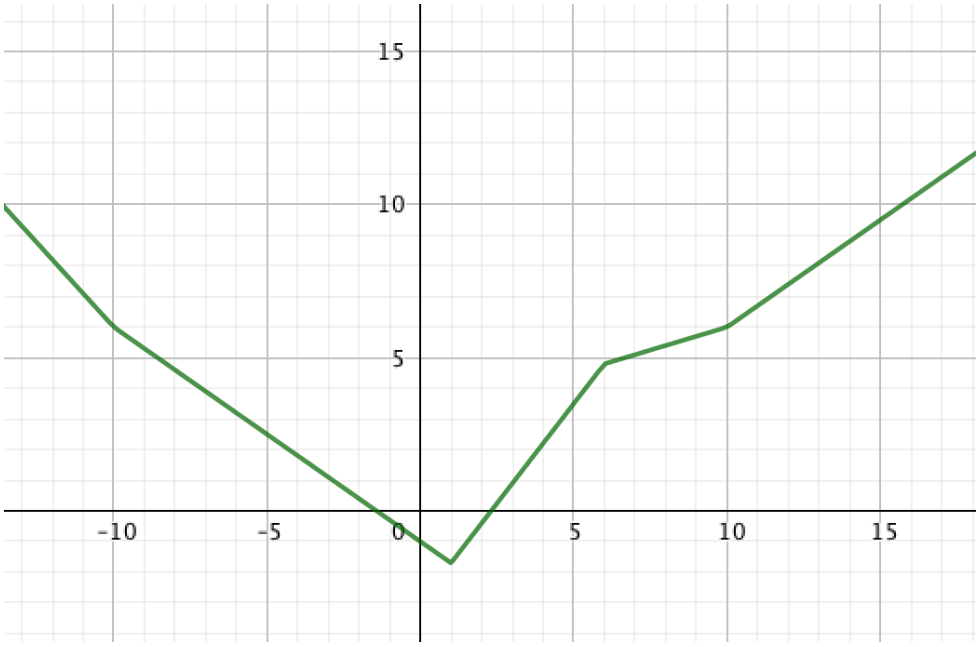
3) $f(x) = -3 + x + |x + 2| + |2x - 3| - |3x - 1| + \frac{2}{3}|x - 2|$.



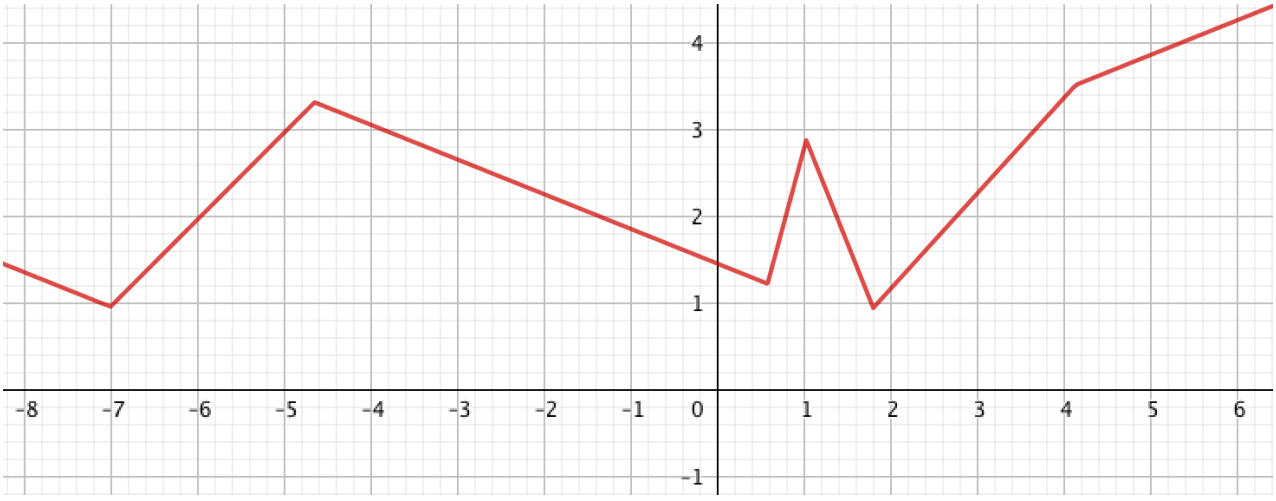
4) $g(x) = 2\left|\frac{x}{2} + 2\right| + \frac{3}{2}\left|\frac{x}{2} - 1\right| - \frac{1}{2}|2x + 1| - \frac{1}{2}|3x + 5|$.



5) $f(x) = -3 - \frac{x}{5} + \left|\frac{x}{5} + 2\right| - \left|\frac{x}{2} - 3\right| + |x - 1| + \left|\frac{x}{5} - 2\right|$.

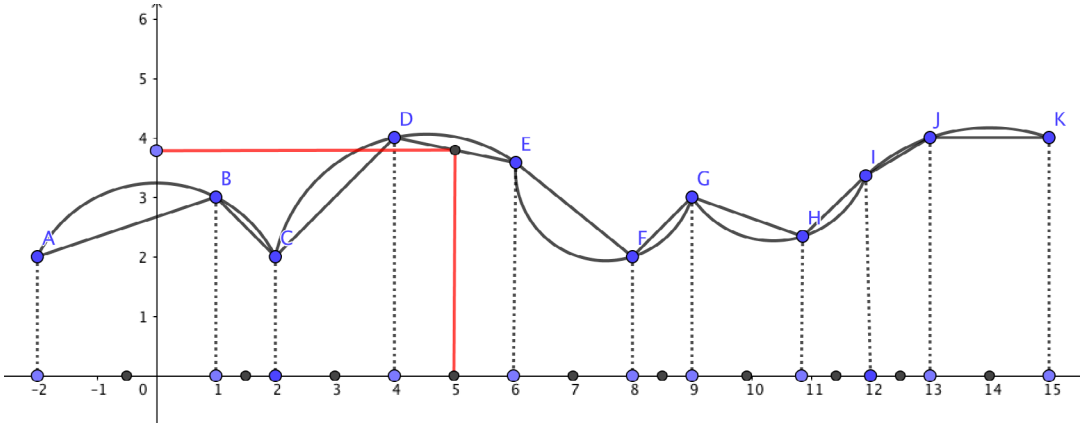


6) $h(x) = |1{,}8x - 3{,}25| - |0{,}7x + 3{,}25| + |0{,}7x + 4{,}9| - |3{,}1x - 3{,}2| + |2{,}05x - 1{,}2| - |0{,}35x - 1{,}45|$



2 – APROXIMAÇÕES POR FUNÇÕES POLIGONAIS

As funções poligonais têm papel relevante no cálculo aproximado de áreas das regiões sob o gráfico de uma função contínua positiva f, definida num intervalo real $[a, b]$. Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição P desse intervalo. Então, temos a função poligonal $g : [a, b] \to R$, associada a essa partição P, tal que $g(x_i) = f(x_i)$. Uma soma de Riemann da função f, em relação a P e g, é $S_g = \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$, em que $\bar{x}_i$ é o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Perceba que $g(\bar{x}_i)$ é a média aritmética de $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$. Essa soma representa a área sob a linha poligonal, gráfico de g, com vértices $(x_i, f(x_i))$. Esta área é uma aproximação da área S sob o gráfico de f; e a função poligonal g é uma aproximação da função contínua f, conforme ilustrado na figura a seguir. Nela, os pontos pretos do eixo-x representam os pontos médios dos respectivos intervalos e a linha vermelha quebrada associa o ponto médio de [4, 6], que é 5, ao seu ponto imagem no eixo-y, passando pelo ponto médio do segmento DE da linha poligonal, gráfico de g.



Indicando por $|P|$ o maior valor dos Δx_i, percebemos que quando $|P|$ tende a 0, as somas de Riemann S_g tendem a S e a sequência de funções poligonais g convergem para a função contínua f. A convergência de S_g a S está de acordo com a nossa definição de integral de uma função limitada. Perceba que para cada partição podemos associar uma função escada, usando o ponto médio de cada subintervalo, de tal modo que o valor da integral dela seja igual ao da função poligonal correspondente. Por outro lado, a convergência da sequência de funções g para a função f é justificada no teorema apresentado a seguir.

Teorema da Aproximação Poligonal

Toda função contínua $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *pode ser uniformemente aproximada por funções poligonais.*

Demonstração:

Como $[a,b]$ é fechado, então f tem continuidade uniforme. Logo dado um $\varepsilon > 0$, arbitrariamente escolhido, podemos obter uma partição de $[a,b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ tal que } x, y \in [x_{i-1},\ x_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Por outro lado, para todo $x \in [a,b]$, existe um i tal que $x \in [x_{i-1},\ x_i]$.

Seja g: $[a,b]\to \boldsymbol{R}$ a função poligonal cujo gráfico tem os vértices nos pontos $(x_i,\ f(x_i))$.

Como $f(x) - g(x) = f(x) - f(x_i) + f(x_i) - g(x)$, então, pela desigualdade triangular, temos que

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)|. \quad (2)$$

Mas $|f(x_i) - g(x)| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, pois $g(x) \in$ [f$(x_i),\ f(x_{i-1})]$ ou $g(x) \in$ [f$(x_{i-1}),\ f(x_i)]$. Lembre-se que g é crescente, decrescente ou constante em cada subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Combinando isso com (1) e (2), obtemos

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Colorário

"Todo polinômio real $p:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *pode ser uniformemente aproximado por funções poligonais".*

Vimos anteriormente, com o nome de teorema-W, que a recíproca desse corolário também é válida, isto é: *"Toda função poligonal pode ser uniformemente aproximada por polinômios".*

COMPRIMENTO DE ARCO

Um outro conceito que decorre do teorema da aproximação poligonal é o de *comprimento de arco*. Seja $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ uma função contínua que tem derivada contínua em $[a,b]$. Tomemos uma partição P de $[a,b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e seja g a função poligonal associada a P. Então, o comprimento da poligonal, gráfico de g, é dado por

$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$, que é a soma dos comprimentos de todos os segmentos dessa poligonal. Essa soma é uma aproximação do *comprimento de arco* do gráfico de f. Usando o teorema do valor médio de Lagrange temos que $f(x_i)-f(x_{i-1}) = f'(w_i)(\Delta x_i)$. Substituindo isso no somatório teremos $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f'(w_i))^2(\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i$. Pelo teorema da aproximação poligonal existe o limite $\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i$, pois a função $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ é contínua em $[a,b]$. Logo, podemos definir o *comprimento de arco* do gráfico de f no intervalo $[a,b]$ como

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(w_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

NOTA (Otimização não diferenciável)

Na área de Otimização, surgem problemas em que as funções a serem otimizadas não são diferenciáveis em todos os pontos de seu domínio, como ocorre nas funções poligonais. Nesses problemas, muitas vezes, o método do gradiente não consegue ser adequado para que os algoritmos os resolva. Uma alternativa é fazer aproximações da função dada por funções diferenciáveis. Por exemplo, a função modular $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$, pode ser aproximada por funções da forma $g(x)=\sqrt{x^2+\varepsilon}$, em que $\varepsilon>0$ é relativamente "pequeno", e, consequentemente, a soma $f(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|$ pode ser aproximada pela função $g(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(f_i(x))^2+\varepsilon}$, que é diferenciável se todas as funções f_i forem diferenciáveis. Sabe-se que muitas funções diferenciáveis de interesse prático podem ser escritas dessa forma[Zornig, 2011]. Entre tais funções, estão as funções poligonais, que podem ser expressas na forma $f(x)=a+bx+\sum_{i=1}^{n}c_i|x-x_i|$, como mostramos anteriormente.

Uma aproximação diferenciável para ela é a seguinte:

$g(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}c_i|x-x_i|)^2+\varepsilon}$,em que $f_0(x)=a+bx$ e $f_i(x)=c_i|x-x_i|$.

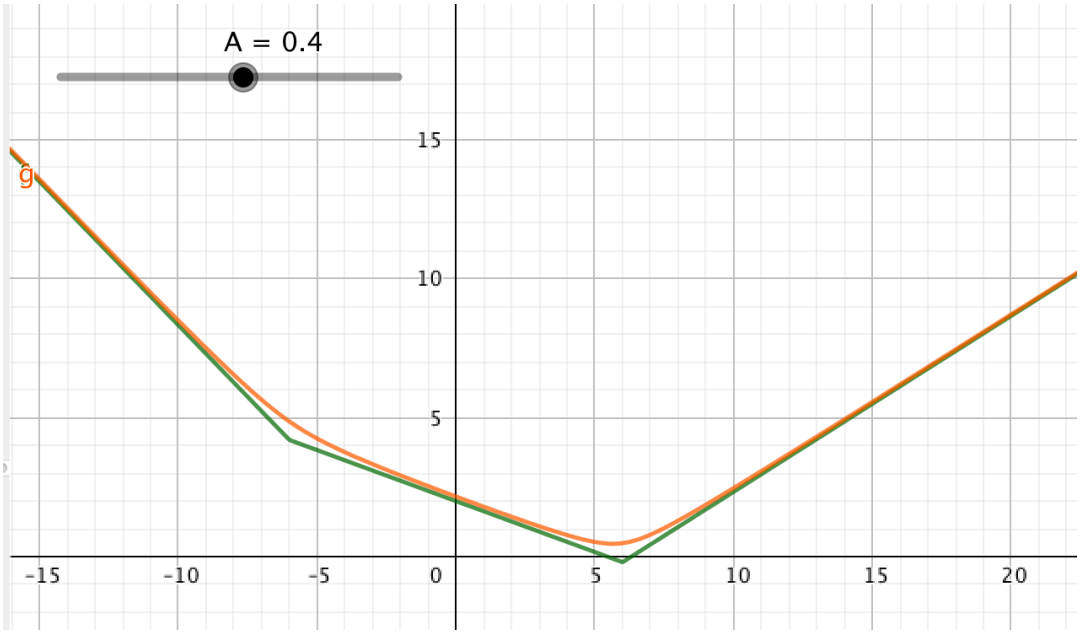
Um exemplo numérico para ilustrar é mostrado a seguir. O gráfico da função diferenciável de aproximação g está esboçado para $\varepsilon=0,4$ na cor alaranjada e o gráfico da função poligonal f está na cor verde. Ele foi feito com a mediação do GeoGebra.

Função

- $f(x) = -3 - \frac{x}{5} + \left|\frac{x}{3} + 2\right| + \left|\frac{x}{2} - 3\right|$
- $g(x) = -3 - \frac{x}{5} + \left(\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 + 0.4\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 + 0.4\right)^{\frac{1}{2}}$

Número

- A = 0.4



Obs.: Para uma noção rápida sobre o método gradiente consulte o link dado a seguir.

Acesse o Código QR.

3- EXTENSÕES PERIÓDICAS DE FUNÇÕES POLIGONAIS

Considere uma função poligonal f definida em um intervalo fechado [0, L] de R. Denominamos de **Extensão periódica de f** à função periódica F definida em todo o R assim:

I) F(x) = f(x), para x $\in$ [0, L];

II) F(x) = F(- x), para x $\in$ [-L, 0];

III) F(x + 2kL) = F(x), para k $\in$ Z.

Perceba que F é **par** e tem período fundamental igual a 2L.

Visualmente, no plano cartesiano, o gráfico de F é obtido da seguinte forma: faz-se uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo-y, obtendo-se um gráfico simétrico P; em seguida, repete-se cópias de P ao longo do eixo-x. Vejamos alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo – 1:

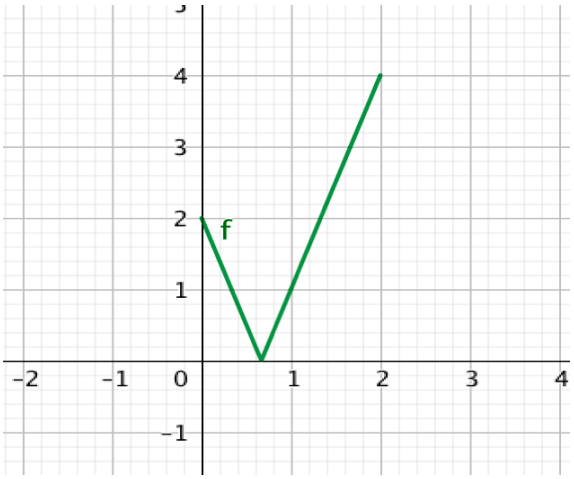
Seja f(x) = $|3x - 2|$, para x $\in$ [0, 2]. A extensão periódica de f é a função periódica F, definida em todo o R, por

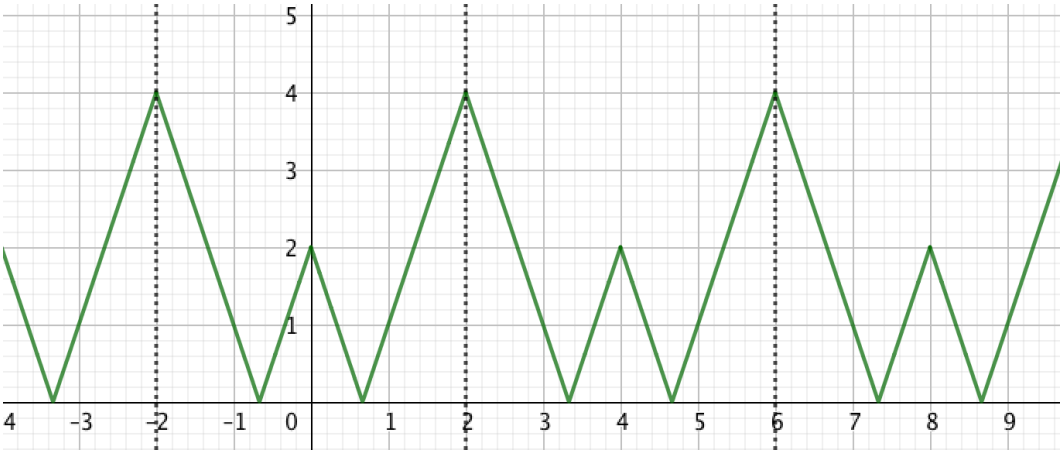
F(x) = f(x), para x $\in$ [0, 2];

F(x) = F(-x), para x $\in$ [-2, 0];

F(x + 4k) = F(x), para k $\in$ Z.

A seguir estão os esboços dos gráficos de f e de F.





Observe que o período de F é 4.

Exemplo-2:

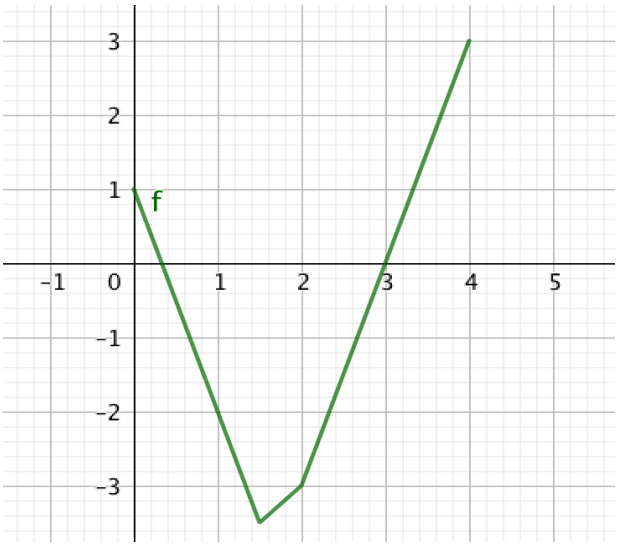
Seja f(x) = - 4 + $|x-2|+|2x-3|$, para x $\in$ [0, 4]. A extensão periódica de f é a função periódica F, definida em todo o R, por

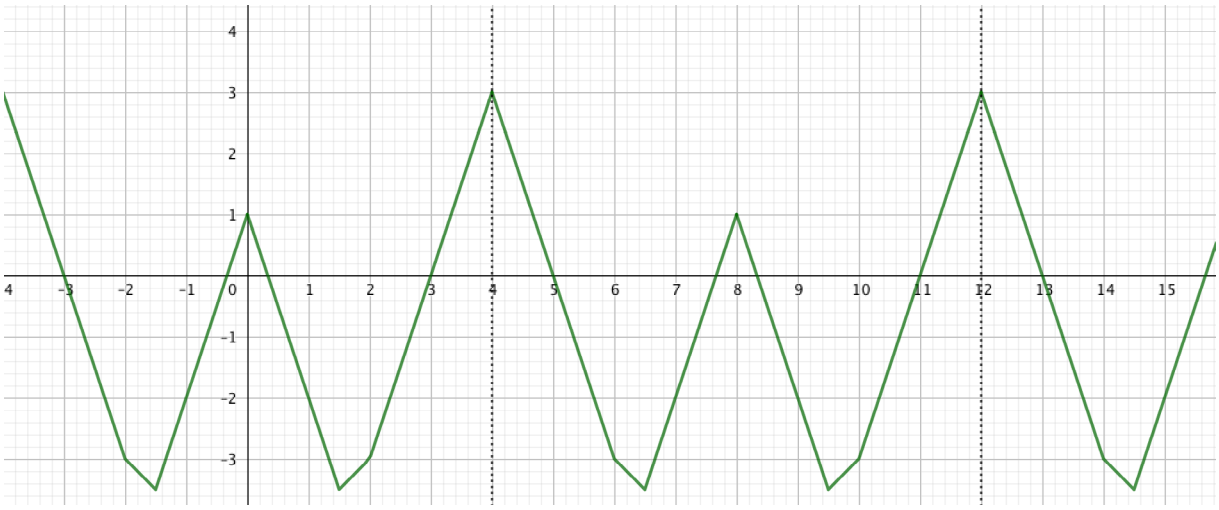
F(x) = f(x), para x $\in$ [0, 4];

F(x) = F(-x), para x $\in$ [- 4, 0];

F(x + 8k) = F(x), para k $\in$ Z.

A seguir estão os esboços dos gráficos de f e de F.





Observe que o período de F é 8.

Exemplo-3:

Considere a seguinte função poligonal:

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & para\ x \leq 2 \\ \frac{5}{3} - \frac{x}{3}, & para\ 2 < x \leq 5 \\ -5 + x, & para\ 5 < x \leq 7 \\ 26 + 4x, & para\ x > 7. \end{cases}$$

A) Coloque $f(x)$ na forma $f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{n} c_i|x - x_i|]$ e exiba uma função g que seja uma aproximação diferenciável de f.

B) Faça a extensão periódica par de f e de g, considerando como domínio comum delas, o intervalo [0, 7].

C) Com a ajuda do Geogebra, esboce os gráficos de f e g e também de suas extensões periódicas pares.

Para responder o item (a) construa o sistema de equações a partir da condição

$f(x) = a + bx + c_1|x - 2| + c_2|x - 5| + c_3|x - 7|$, usando as desigualdades

$x \leq 2,\ 2 < x \leq 5,\ 5 < x \leq 7$ e $x > 7$. Resultado:

$$f(x) = -\frac{19}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{3}|x - 2| + \frac{2}{3}|x - 5| + \frac{3}{2}|x - 7|,$$

$$g(x) = -\tfrac{19}{2} + \tfrac{x}{2} + \tfrac{4}{3}\sqrt{(x-2)^2 + 0{,}4} + \tfrac{2}{3}\sqrt{(x-5)^2 + 0{,}4} + \tfrac{3}{2}\sqrt{(x-7)^2 + 0{,}4}.$$

Ficam como exercícios os itens (b) e (c). Eles podem ser verificados com o uso do Geogebra.

Podemos também fazer **extensões periódicas "ímpares"** de certas funções poligonais f, definidas em intervalos [0, L]. Para isso, é necessário que f(0) = f(L) = 0. Se isso ocorre, então a extensão periódica ímpar F existe e satisfaz às seguintes condições:

I) F(x) = f(x), para x $\in$ [0, L];

II) F(x) = - F(- x), para x $\in$ [-L, 0];

III) F(x + 2kL) = F(x), para k $\in$ Z.

Exemplo – 4:

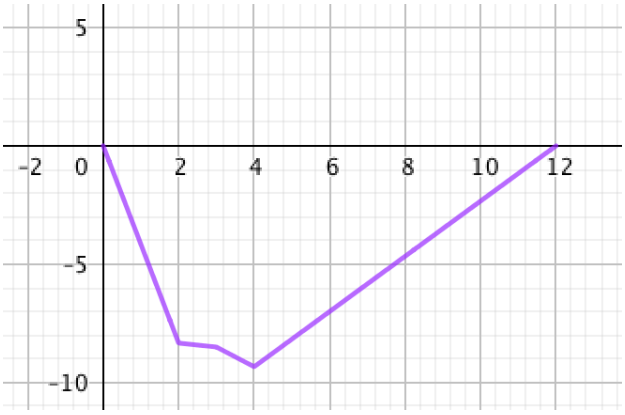
Seja f(x) = -7 - $\left|\frac{x}{3}-1\right| + |-2x+4| - \left|\frac{3x}{2}\right| + |x-4|$ para x $\in$ [0, 12]. Vemos que f(0) = f(12) = 0. A extensão periódica ímpar de f é a função periódica F, definida em todo o R, por

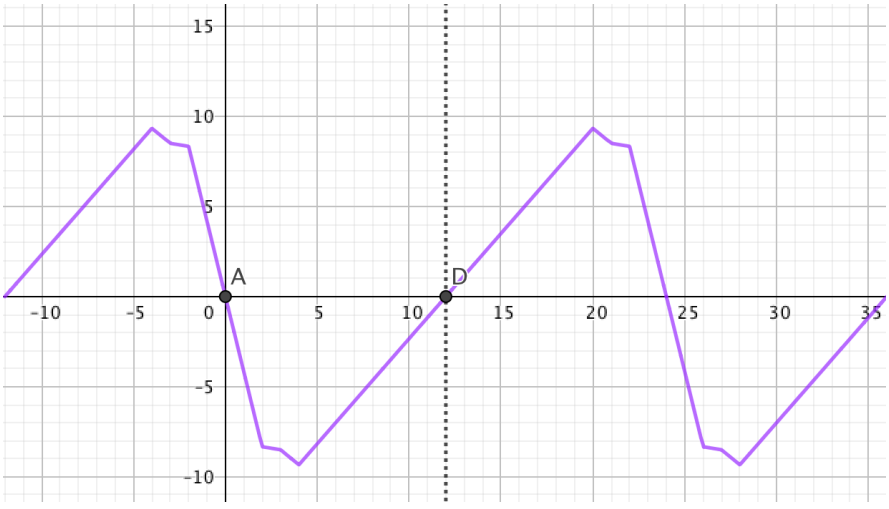
F(x) = f(x), para x $\in$ [0, 12];

F(x) = - F(-x), para x $\in$ [- 12, 0];

F(x + 24k) = F(x), para k $\in$ Z.

A seguir estão os esboços dos gráficos de f e de F.

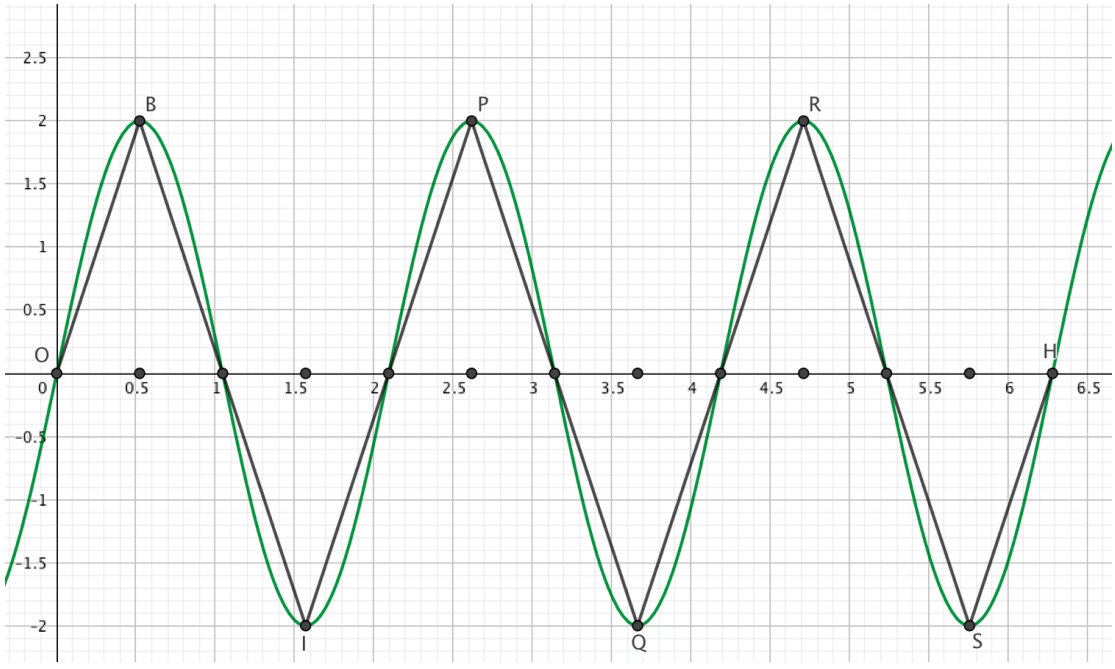




Observe que o período de F é 24.

4- FUNÇÕES POLIGONAIS PERIÓDICAS TRIGONOMÉTRICAS

Um modo “natural” de gerarmos uma função poligonal periódica “trigonométrica” é através de uma poligonal de aproximação de uma função trigonométrica contínua. Por exemplo, seja a função $f(x) = 2sen(3x)$, definida no intervalo [0, 2π]. Definamos uma partição regular desse intervalo com norma igual a $2\pi/12 = \pi/6$. A função poligonal g associada a essa partição é uma função periódica com o mesmo período de f. Para obtermos a lei que expressa a função g teremos de recorrer ainda à definição de função poligonal. Por isso, não daremos ênfase a esse tipo de função poligonal periódica. A figura a seguir ilustra essa situação.



Vamos agora nos concentrar no tópico central deste capítulo: *as funções poligonais periódicas trigonométricas* definidas por uma única sentença. Nosso objetivo é exibir uma família de funções poligonais periódicas geradas por combinação linear de funções trigonométricas especiais. Usaremos, daqui por diante, a expressão *onda poligonal* para indicar a linha poligonal periódica, que é gráfico de uma função dessas. Em virtude disso, também usaremos o termo *amplitude* para descrever, quando conveniente, o conjunto imagem delas. Quando falarmos de *derivada de uma função poligonal periódica*, estaremos sempre excluindo os pontos em que a derivada não existe, que são os correspondentes aos vértices de seu gráfico. Mas podemos considerar nesses

pontos a derivada(lateral) à esquerda como o valor da derivada da função neles. Dessa forma, o domínio de f é preservado em f'. Trata-se, pois, de uma *função contínua por partes*. Como esses pontos são enumeráveis, o conjunto formado por esses pontos tem medida nula. Logo, essas funções são integráveis e suas integrais indefinidas são funções poligonais periódicas. Perceba que tais funções derivadas não são funções poligonais de acordo com a definição anterior. São *funções escada periódicas.* E assim temos uma maneira de definirmos tais funções através de uma única sentença, também. É claro, que podemos fazer de modo análogo ao que fizemos com as funções poligonais, *extensões periódicas de uma função escada*, tanto na forma par, como na forma ímpar. Aliás, isso pode ser feito para outras funções reais. A aplicação do "método de Fourier" usa esse recurso na resolução de certas equações diferenciais parciais [Iório, 2005]. Reveja, no capítulo 2, o conceito de função escada e de sua integral. Inicialmente, apresentaremos alguns exemplos ilustrativos dessas funções.

Exemplo-1

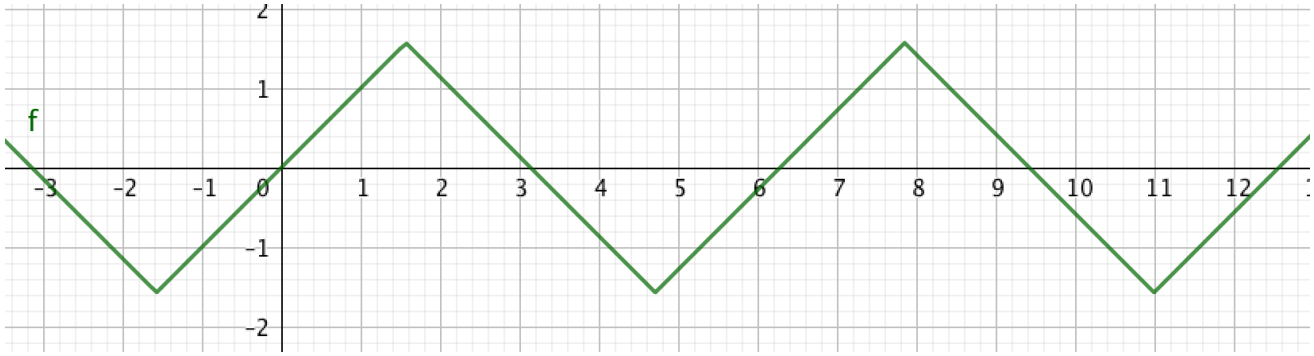
Considere as funções: $f: R \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = arcsen(senx)$; e $g: R \to [0, \pi]$ definida por $g(x) = arccos(cosx)$. Esbocemos os seus gráficos.

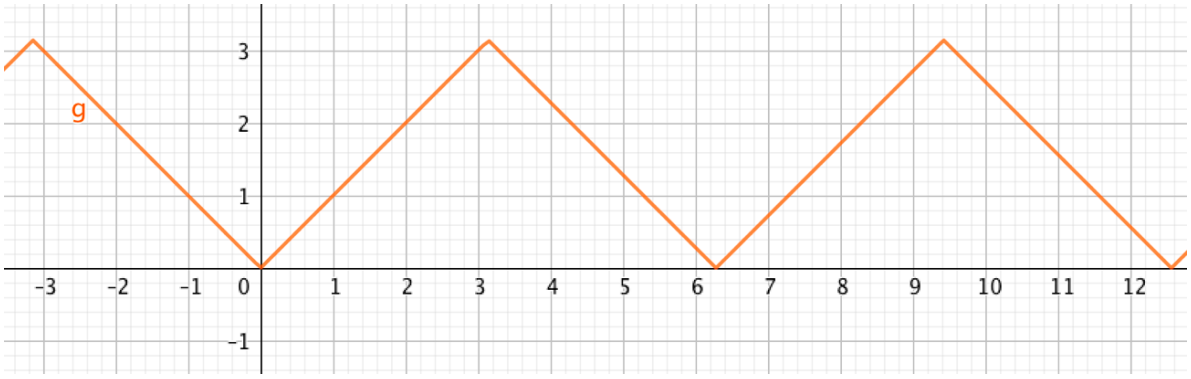
É fácil ver que f e g são periódicas de período 2π. Estudando f no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ e g no intervalo [0, 2π], concluímos:

$$f(x) = x, \text{ se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad f(x) = \pi - x, \text{ se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}];$$

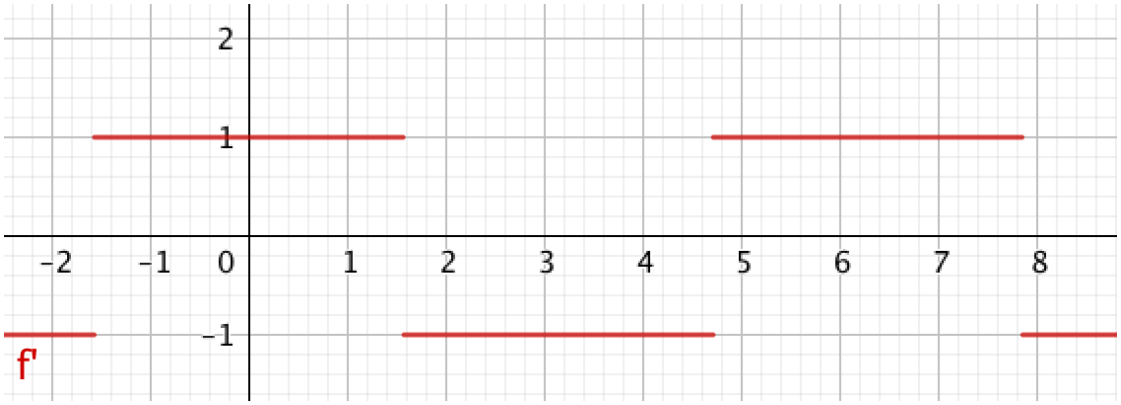
$$g(x) = x, \text{ se } x \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad g(x) = 2\pi - x, \text{ se } x \in [\pi, 2\pi].$$

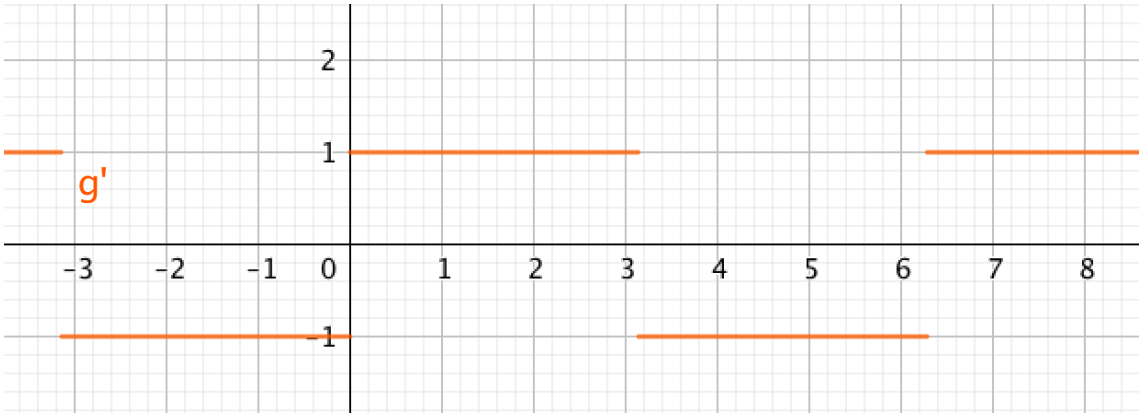
A seguir, com o uso do Geogebra, apresentamos os gráficos de f e g em intervalos respectivos, que incluam dois períodos. Observe que as ondas poligonais delas têm amplitudes fixas: a de f tem amplitude $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e a de g tem amplitude $[0, \pi]$.





A seguir, temos os gráficos de suas derivadas, que são funções escada periódicas.





Podemos fazer uma primeira generalização dessas funções para as formas

$$f(x) = K + A\,arcsen(senx) \text{ e } g(x) = K + B\,arccos(cosx).$$

Suas derivadas são: $f'(x) = \frac{A cosx}{\sqrt{1 - sen^2 x}}$, $\forall\, x \in R,\ x \neq n\pi$ e

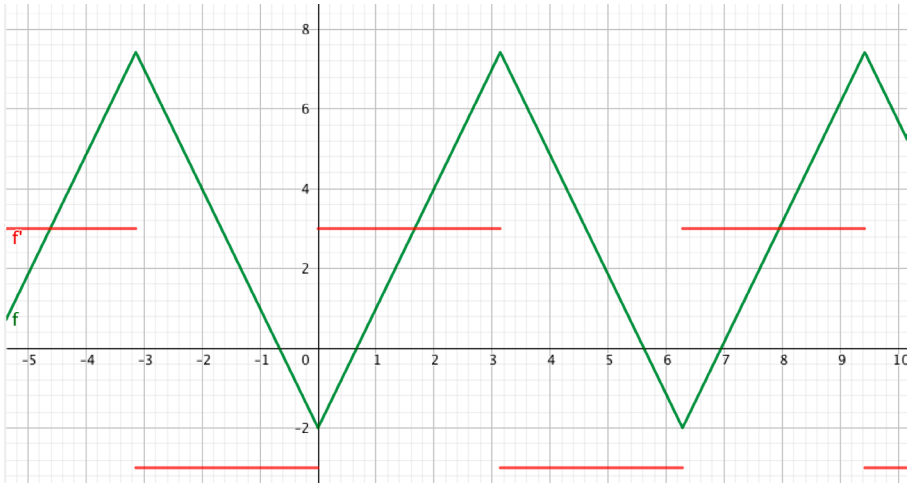
$$g'(x) = \frac{-B senx}{\sqrt{1 - cos^2 x}},\ \forall\, x \in R,\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\quad n \in Z.$$

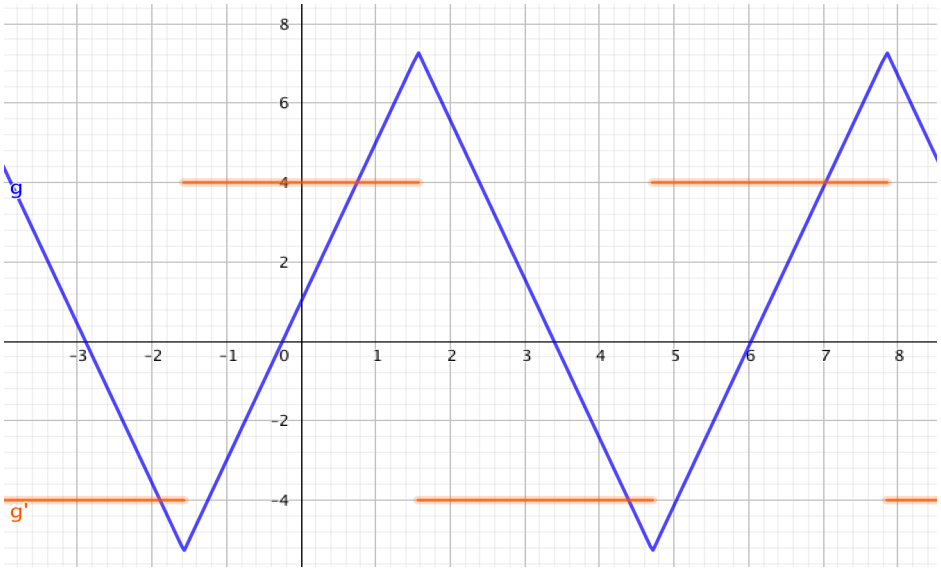
Com isso, obtemos translação vertical e aumento/redução de amplitude das ondas poligonais delas. O próximo exemplo mostra essas mudanças.

Exemplo-2

Esboçar os gráficos das funções reais f e g, bem como de suas derivadas, sabendo que $f(x) = -2 + 3arccos(cosx)$ e $g(x) = 1 + 4arcsen(senx)$.

Usando o Geogebra, obtemos:





Exemplo-3

Construir o gráfico da função real

$$f(x) = arccos(cosx) - arcsen(senx).$$

Como $cosx$ e $senx$ têm ambas domínio R, conjunto imagem [-1, 1] e período 2 π, então D(f) = R e seu período é 2 π. Vamos analisar o gráfico de f, inicialmente, no intervalo [0, 2 π]. Percebemos, pelas definições de *arc sen(y) e arc cos(y)*, que

$$arccos(cosx) = x, se\ x \in [0, \pi];\ arcsen(senx) = x, se\ x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}];\ \text{e}$$

$$\text{arcsen(y)} > 0 \Leftrightarrow y > 0 \text{ e arcsen(y)} < 0 \Leftrightarrow y < 0. \quad (*)$$

Logo, no intervalo **[0, $\frac{\pi}{2}$], temos que f(x) = x – x = 0.**

No intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, temos que $arccos(cosx) = \boldsymbol{x}$ e arcsen(senx) =

arcsen(sen$(\pi - x)$) = $\boldsymbol{\pi - x}$, pois x $\in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $senx \in$ [0, 1], o que satisfaz (*).

Logo, em **[$\frac{\pi}{2}$, π], f(x) = 2x - π.**

No intervalo $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, temos que $arccos(cosx) = arccos(cos(2\pi - x))$ = $\boldsymbol{2\pi - x}$ e $arcsen(senx) = arcsen(sen(\pi - x))$ = $\boldsymbol{\pi - x}$, pois x $\in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ => $2\pi - x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $cosx \in [-1, 0]; \pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e $senx \in$ [-1, 0], que satisfaz (*).

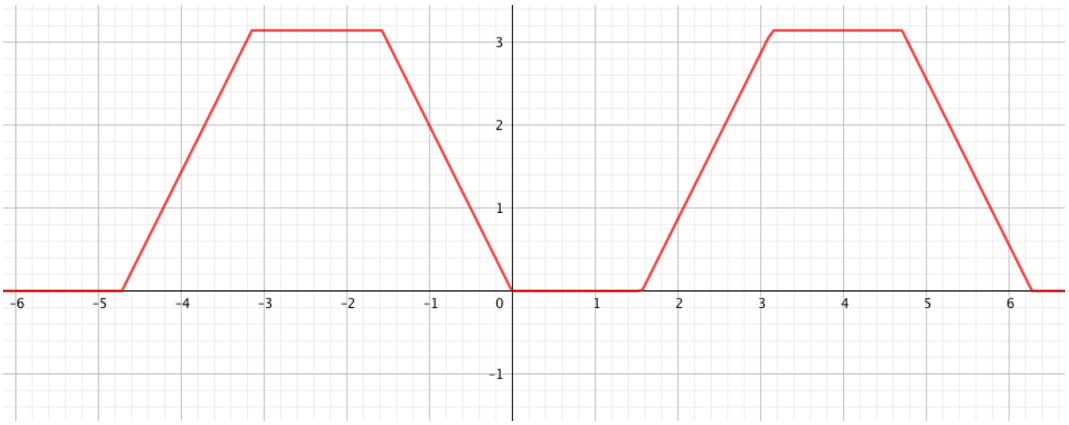
Logo, no intervalo **[π, $\frac{3\pi}{2}$], f(x) = π .**

No intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, temos que $arccos(cosx) = arccos(cos(2\pi - x)) = \boldsymbol{2\pi - x}$ e $arcsen(senx) = arcsen(sen(x - 2\pi))$ = **x – 2π**, pois x $\in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ => $2\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $cosx \in$ [0, 1]; x – $2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e $senx \in [-1, 0]$, que satisfaz (*).

Logo no intervalo **[$\frac{3\pi}{2}$, 2π], f(x) = $4\pi - 2x$.**

Concluímos, também, que Im(f) = [0, π].

A figura a seguir, tem o esboço do gráfico no intervalo [-2π, 2π].

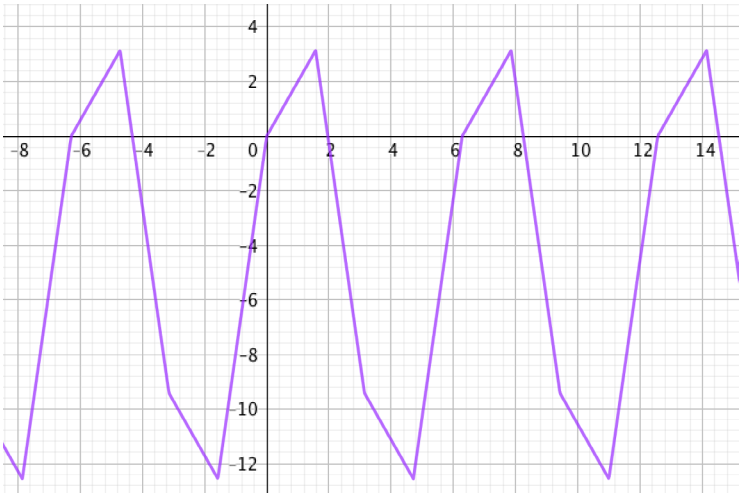


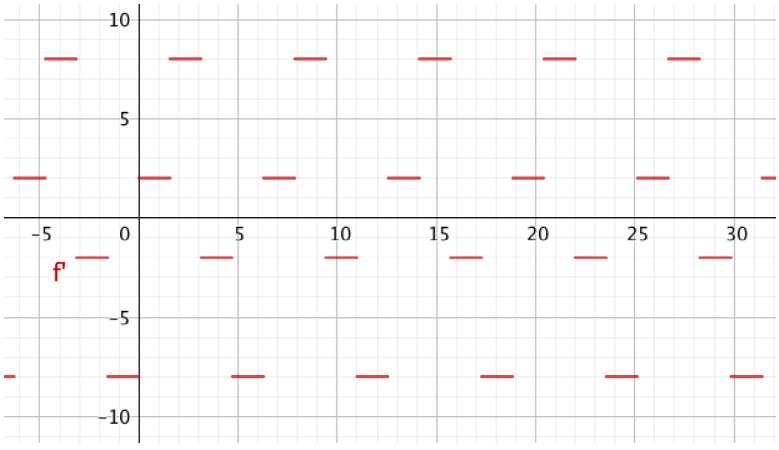
Obs.: Perceba que esta função é uma combinação linear das funções do exemplo-1.

Exemplo-3

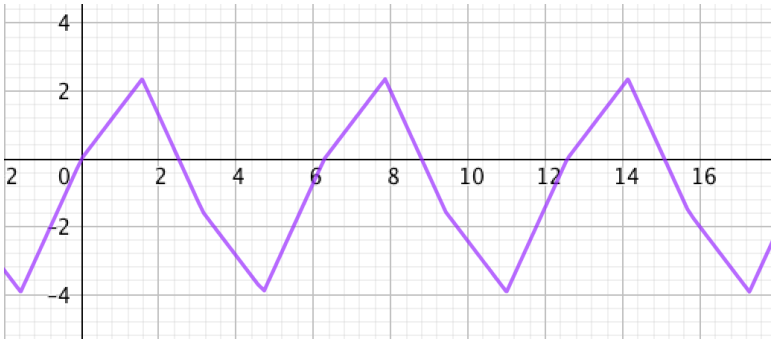
Usando o Geogebra, vamos agora construir os gráficos de funções que são pequenas variações da função do exemplo-2. Também construir o gráfico da derivada de f. São elas as seguintes:

$a)\ f(x) = 5arccos(cosx) - 3arcsen(senx).$





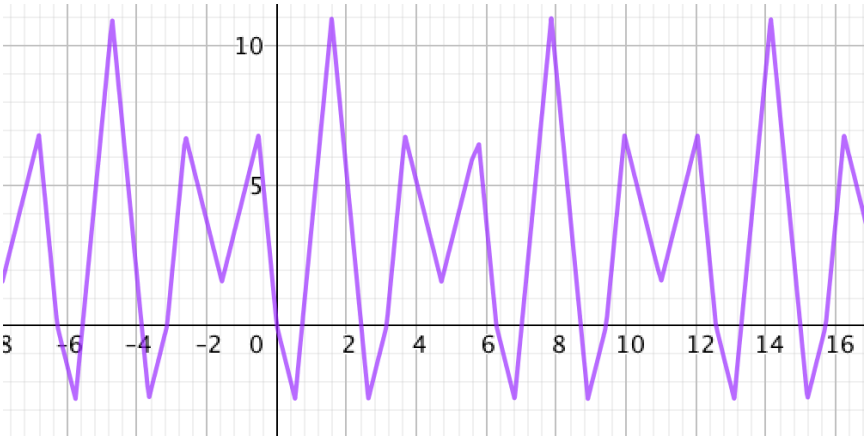
$b)\ g(x) = 2arccos(cosx) - \frac{1}{2}arcsen(senx).$



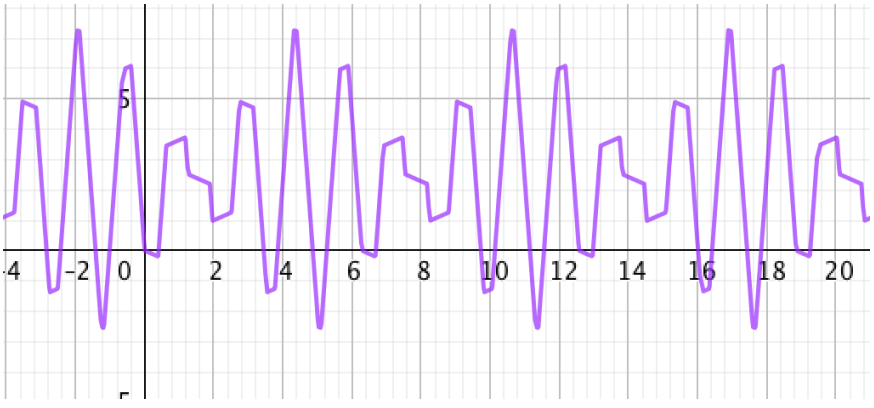
Exemplo-4

Usando o Geogebra, vamos construir os gráficos de 4 funções que são variações das funções do exemplo-2. Também construir o gráfico da derivada de h. São as seguintes:

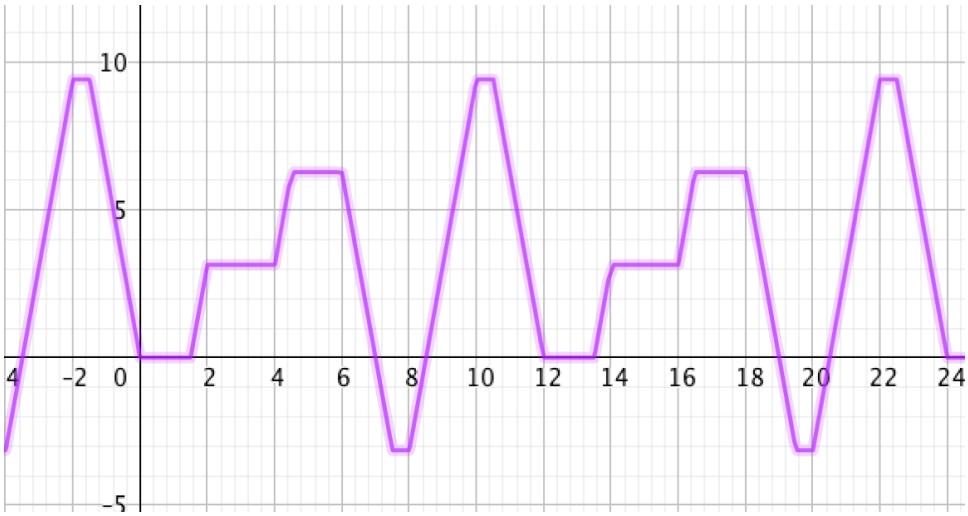
$a)\ f(x) = 2arccos(cos2x) - 3arcsen(sen3x).$



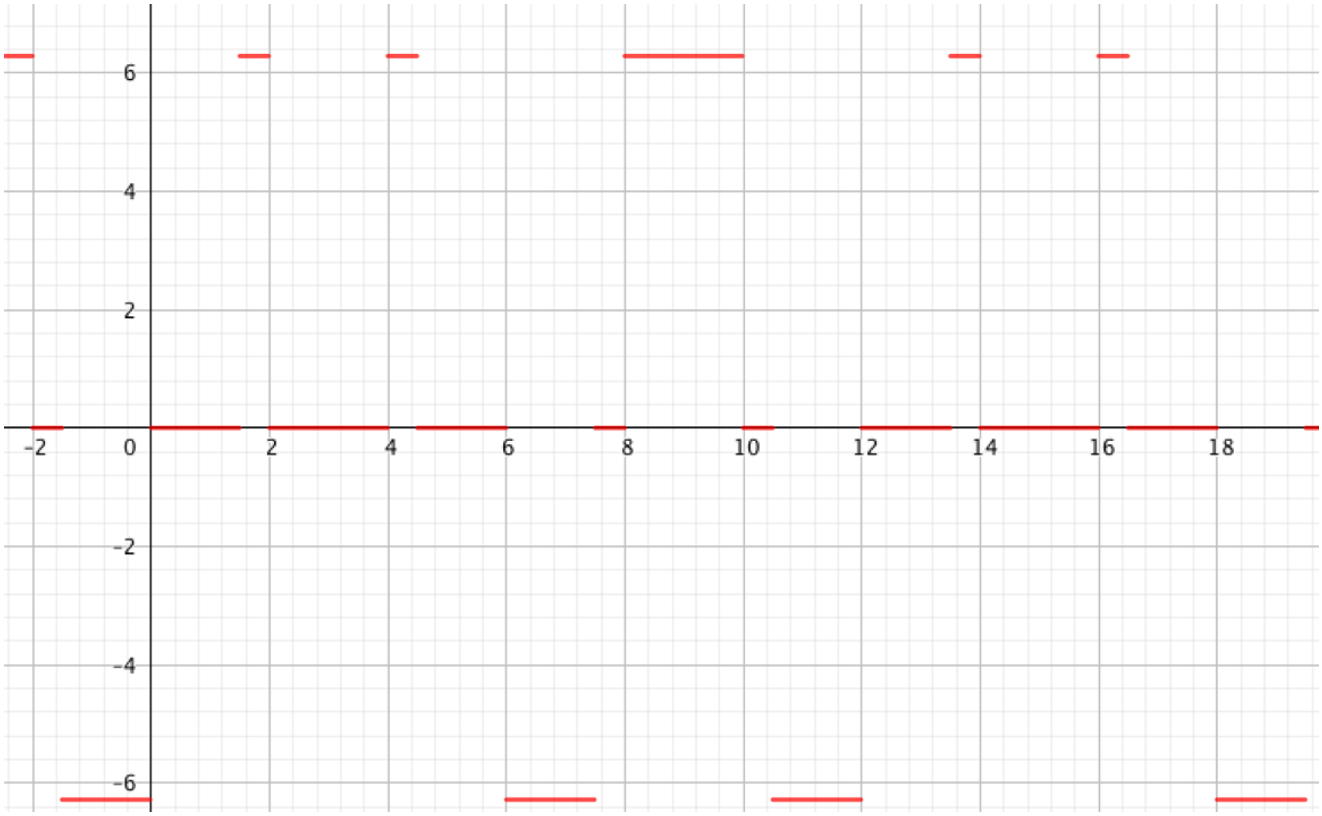
$b)\ g(x) = 2arccos(cos4x) - 3arcsen(sen3x).$



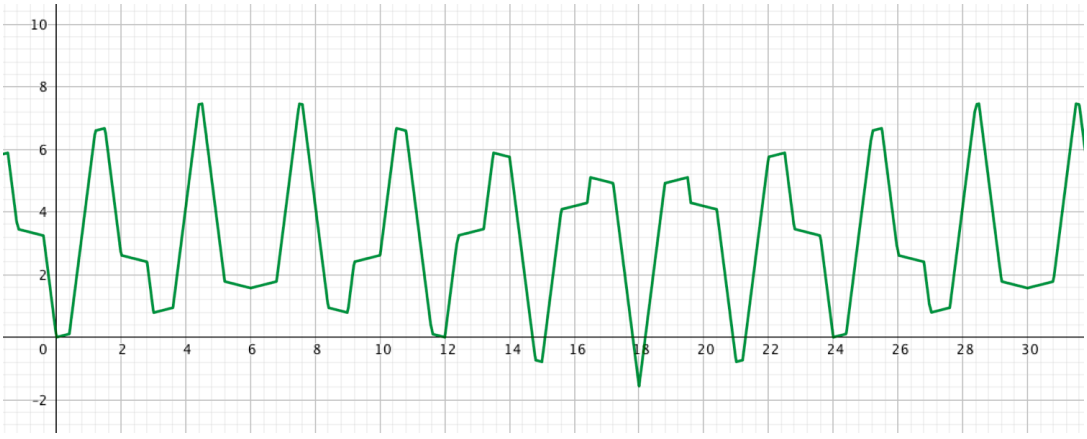
$c)\ h(x) = 2arccos(cos\frac{\pi x}{2}) - 3arcsen(sen\frac{\pi x}{3})$.



$$h'(x) = \sqrt{2}\ \pi\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{1-\cos(\pi x)}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)+1}}\right)$$



$d)\ j(x) = 2arccos(cos\frac{2\pi x}{3}) - 3arcsen(sen\frac{5\pi x}{4})$.



Observe que o período de h é 12, bem como de sua derivada. Verique, também, que o período de j é 24. Como se justifica? E qual é o período da função g?

Perceba pelos gráficos das funções dadas nos exemplos anteriores, que vários tipos de *funções poligonais periódicas trigonométricas* podem ser descritas por combinação linear de funções trigonométricas especiais. Ou seja, da forma $f(x) = A.arccos(cos(Cx)) + B.arcsen(sen(Dx))$, sendo A, B, C e D constantes reais e C/D racional.

Um teorema bem conhecido para o cálculo do período de uma variedade de funções deste tipo, apresentamos a seguir.

Teorema dos Períodos Comensuráveis:

"Sejam f: $R \to R$ e g: $R \to R$ funções periódicas de períodos p_1 e p_2, respectivamente. Se p_1 e p_2 são números reais comensuráveis, então a função f + g é periódica de período mmc(p_1, p_2)."

Vamos provar essa regra . Seja k = mmc(p_1, p_2). Então, p_1/p_2 = n/m, em que n/m é um racional na forma irredutível.

Logo,

$$k = mp_1 = np_2.\ \text{Seja } h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Então h(x + k) = f(x + k) + g(x + k) = f(x + mp_1) + g(n + np_2) = f(x) + g(x) = h(x), o que conclui a prova.

NOTA (O mmc de comensuráveis)

Dizemos que dois números reais não nulos, x e y, são **comensuráveis**, quando x/y é um número racional. E definimos o *Mínimo Múltiplo Comum* de x e y, indicado por mmc(x, y), assim: mmc(x, y) = $|mx| = |ny|$, em que n/m é a forma irredutível do racional x/y.

Uma consequência dessa definição é o seguinte teorema:

"Se $x = \frac{a}{b}$ *e* $y = \frac{c}{d}$ *são números racionais na forma irredutível, então vale a igualdade:*

$mmc\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)}$."

Vamos provar esse teorema para o caso de x e y positivos. Temos que x/y = $\frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'}$, em que $a' = \frac{a}{mdc(a,c)}$, $b' = \frac{b}{mdc(b,d)}$, $c' = \frac{c}{mdc(a,c)}$, $d' = \frac{d}{mdc(b,d)}$. Logo, $\frac{a'd'}{b'c'}$ é irredutível. Usando a definição acima, obtemos:

mmc(x, y) = x.b'c' = $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{mdc(b,d)} \cdot \frac{c}{mdc(a,c)} = \frac{mmc(a,c).mdc(a,c)}{mdc(b,d).mdc(a,c)} = \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)}$.

Perceba que essa última fórmula nos oferta um modo direto de calcular o período indicado na tese do Teorema dos Períodos Comensuráveis.

Obs.: Esse teorema pode ser estendido para o produto de funções periódicas. Mas em certos casos, o período calculado por ele não é o menor período da função. Por exemplo, consideremos a função h(x) = cos(2x). cos(5x). Seu período mínimo é 2π e é o valor encontrado pelo teorema. Por outro lado, a função g(x) = cos(2x).cos(3x).cos(5x/3) tem período 6π dado pelo teorema, mas seu período mínimo é 3π.

Use o Teorema dos Períodos Comensuráveis para calcular o período das funções citadas no exemplo-4 acima. A seguir, confirme os resultados observando os gráficos respectivos. Você deverá encontrar o seguinte: **a)** f → T = 2π ; **b)** g → T = 2π; **c)** h → T = 12; **d)** j → 24.

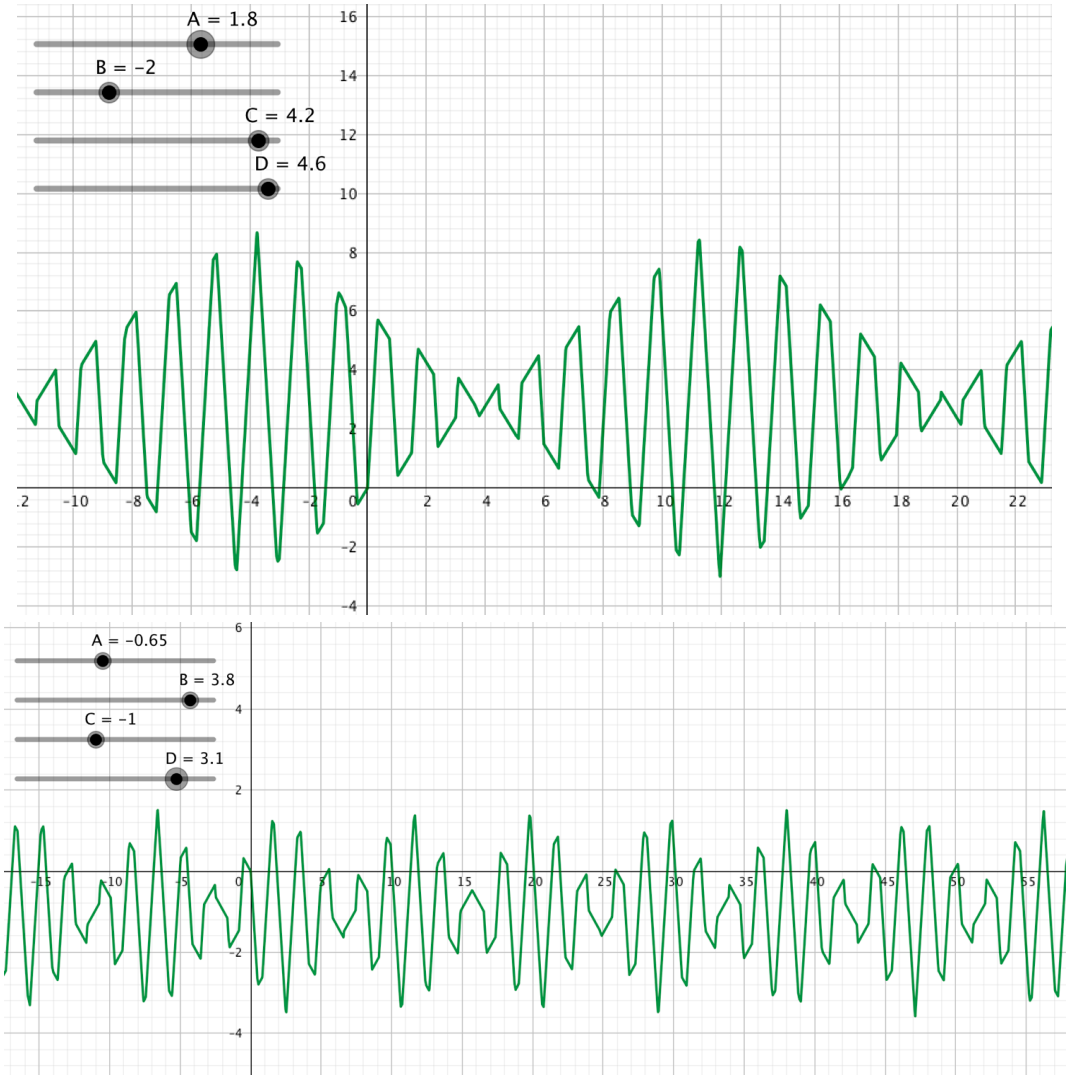
Usando o GeoGebra você poderá obter uma variedade de exemplos, principalmente criando os "controles deslizantes" de A, B , C e D e analisando diferentes combinações deles. Vale a pena conferir. Perceba a importância do uso da ferramenta digital Geogebra para se poder estudar de forma mais "natural" tais tipos de funções, usando as aproximações propiciadas pela variação dos valores dos coeficientes(controles). Cada vez mais precisamos encarar a mediação das TDIC como uma extensão da "caneta". Aliás, escrevemos em outra obra:

"Acreditamos que progressivamente a mediação tecno-simbólica com mais densidade de Inteligência Artificial, irá contribuir muito, se usada "humanamente", para um ambiente adequado de aprendizagem ativa, com Inteligência Aumentada à disposição de todos e todas, tornando "natural" o uso dela tanto quanto o uso de uma caneta para fazer uma anotação." [Fonteles, 2019].

Para ilustrar a variedade de gráficos a partir da variação dos parâmetros A, B, C e D, apresentamos a seguir os gráficos de duas funções, obtidos com o Geogebra.

1) $f(x) = 1{,}8.arccos(cos(4{,}2x)) + 2.arcsen(sen(4{,}6x))$.

2) $g(x) = -0{,}65.arccos\big(cos(3{,}8x)\big) - arcsen(sen(3{,}1x))$.



Verifique, usando o teorema dos períodos comensuráveis, que o período da função f, mostrada anteriormente, é 10 π. Confirme isso, observando o gráfico. De modo análogo, verifique que o período de g é 20 π.

Podemos ampliar mais ainda a família de funções poligonais periódicas, acrescentando uma função constante na fórmula anterior: $f(x) = K + A.arccos\big(cos(Cx)\big) + B.arcsen\big(sen(Dx)\big)$.

Por fim, podemos generalizar essa fórmula para a seguinte configuração:

$f(x) = K + A_1.arccos\big(cos(C_1x)\big) + \cdots + A_n.arccos\big(cos(C_nx)\big) + B_1.arcsen\big(sen(D_1x)\big) + \cdots + B_n.arcsen\big(sen(D_nx)\big)$, onde K, $A_i, B_i \in R$, i = 1, 2, ..., n e $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_n$ são comensuráveis.

Agora podemos considerar essa fórmula como a lei geral de uma função poligonal periódica trigonométrica real.

Dentro dessa grande família de funções poligonais periódicas trigonométricas, vamos destacar uma subfamília especial, que descreveremos a seguir.

POLINÔMIOS POLIGONAIS PERIÓDICOS

Denominaremos de *Polinômio poligonal periódico de ordem n* a uma função real $F : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ da forma

(I) $F(x) = a_0 + a_1 arccos(cosx) + a_2 \arccos(cos2x) + \ldots + a_n \arccos(cos\, nx) + b_1 arcsen(senx) + b_2 arcsen(sen2x) + \cdots + b_n arcsen(sen\, nx)$, com a_n e b_n não nulos simultaneamente.

Por exemplo, $f(x) = 2 + 3arccos(cosx) - 2arccos(cos3x) + arccos(cos7x)$ é um polinômio poligonal periódico de ordem 7. Os termos que não aparecem têm coeficientes nulos.

Perceba que $F(x)$ é uma combinação linear das 2n + 1 funções reais seguintes:

$$1,\ arccos(cosx), \arccos(cos2x), \ldots, \arccos(cos\, nx), arcsen(senx), arcsen(sen2x), \ldots, arcsen(sen\, nx). \quad \text{(I)}$$

Pode-se mostrar que essas funções reais são linearmente independentes.

Elas formam uma base de um subespaço de dimensão 2n + 1 de $C[a, b]$. *Perceba aqui a analogia com os polinômios trigonométricos das séries de Fourier, anteriormente mostrados. Observe que o período de qualquer um deles é também* 2π.

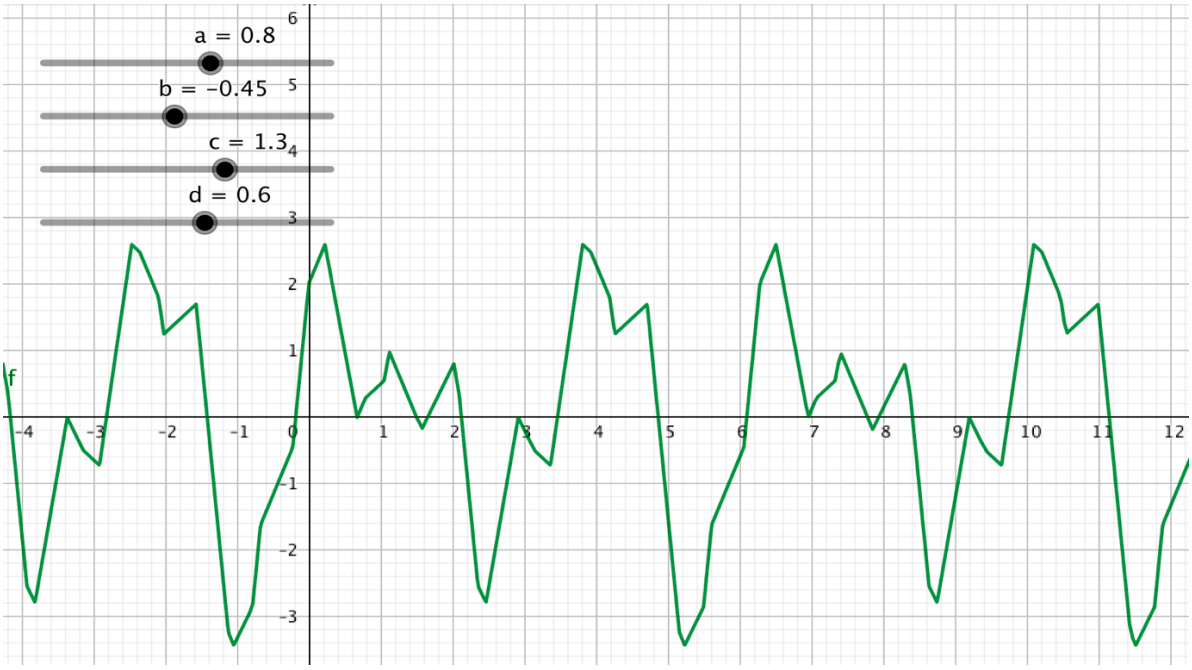
Veja a seguir o gráfico do Polinômio poligonal periódico de grau 7 definido pela função

$$f(x) = 2 - 2arccos\big(cos(3x)\big) + 3arccos\big(cos(4x)\big) + 2arcsen\big(sen(2x)\big) + 3arcsen\big(sen(7x)\big).$$



Usando o Geogebra podemos obter os gráficos de uma variedade de polinômios poligonais periódicos de uma dada ordem, fazendo a variação dos parâmetros(controles). A figura mostrada a seguir é uma ilustração disso usando a função anteriormente apresentada como referência padrão. Ou seja:

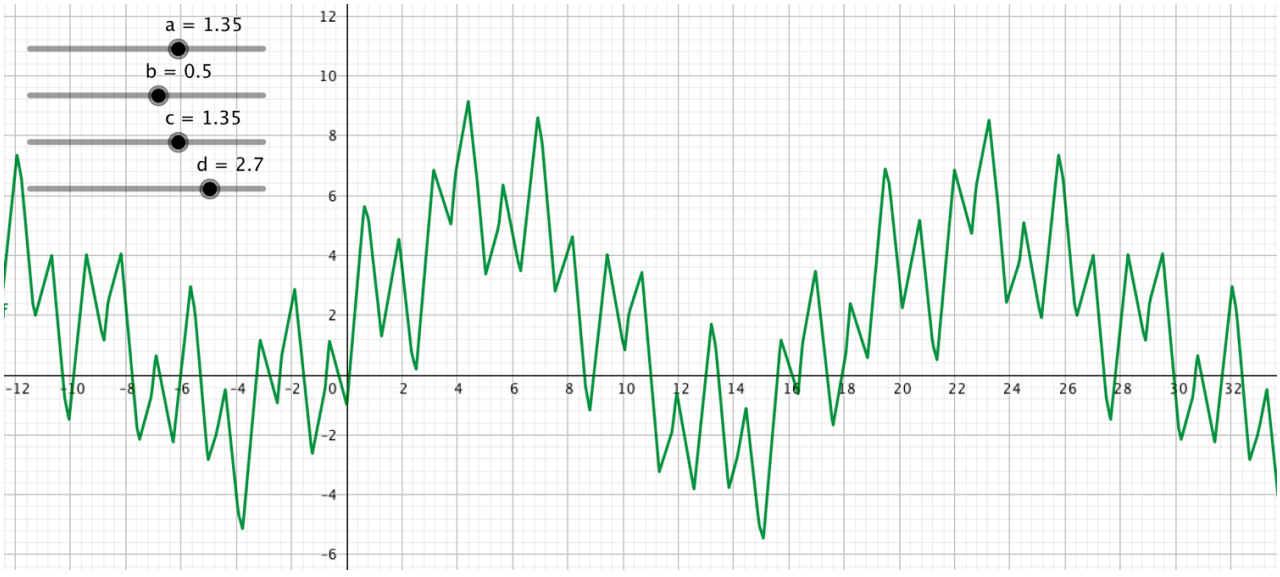
$$f(x) = 2 - a.arccos\big(cos(3x)\big) + b.arccos\big(cos(4x)\big) + c.arcsen\big(sen(2x)\big) + d.arcsen\big(sen(7x)\big).$$

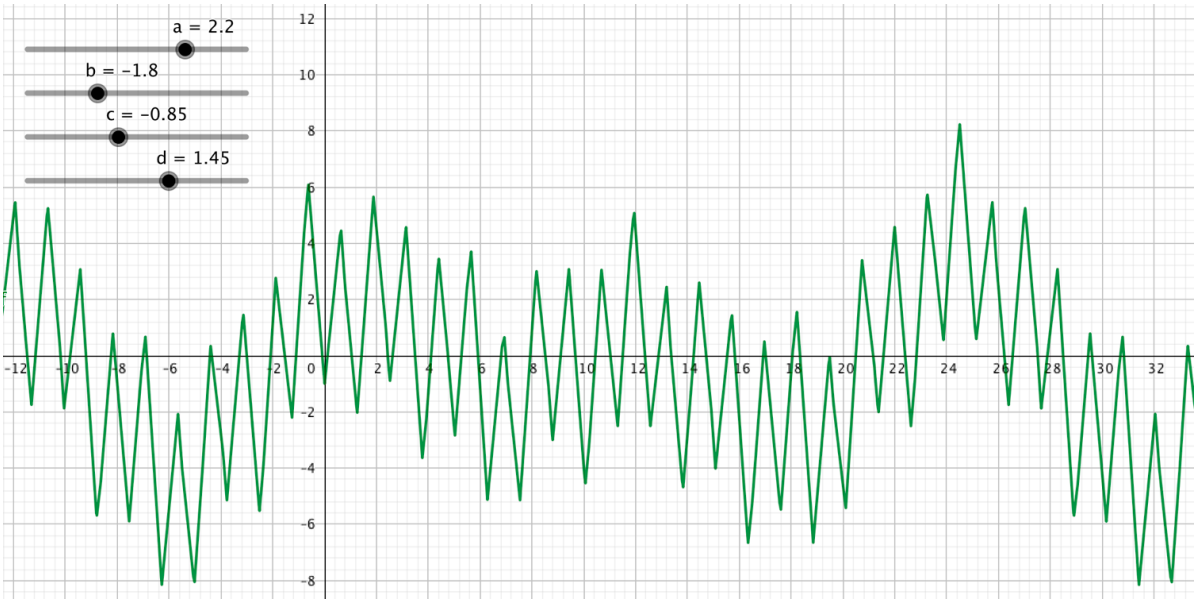


Podemos ampliar a família dos polinômios poligonais periódicos fazendo a inclusão das funções poligonais periódicas que têm a forma $\arccos(cos\ x/n)$ ou a forma $arcsen(sen\ x/n)$, com $n > 1$. Com essa ampliação, temos a possibilidade de construirmos funções de vários tipos de período. Por exemplo,

$$f(x) = -1 + a.arccos\big(cos(5x)\big) + b.arccos\big(cos(x/2)\big) + c.arcsen\big(sen(2x)\big) + d.arcsen\big(sen(x/3)\big).$$

Usando o Geogebra para valores escolhidos de a, b, c e d, obtemos os gráficos seguintes.





Verifique, como orientado anteriormente, que os períodos das duas funções, obtidas com variação dos coeficientes a, b, c e d da função genérica f , têm o mesmo valor: 12π.

Voltemos aos polinômios poligonais periódicos de ordem n, descritos. Vimos que eles formam um subespaço W, de dimensão 2n + 1, do espaço das funções contínuas *C*$[a, b]$. Esclarecendo que nesse caso o espaço *C*$[a, b]$ está dotado da norma $\|f\| = máx|f(x)|$. E com a $d(f, g) = máx|f(x) - g(x)|$ torna-se um espaço métrico completo. Por outro lado, se definirmos em $C[a, b]$ o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x).g(x)dx,$ W deixa de ser um subespaço de $C[a, b]$, pois o produto de dois polinômios poligonais periódicos, em geral, não resulta em um polinômio desse tipo. Essa é uma diferença importante em relação aos polinômios trigonométricos.

Álgebra dos semipolinômios periódicos

Podemos, no entanto, construir uma subálgebra da álgebra $C[a, b]$. Entenda o conceito de álgebra aqui como um espaço vetorial métrico $C[a, b]$ dotado do produto de funções $(f.g)(x)$ $f(x).g(x)$, para todo x de $[a, b]$. O produto goza das propriedades: associativa, da distributiva em relação à adição e da propriedade $k(f.g) = f(kg) = (kf).g$, onde k é um escalar qualquer. Neste sentido, o conjunto dos polinômios reais P$[0, 2\pi]$ e o conjunto dos polinômios trigonométricos reais definidos em $[0, 2\pi]$ são exemplos de subálgebras de $C[0, 2\pi]$. Deixamos subententida a norma do máximo(ou do supremo), da qual procede a métrica(distância). Assim, se incluirmos no subespaço W dos polinômios poligonais periódicos o produto $f(x).g(x)$, teremos uma subálgebra

de $C[a,b]$. Evidentemente, novos tipos de funções periódicas aparecem nessa álgebra que não são mais polinômios poligonais periódicos, mas suas novas formas gráficas são muito próximas das polinomiais. Vamos denominar tais funções contínuas de "**semipolinômios periódicos**". Com esse conceito estamos incluindo os polinômios poligonais periódicos trigonométricos como um subconjunto deles que tem o papel de " núcleo gerador" de toda a subálgebra $W[a,b]$. Um aspecto de beleza e simplicidade desses semipolinômios periódicos é serem definidos por uma "expressão fechada". Vejamos alguns exemplos deles com seus respectivos gráficos, obtidos com o Geogebra.

Exemplo-1:

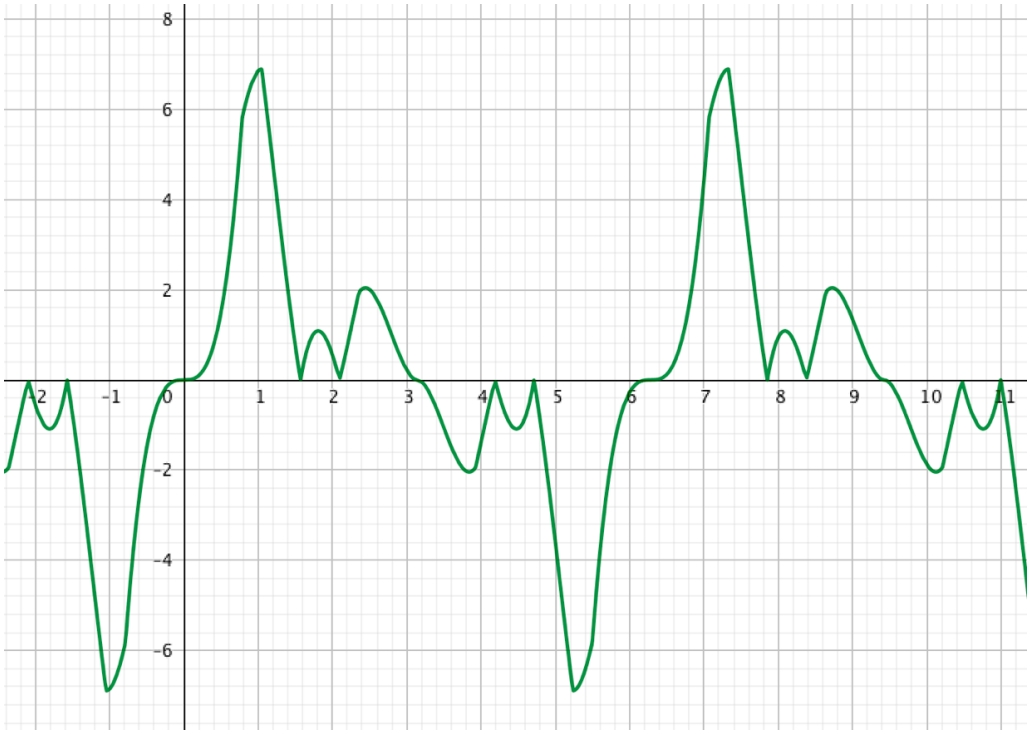
$$f(x) = arcsen(\,sen(x))(arcsen(sen(3x)))(arcsen(sen(5x))).$$

Observe seu gráfico a seguir. Verifique que o período é 2π.



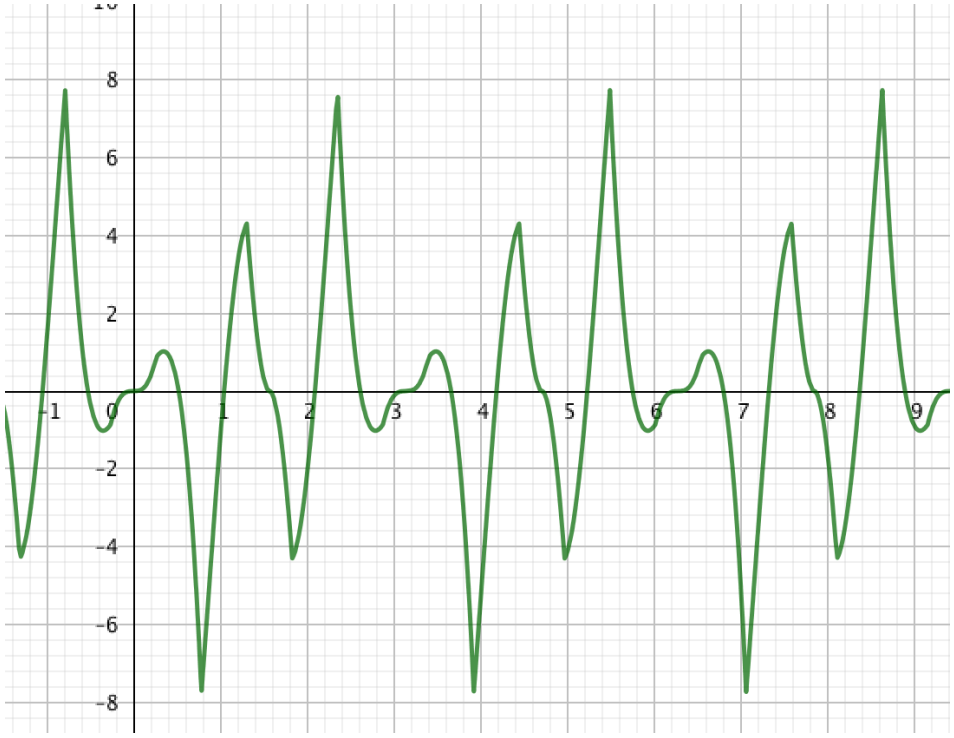
Exemplo-2:

$f(x) = arccos(cos(4x))(arccos(cos(3x)))(arcsen(sen(x)))$. Veja seu gráfico a seguir.



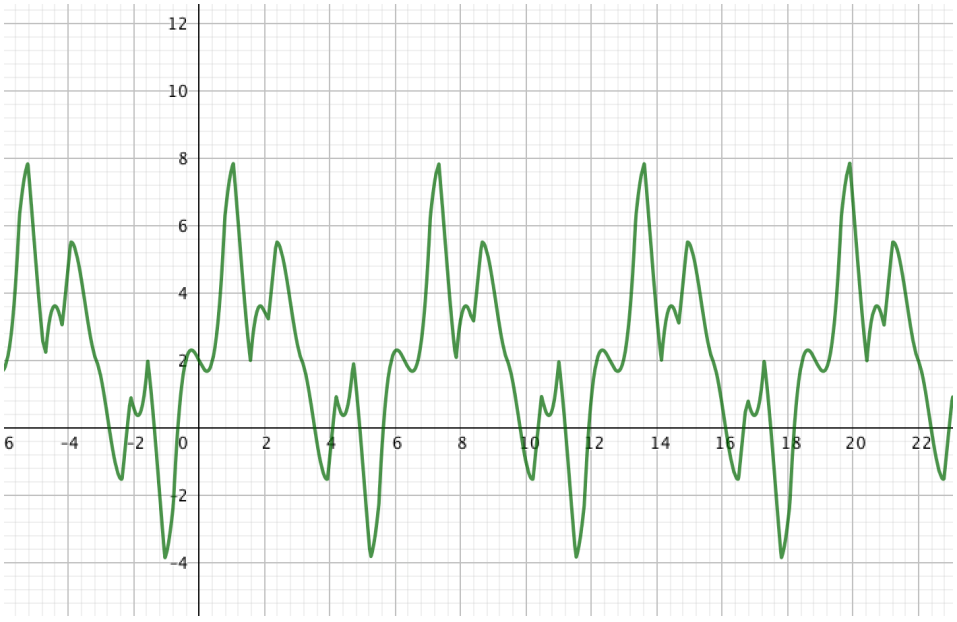
Exemplo-3:

$f(x) = arccos(cos(4x))(arccos(cos(3x)))(arcsen(sen(x)))$. Verifique que seu período é π, usando o teorema(estendido) dos períodos e observando o seu gráfico na figura a seguir.



Exemplo-4:

$$f(x) = arccos(cos(4x))(arccos(cos(3x)))(arcsen(sen(x))) - (arcsen(sen(2x))) + 2$$



Exemplo-5:

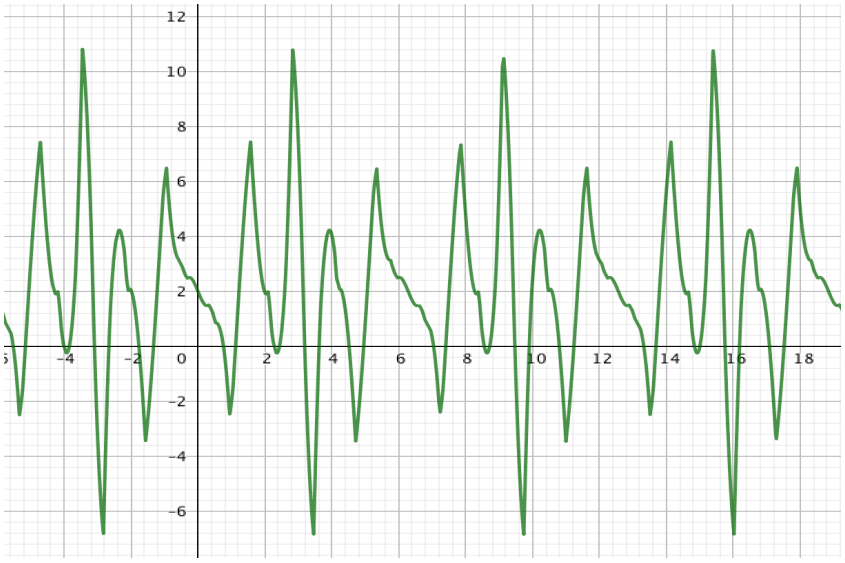
$$f(x) = -2 + (arccos(cos(3x)))(arccos(cos(43x))) - (arcsen(sen(29x)))(arcsen(sen(37x)))$$



Obs.: Perceba que os gráficos de funções desse tipo se aproximam do padrão dos fractais e, consequentemente, surge o problema da dimensão fractal deles. Reveja as noções sobre fractais dadas na introdução. Uma referência atualizada para se aprofundar sobre a matemática dos fractais e algumas de suas aplicações é [Falconer, 2014].

Exemplo-6:

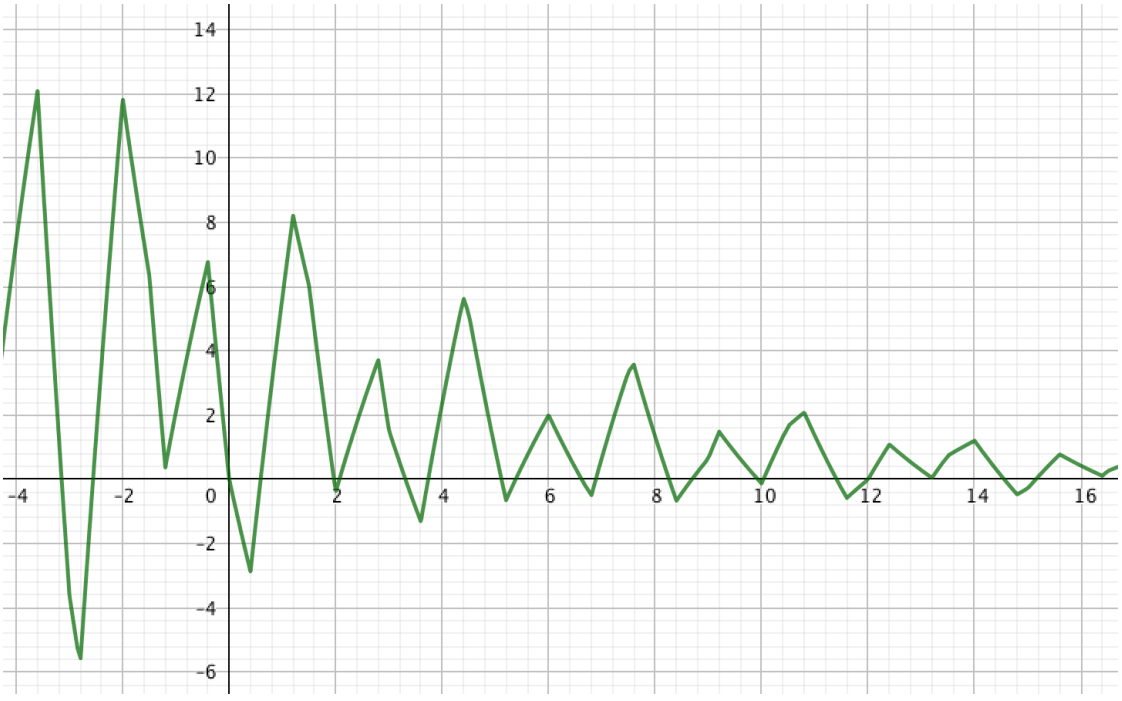
$$f(x) = arccos(cos(x))(arccos(cos(3x)))(arcsen(sen(5x))) - (arcsen(sen(3x))) + 2$$



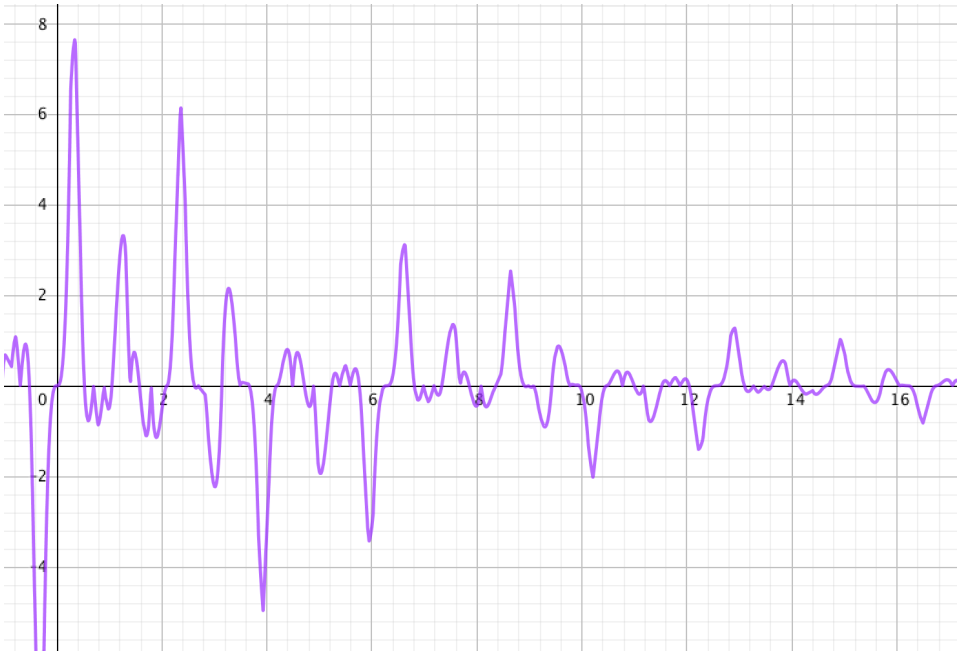
Também, à semelhança do que ocorre com as funções trigonométricas fundamentais, na descrição de movimentos oscilantes amortecidos, podemos formar novas funções, fazendo o produto das semipolinomiais periódicas com as funções exponenciais $g(x) = e^{-kx}$. Assim, por exemplo

$$L(x) = e^{-\frac{x}{7}}\left(2arccos\left(cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right) - 3arcsen\left(sen\left(\frac{5\pi x}{4}\right)\right)\right).$$

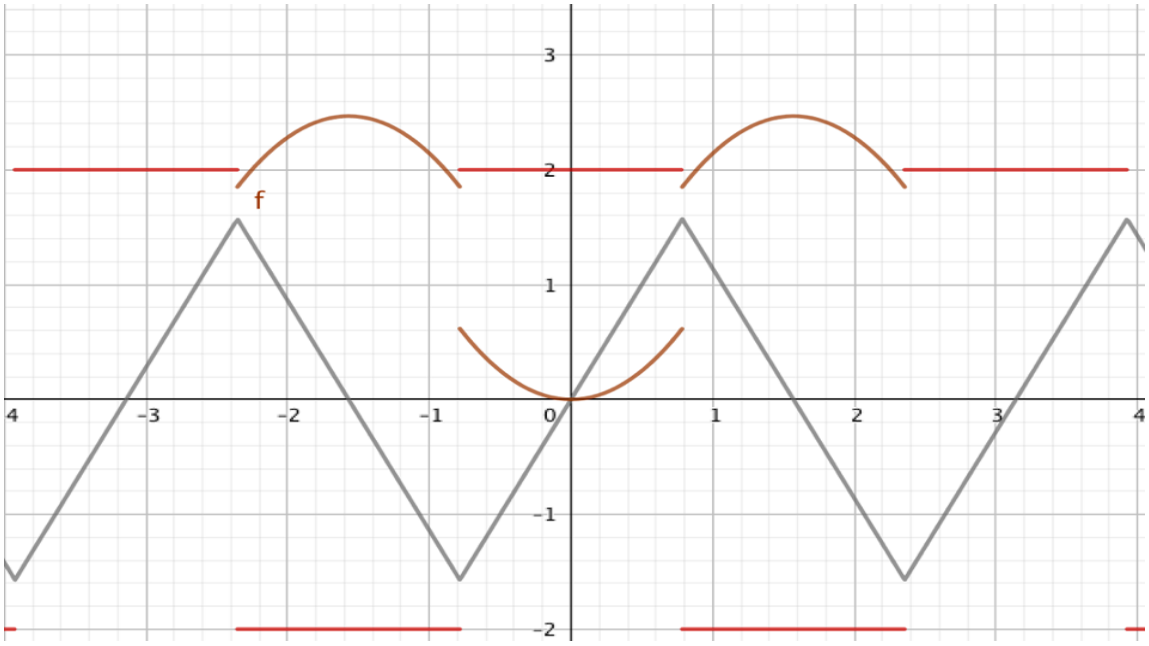
Seu gráfico tem o seguinte esboço:



Outro exemplo: $L(x) = e^{-\frac{x}{7}}$ (arccos(cos(9x)).arccos(cos(7x)).arcsen(sen(6x))). Veja o esboço do seu gráfico , a seguir.



Uma limitação dos algoritmos usados no Geogebra para traçar o gráfico de certas funções, surge, por exemplo, quando tentamos traçar o gráfico de uma primitiva de um polinômio poligonal periódico trigonométrico. Veja, a seguir, os gráfico construídos pelo Geogebra da derivada e da primitiva da função $h(x) = arcsen(sen2x)$.



Observe também as expressões dadas pelo Geogebra das regras que definem a primitiva(integral indefinida) f e a derivada h'. Perceba que a derivada tem o gráfico bem definido, enquanto que a primitiva não o tem.

Função

- $f(x) = (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x}{\pi} \right\rfloor} \left(-\pi x \left\lfloor \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x}{\pi} \right\rfloor + x^2 \right)$
- $h(x) = \text{arcsen}(\text{sen}(2x))$
- $h'(x) = (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x}{\pi} \right\rfloor} \cdot 2$

Número

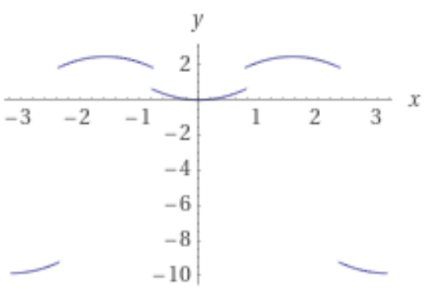
- $c_1 = 0$

Se aplicarmos o WolframAlpha, como mostra a figura a seguir, teremos expressões formais um pouco diferentes para as regras que definem f e h' e também teremos "falha" no esboço do gráfico da primitiva de h. Uma coisa que observa-se nesse aplicativo é o uso da técnica de integração por partes para obter a integral indefinida de h.

Indefinite integral:

$$\int \sin^{-1}(\sin(2x))\,dx = x\left(\sin^{-1}(\sin(2x)) - x\sqrt{\cos^2(2x)}\,\sec(2x)\right) + \text{constant}$$

Plots of the integral:



Percebemos diferenças entre os algoritmos usados pelos programas GeoGebra e WolframAlpha. As expressões da integral indefinida da função h revelam claramente isso. Esses resultados confirmam a importância do aprimoramento permanente dos métodos e teorias em uso e revelam também que essas funções não foram ainda bem estudadas. De fato, como dissemos antes, não encontramos um estudo sistemático sobre essas funções periódicas. Dissertamos um pouco sobre elas, mesmo sem uma referência bibliográfica, mais como um exercício da Teoria das Aproximações Multifárias, que é o objetivo central deste nosso trabalho.

Como dissemos na Introdução desta obra: *"Todo o conhecimento acumulado pela humanidade, ao longo dos séculos, é formado de redes de "Aproximações Multifárias" da Realidade Estudada, na qual estamos imersos. Essas "Aproximações Multifárias" sempre podem ser aprimoradas. E quanto mais aprimoradas elas forem, mais "precisos" deverão ou poderão ser os conhecimentos construídos e configurados a partir dessas novas aproximações. Por isso, estamos sempre aprimorando/inovando nossas práticas e métodos, questionando as teorias e modelos estabelecidos, reconstruindo o conhecimento acumulado e motivando o diálogo solidário/fraterno para o aprendizado mútuo."*

Outro aspecto a ser observado é que, por mais sofisticada que seja a tecnologia digital, com alta densidade de Inteligência Artificial/Aumentada, sempre terá insuficiências a serem corrigidas sob o comando inteligente dos humanos. Por isso, precisamos de leis claras regulamentando o seu uso para evitar a dominação manipuladora de que já falamos na introdução. Por outra margem, isso não deve nos inibir de democratizar seu uso humanizado por toda a sociedade, nas escolas e em todas as atividades possíveis das cidades em que moramos.

Por outro lado, a beleza, em sua multifacetada expressão, desempenha um papel fundamental em nossa experiência de vida, moldando nossas memórias mais significativas e enriquecendo nossa percepção do mundo. É imperativo que integremos esta dimensão estética em todos os aspectos do processo educacional, abrangendo todas as áreas do conhecimento e todos os níveis de ensino.

Esta universalidade da beleza nos convida a uma reflexão mais profunda sobre seu papel em nossas vidas. Para verdadeiramente apreender a beleza em sua forma mais profunda, é essencial buscar a plenitude em cada momento vivido. Isto requer uma expansão da gratuidade em nossas ações e experiências, a prática da pausa, meditação e contemplação reiterada sobre algo que

nos toca mais fundo. Precisamos cultivar uma abertura mental e físico-emocional para organizar e aprimorar nossas impressões e compreensões, permitindo um diálogo holístico entre o todo e as partes de nossas experiências. É através desta entrega total aos momentos de percepção da beleza que podemos experimentar epifanias onde o transcendente toca o imanente, o ilimitado se aproxima do limitado, o complexo se torna simples e o simples se torna complexo, nos levando a exclamar: que beleza, que maravilha! E não conseguimos ficar indiferentes quando percebemos a beleza! Trata-se do transcendente (o sublime, o admirável, o maravilhoso, o amor pleno se revelando) se manifestando na Realidade, em momento de totalidade e de integração plena! É também a nossa liberdade se expressando em sua plenitude humana, sem as travas internas/externas, em comunhão com o mais profundo da Realidade Universal percebida!

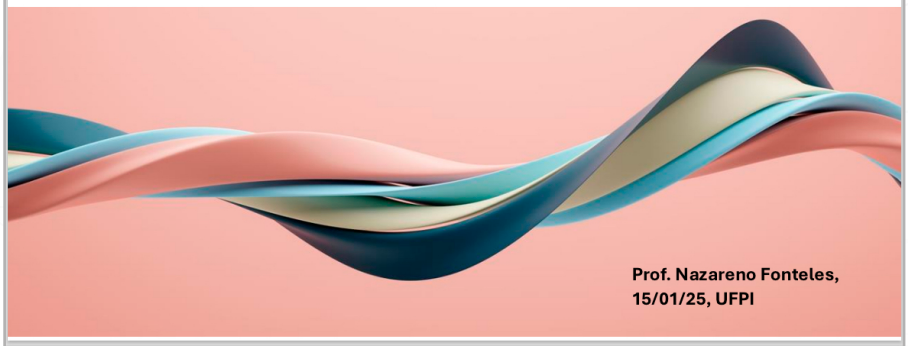
A experiência da beleza não é apenas um momento fugaz de prazer estético, mas um poderoso catalisador para a transformação pessoal e social. Quando nos abrimos verdadeiramente para a beleza, ela tem o potencial de expandir nossa consciência, refinar nossa sensibilidade, inspirar criatividade e inovação, promover a cura emocional e psicológica, expandir a inteligência e fomentar o diálogo e a conexão solidários com os outros e com o mundo ao nosso redor. Escreveu a filósofa e mística Simone Weil, irmã do genial matemático do século XX André Weil, o seguinte: “Quando a inteligência, depois de fazer silêncio para deixar o amor invadir toda a alma, volta a se exercitar, ela sente que contém mais luz do que antes, mais aptidão para compreender os objetos, as verdades que lhe são próprias. (...) A inteligência só pode reconhecer por experiência, *a posteriori,* as vantagens dessa subordinação ao amor. Ela não as pressente previamente”.

Finalizando este último capítulo, desejamos reafirmar que **viver é aprender** e completar essa frase assim: **Viver é aprender, mas melhor ainda, é aprender com o amor fraterno!** Precisamos, pois, neste momento histórico-cultural de baixa solidariedade nas ruas e nas redes sociais, nos dedicarmos com muito foco e atenção a expandir espaços multifários de aprendências do viver/conviver fraternal em todas as organizações em que participarmos, construindo e esboçando, no dia a dia, mas também nos planos de médio e longo prazos, aproximações cada vez melhores do **sonho de uma Sociedade Livre, Justa e Fraterna!**

APÊNDICE - I

A seguir estão os slides de uma palestra que ministrei em janeiro deste ano (2025) para os professores de Matemática da UFPI com o título: Aproximações Multifárias na Matemática.

APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS NA MATEMÁTICA

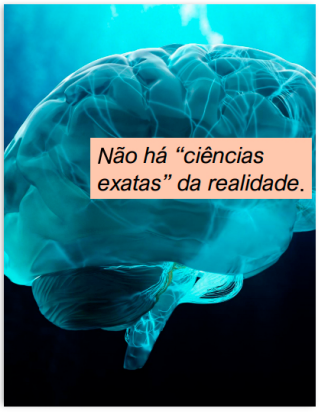


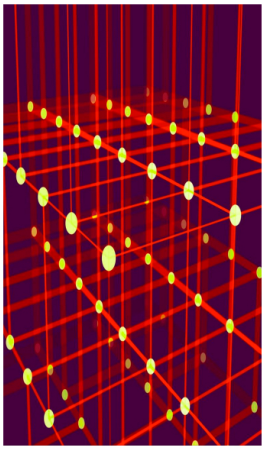
Prof. Nazareno Fonteles,
15/01/25, UFPI

Aproximações Multifárias

As Aproximações Multifárias revelam e expressam a "Configuração Fundamental", através da qual, os humanos pensam, sentem, agem e constroem o conhecimento da Realidade Estudada.

Todo o conhecimento acumulado pela humanidade, ao longo dos séculos, é formado de redes de "Aproximações Multifárias" da Realidade Estudada, na qual estamos imersos.





Aproximações Multifárias

Conceitos, modelos, teorias, palavras, metáforas, narrativas, analogias, processos, leis, mapas, diagramas, classificações, comparações, aplicações, padrões, métodos, adaptações, recorrências, transições, sequências, programas, algoritmos, linguagens e simbologias

↓ são

formas desenvolvidas pela humanidade do que denominamos de "aproximações multifárias" da Realidade Estudada.



APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS (TRAÇOS PRINCIPAIS)

1- FORMAS DIVERSAS

2- TRANSIÇÕES(Sequências e redes)

3- COMO APRENDEMOS (Teoria Epistemológica)

4- PRINCÍPIO HOLÍSTICO DE PASCAL APROXIMADO(PHPA)

5- APRIMORAMENTO SUCESSIVO NA BUSCA DA BELEZA*

PRINCÍPIO HOLÍSTICO DE PASCAL AMPLIADO(PHPA+)

PRINCÍPIO HOLÍSTICO DE PASCAL (PHP)

"Dado que todas as coisas são causadas e causantes, ajudadas e coadjuvantes, mediatas e imediatas, e todas se mantêm mutuamente por um laço natural e imperceptível que liga entre si as mais afastadas e diferentes, parece-me impossível conhecer as partes sem conhecer o todo, do mesmo modo que é impossível conhecer o todo sem conhecer particularmente as partes."

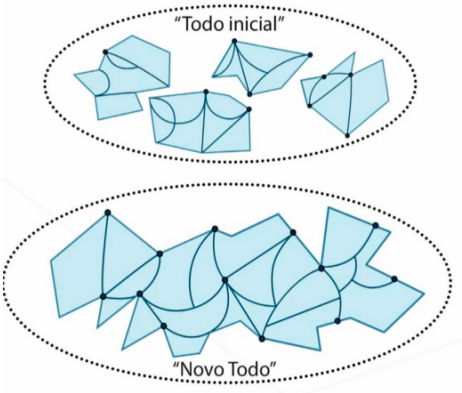
Princípio das Propriedades Emergentes(PPE):

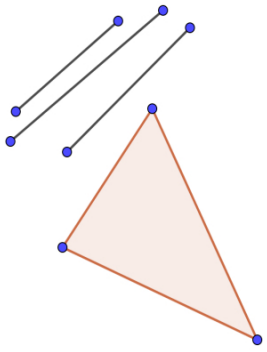
"Quando partes distintas do conhecimento se integram em um novo "todo", emergem novas propriedades."

Aproximações Multifárias(AM)

PHPA+ = PHP + AM + PPE

PHPA+ = PHP + AM + PPE

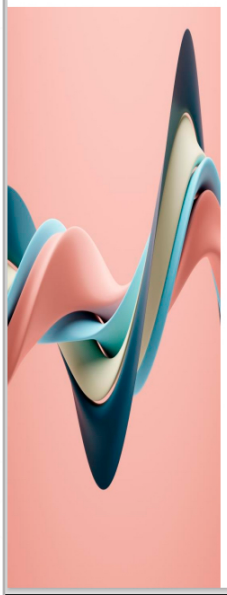




APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS MATEMÁTICA

- Aproximações por medidas, frações, decimais e arredondamentos.
- Aproximações numéricas: N, Z, Q, Q(), R, R[x], C = R(I), Zp, Zp(), etc.
- Aproximações poligonais de figuras curvas e funções;
- Aproximações por Sequências e Séries(Limites, derivadas e integrais);
- Aproximações por grupos, anéis, corpos e espaços.
- Aproximações por Álgebra Linear / Análise no Rn e Análise Funcional.
- Aproximações por Médias, desigualdades, convexidade e Otimização.
- Aproximações por Estatística, Computação e Ciência de Dados.
- Aproximações por Geometrias não euclidianas.
- Tecnologias de Aproximações: Algoritmos, IA, TDIC, WolfranAlpha, Geogebra, etc

Prof. Nazareno Fonteles



APROXIMAÇÕES INTEGRADORAS DA MATEMÁTICA

SEQUÊNCIAS

FATORAÇÕES

DESIGUALDADES

MÉDIAS

FRACTAIS

ALGORITMOS



Prof. Nazareno Fonteles

MÉDIAS E SUAS APROXIMAÇÕES

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \qquad MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

$$MH \le MG \le MA \le MQ$$

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \qquad MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

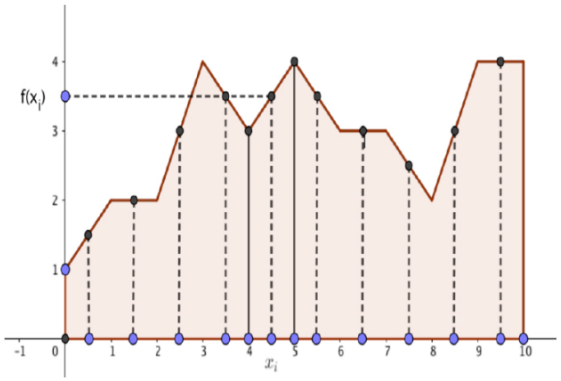
$$MP = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n ,$$

onde $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ e $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1.$

$$MPG = x_1^{t_1} . x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \le t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n = MPA$$

Prof. Nazareno Fonteles

MÉDIAS E SUAS APROXIMAÇÕES-(II)



$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

$$VM(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{(b-a)}{n}$$

Prof. Nazareno Fonteles

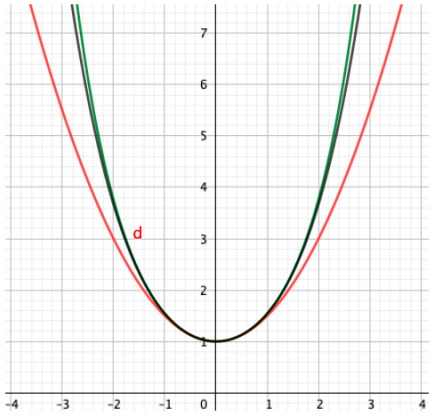
CATENÁRIA ↔ PARÁBOLA(2°) ↔ Polinômio(4°)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

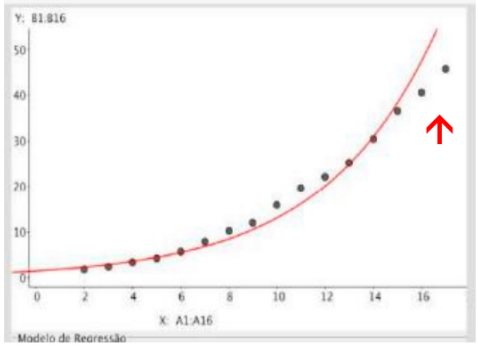
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

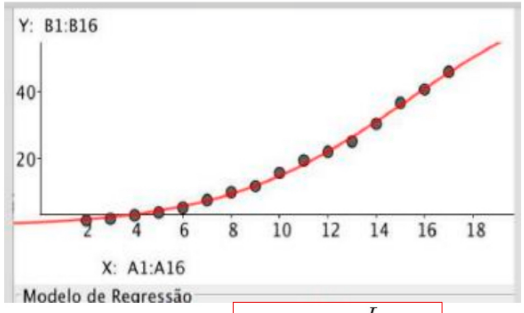
Aprox. Polinomial



Prof. Nazareno Fonteles

COMPARANDO MODELOS NA COVID-19:
EXPONENCIAL X LOGÍSTICA





$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}}$$

23/03/2020 a 30/04/2020 - Brasil

Prof. Nazareno Fonteles

FÓRMULA DE EULER (COMPLEXOS)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Daí se obtém:

$$e^{iy} = \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right)}_{} + \underbrace{i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)}_{}.$$

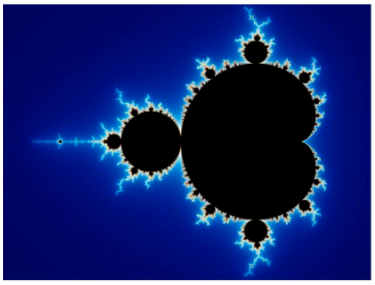
Logo $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$

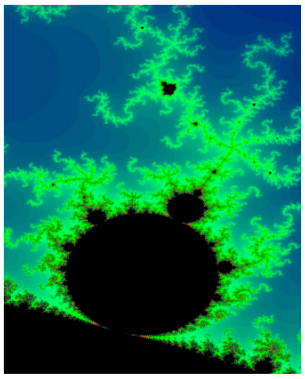
Segue da fórmula de Euler este resultado extraordinário, que relaciona numa única igualdade, os cinco números mais famosos da matemática:

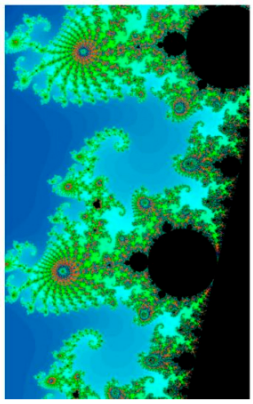
$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que é considerada por muitos como a mais bela fórmula da Matemática!

FRACTAIS: Mandelbrot e Julia







$$Z \rightarrow Z^2 + C$$

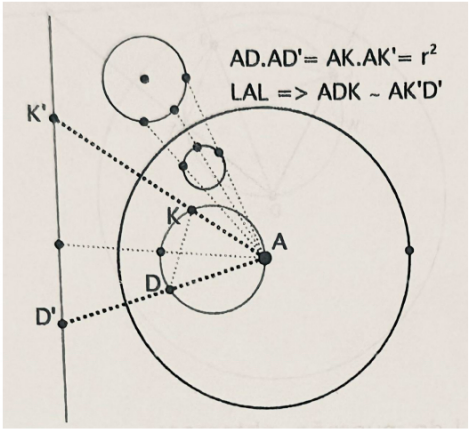
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

https://youtu.be/jm_Q1FO9bP4?si=IHK6WFZGvldHte1d

https://qrlogo.io/qr/578u8bpfm

https://www.dynamicmath.xyz/mandelbrot-julia/

INVERSÃO DE STEINER



No Plano C: (r = 1, A = O)

$$J(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

Ou $J(z) = \frac{1}{z},$

Caso especial de

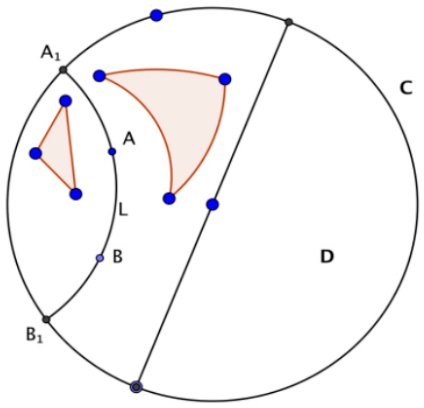
$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$$

⬇

Homografias(grupo - fog)

Prof. Nazareno Fonteles

INVERSÃO DE STEINER E DISCO DE POINCARÉ



Distância hiperbólica:

$d(A, B) = \left|\ln\left(\frac{\frac{AA_1}{AB_1}}{\frac{BA_1}{BB_1}}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{AA_1.BB_1}{AB_1.BA_1}\right)\right|$ onde AA_1, AB_1, BA_1 e BB_1 são distâncias euclidianas usuais, ln é o logaritmo neperiano e A1, B1, são pontos da fronteira C do disco D, conforme mostra a figura.

- As inversões euclidianas de D são isometrias hiperbólicas.

-"A **reflexão hiperbólica** de uma figura F do disco D em relação a uma "reta" L, equivale à inversão euclidiana de F em relação à circunferência que contém L."

Prof. Nazareno Fonteles

VOLUME DE UMA BOLA EM R^n

$$V_1(r) = 2r = rV_1(1)$$
$$V_2(r) = \pi r^2 = r^2V_2(1)$$
$$V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\pi}{3}r^3V_1(1)$$
$$V_4(r) = \frac{r^4}{2}r^4 = \frac{2\pi}{4}r^4V_2(1)$$

$$V_n(r) = \frac{2\pi}{n}r^nV_{n-2}(1). \quad (2)$$

$$V_n(r) = \frac{r^n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \quad (3)$$

$$V_\infty(r) = \lim_{n\to\infty} V_n(r) = 0. \quad (!!)$$



$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$

Recordemos algumas propriedades da função gama:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(2) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Obs.: $\lim_{n\to\infty} (a^n/n!) = 0.$

APÊNDICE - II

GUIA DE ESTUDO COM IA

1. Introdução: Sua Via das Aproximações Multifárias, Amplificada pela IA

Prezado(a) leitor(a),

Você tem em mãos uma obra que transcende a abordagem tradicional da matemática. “MATEMÁTICA INTERMEDIÁRIA: A VIA DAS APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS” é um convite a desvendar a beleza e o poder da matemática não como um conjunto de fatos isolados, mas como uma **ciência de aproximação**, onde o conhecimento é construído em camadas sucessivas de compreensão e interconexão como uma rede de aproximações.

Na era da Inteligência Artificial, onde máquinas como a DeepSeek R1 podem processar informações e realizar cálculos complexos em velocidades vertiginosas, o valor do seu pensamento crítico, da sua intuição e da sua capacidade de fazer conexões se torna ainda mais insubstituível. Este guia não visa transformar você em um mero “usuário de IA”, mas sim capacitá-lo a usar a IA como um **co-piloto inteligente** nesta fascinante jornada.

A IA pode:

- **Acelerar a verificação:** Confirmar seus resultados e demonstrações;
- **Clarificar conceitos:** Oferecer explicações alternativas e analogias;
- **Expandir a exploração:** Sugerir problemas adicionais e conexões interdisciplinares;
- **Visualizar o abstrato:** Gerar gráficos, simulações e representações que aprofundam a intuição.

Contudo, lembre-se sempre: a IA é uma ferramenta. A intuição, a criatividade, o senso crítico e a capacidade de apreciar a “beleza” da matemática são atributos intrinsecamente humanos. **Seu papel é o de mestre da sua aprendizagem, usando a IA para amplificar sua capacidade de pensar, de conectar e de aprofundar sua “Via das Aproximações Multifárias”.**

Este guia foi elaborado para ser flexível. Adapte-o ao seu ritmo, nível e estilo de aprendizagem, transformando cada seção do livro em uma oportunidade para um estudo mais rico e engajador.

2. Exemplos de Comandos para a IA na sua Jornada com “Matemática Intermediária: A Via das Aproximações Multifárias”

Este guia oferece sugestões de comandos (prompts) que você pode usar com IAs generativas (como a DeepSeek R1, GPT, Gemini, etc.) para potencializar seu estudo. Lembre-se: **a IA é sua ferramenta para aprofundar, não para pular etapas.**

I. Para a Compreensão Aprofundada de Conceitos

A "Via das Aproximações Multifárias" valoriza a intuição e a interconexão. Use a IA para visualizar, simplificar e contextualizar:

1. **Explorar a Intuição de um Conceito**
2. "Explique o conceito de [Sequência de Cauchy - Cap. I, p. 93] de forma intuitiva, como se estivesse conversando com alguém sem formação matemática avançada. Conecte sua explicação à ideia de 'aproximações sucessivas' que permeia este livro."
3. "Qual a intuição geométrica por trás do [Teorema do Valor Médio de Lagrange - Cap. II, p. 161]? Como ele se alinha à busca por 'aproximações lineares' que o livro menciona?"
4. **Clarificar Definições e Linguagem:**
5. "Reescreva a definição de [conjunto compacto - Cap. II, p. 134] de uma forma mais didática e com exemplos simples. Compare com a definição de [conjunto fechado]."
6. "No contexto da [integral de Lebesgue - Cap. VI, p. 625], explique a diferença entre 'função simples' e 'função escada', destacando a ideia de generalização e aproximação."
7. **Visualizar e Contextualizar:**
8. "Descreva uma analogia do dia a dia para o conceito de [Transformação de Möbius - Cap. IV, p. 402]. Como essa transformação se relaciona com as ideias de simetria e inversão?"
9. "Gere um pequeno cenário onde [polinômios simétricos - Cap. V, p. 498] são úteis para resolver um problema que não seria óbvio com métodos tradicionais."

II. Para a Resolução Inteligente de Problemas (Questões QF, QI, QT, QP)

A obra é rica em problemas desafiadores. Use a IA para guiar seu processo de resolução, verificar e explorar alternativas:

1. **Obter Dicas (Como uma DRN Ampliada):**
2. "Estou tentando resolver o Problema [QF-43 - Cap. I, p. 41] (volume máximo de caixa). Qual o primeiro passo *essencial* e que teorema (ou desigualdade) do Capítulo I devo considerar para otimizar, sem me dar a solução direta?"
3. "No Problema [QT-21 - Cap. III, p. 241] (hospital e ângulos de elevação), estou com dificuldade em montar as equações trigonométricas. Que lei da trigonometria seria mais útil e por quê?"
4. **Verificar Etapas Específicas ou Raciocínios:**
5. "Minha abordagem para o Problema [QI-12.E - Cap. IV, p. 374] sobre a transformação da área de um triângulo é [descreva sua ideia ou cole um trecho da sua solução]. Este raciocínio está correto ou há uma falha lógica?"

6. “No Problema [QP-15 - Cap. V, p. 496] (polinômio com raiz imaginária), minha primeira raiz que encontrei é [sua raiz]. Poderia confirmar se esta é uma das raízes e qual o próximo passo para encontrar as demais, considerando as propriedades dos polinômios de coeficientes reais?”

7. **Explorar Métodos Alternativos:**

8. “Para o Problema [QT-47 - Cap. III, p. 254] (quadrilátero de área máxima), o livro sugere dois caminhos. Poderia me explicar as vantagens e desvantagens de cada um, e se existe uma terceira abordagem ‘moderna’ que a IA poderia sugerir?”

9. “Resolvi o Problema [QP-114 - Cap. V, p. 549] sobre as médias ponderadas. Poderia me mostrar uma prova alternativa, talvez usando um método diferente daquele baseado em convexidade, se houver?”

10. **Simular o Pensamento de um Matemático Experiente:**

11. “Se você fosse um matemático experiente, ao ver o Problema [QF-59 - Cap. I, p. 51] (equação diofantina com primo), qual seria sua primeira ‘intuição’ para abordá-lo?”

12. “Analise a ‘beleza’ da solução do Problema [QI-52 - Cap. IV, p. 419] (soma de raízes cúbicas da unidade). O que a torna elegante ou surpreendente?”

III. Para a Revisão e Consolidação do Conhecimento

Use a IA para criar desafios e reforçar sua “Via das Aproximações Multifárias”:

1. **Gerar Quizzes e Desafios Personalizados:**

2. “Crie um quiz de 5 perguntas de múltipla escolha sobre o [Capítulo II] (Exponenciais, Logaritmos e Aproximações), com foco em ‘funções contínuas’ e ‘integráis impróprias’. Inclua as respostas e uma breve explicação para cada uma.”

3. “Formule um problema original que exija a aplicação conjunta de [desigualdade de Cauchy-Schwarz - Cap. III, p. 260] e [raízes da unidade - Cap. IV, p. 408].”

4. **Criar Mapas Mentais e Conexões (Textuais/Digitais):**

5. “Gere um ‘mapa mental textual’ ou uma lista hierárquica das conexões entre o conceito de [espaço vetorial - Cap. III, p. 269] e [funções analíticas - Cap. V, p. 529], destacando como a ‘aproximação’ aparece em cada transição.”

6. “Explique como o [Teorema Fundamental da Álgebra - Cap. V, p. 484] é uma ‘aproximação final’ na jornada de entender as raízes dos polinômios, partindo de raízes reais até complexas.”

7. **Revisitar Conceitos da “Via das Aproximações Multifárias”:**

8. “Com base no [Capítulo VI], como as ‘aproximações multifárias’ se manifestam na [otimização de funções de várias variáveis] e na [análise de séries de Fourier]? Dê exemplos de como a IA utiliza essas aproximações.”

9. “Explique a afirmação do livro de que ‘a matemática é também uma ciência da aproximação’ usando exemplos concretos dos capítulos já estudados.”

IV. Para Expansão e Reflexão Crítica (A IA como ‘Provocador’)

Incentive o leitor a ir além do conteúdo do livro e a pensar criticamente sobre a IA:

1. **Explorar Aplicações Reais e Limitações da IA:**
2. “Quais os desafios matemáticos ainda não resolvidos que a IA está tentando abordar no campo da [física de partículas/modelagem climática]?”
3. “Discuta um caso onde a ‘exatidão’ matemática de um modelo de IA pode levar a vieses ou problemas éticos, usando a reflexão de [Cathy O’Neil - Cap. V, p. 578].”
4. **Gerar Novas Questões e Hipóteses:**
5. “Formule uma hipótese sobre uma possível conexão entre [fractais - Introdução, p. 8] e [Teoria dos Números - Cap. IV, p. 413] que este livro não explorou em detalhe.”
6. “Se a IA pode gerar novas provas matemáticas, qual o papel do matemático humano na validação e na busca pela ‘beleza’ dessas provas?”
7. **Simular Diálogos Filosóficos:**
8. “Simule um debate entre [David Bohm - Cap. V, p. 579] e um defensor da IA forte sobre a natureza da ‘realidade’ e o papel dos ‘modelos’ na compreensão do universo.”
9. “Como a ‘inteligência senciente’ de [Zubiri - Cap. V, p. 579] se relaciona com as capacidades das IAs atuais e futuras?”

3. Atividades Práticas: Livro + IA na Via das Aproximações

Estas atividades incentivam o uso ativo da IA para explorar, visualizar, verificar e conectar conceitos.

Princípio de Ouro: Antes de usar a IA, tente resolver ou compreender o problema/conceito por conta própria. Use a IA como um copiloto para refinar seu entendimento ou para destravá-lo, não como um substituto do pensamento.

Atividade 1: Desvendando Desigualdades com IA (Capítulo I)

- **Comando IA (Dica):** “Estou resolvendo o problema [QF-15 - p. 33] (Desigualdade MA ≥ MG). Qual a ‘aproximação’ geométrica mais simples que posso fazer para visualizar essa desigualdade para dois números? Peça à IA para gerar um gráfico ou diagrama que ilustre isso.”
- **Comando IA (Exploração):** “O livro menciona que a desigualdade MA ≥ MG (p. 36) pode ser generalizada para n termos. Peça à IA para explicar como a ‘convexidade’ de uma função (conceito introduzido no Cap. V) pode ser usada para provar essa generalização. Compare com a prova do livro.”
- **Comando IA (Verificação):** “Minha solução para o Problema [QF-27 - p. 35] ([a + b] [b + c] [c + a] ≥ 8abc) utiliza a MA ≥ MG. Peça à IA para verificar a prova e identificar se há alguma ‘aproximação’ ou simplificação que eu possa ter perdido.”

Atividade 2: Modelando o Mundo com Funções (Capítulo II)

- **Comando IA (Visualização):** “O livro (p. 132) discute a ‘continuidade’ de funções. Use o GeoGebra (via IA) para traçar o gráfico de [f (x) = x . sen(1/x) para $x \neq 0$ e f (0) = 0]. Peça à IA para explicar por que esta função é contínua em x = 0, mesmo com as oscilações, conectando com a ‘ideia de vizinhança’ nas aproximações de limite.”
- **Comando IA (Análise de Modelo):** “No exemplo da COVID-19 (p. 215), o livro compara modelos exponencial e logístico. Peça à IA para gerar um pequeno conjunto de ‘dados simulados’ de crescimento populacional que se ‘aproxime’ melhor de um modelo logístico do que de um exponencial. Em seguida, peça à IA para plotar ambos os modelos sobre esses dados para comparação.”
- **Comando IA (Aplicações):** “Pesquise uma aplicação real de [funções hiperbólicas - p. 183] (além de catenárias e redes neurais). Peça à IA para descrever o fenômeno e como a função hiperbólica o ‘aproxima’.”

Atividade 3: A Geometria por Trás dos Números (Capítulo III)

- **Comando IA (Interpretação Geométrica):** “O Problema [QT-65 - p. 286] (Teorema de Napoleão) é sobre um triângulo equilátero construído a partir de baricentros. Peça à IA para gerar uma representação visual (ou instruções detalhadas para o GeoGebra) do Teorema de Napoleão. Como a ‘aproximação’ dos baricentros cria uma nova estrutura geométrica regular?”
- **Comando IA (Comparação de Métodos):** “A [Desigualdade de Erdős-Mordell - p. 258] é provada no livro usando MA ≥ MG. Peça à IA para explicar se essa desigualdade poderia ser provada usando conceitos de ‘Espaços Vetoriais’ (p. 269), como a ‘projeção ortogonal’. Se sim, qual seria a intuição por trás dessa ‘aproximação’?”

- **Comando IA (Exploração de Espaços):** “O livro (p. 361) menciona a ‘Geometria do Mundo Pequeno’. Peça à IA para descrever como a distância em uma rede (um tipo de ‘espaço métrico’) é uma ‘aproximação’ para o custo de conexão. Peça exemplos de como isso se aplica a ‘redes sociais’ ou ‘redes de transporte’.”

Atividade 4: A Potência dos Complexos (Capítulo IV)

- **Comando IA (Conexões Interdisciplinares):** “A [Fórmula de Euler - p. 370] é considerada uma das mais belas da matemática. Peça à IA para gerar uma visualização animada que mostre a relação entre a função exponencial complexa e o círculo unitário no plano complexo. Como essa ‘aproximação’ visual une conceitos aparentemente distintos de álgebra, geometria e cálculo?”
- **Comando IA (Exploração Geométrica com IA):** “A [Inversão de Steiner - p. 391] e as [Transformações de Möbius - p. 402] são poderosas ferramentas geométricas. Peça à IA para descrever como usar o GeoGebra para simular uma inversão e mostrar como ela transforma uma linha reta que *não* passa pelo centro de inversão em um círculo. Isso ilustra a ideia de ‘aproximar’ uma forma simples (reta) por uma complexa (círculo) via transformação.”
- **Comando IA (Propriedades e Desafios):** “O Problema [QI-43 - p. 419] discute pontos com distância racional em um círculo. Peça à IA para discutir a dificuldade de encontrar esses pontos e como a ‘densidade’ dos números racionais (Cap. I) se relaciona com essa questão.”

Atividade 5: Polinômios como Blocos de Construção (Capítulo V)

- **Comando IA (Aproximação de Funções):** “O [Polinômio de Taylor - p. 466] ‘aproxima’ funções. Peça à IA para gerar as séries de Taylor de [sen(x)] de ordem 1, 3 e 5 e pilotá-las juntas no GeoGebra. Observe como as ‘aproximações’ polinomiais melhoram com o aumento da ordem. Qual a intuição por trás de usar polinômios para ‘modelar’ funções mais complexas?”
- **Comando IA (Exploração de Raízes):** “No [Método de Newton de aproximação de raízes - p. 574], como a ‘linearização’ da função (tangente) nos ajuda a encontrar uma ‘melhor aproximação’ para a raiz? Peça à IA para simular 3 iterações do método de Newton para uma função simples como [f(x) = x^2 - 2], começando de [= 2].”
- **Comando IA (Análise Crítica):** “O livro (p. 578) discute a ‘Curva de Gauss’ e a ideia de que ‘todo modelo é uma simplificação’. Peça à IA para discutir, a partir de dados históricos (reais ou simulados), um caso em que um modelo matemático (como o exponencial para crescimento populacional) foi uma boa ‘aproximação’ inicialmente, mas falhou em ‘aproximações futuras’, exigindo um modelo mais complexo.”

Atividade 6: Integrando e Otimizando Aproximações (Capítulo VI)

- **Comando IA (Otimização):** “O [Método dos Multiplicadores de Lagrange - p. 607] permite otimizar com restrições. Peça à IA para descrever um problema de otimização da vida real (ex: design de produto, alocação de recursos) que possa ser ‘modelado’ usando Lagrange. Explique como a IA pode ‘aproximar’ a solução usando métodos numéricos baseados nesse princípio.”

- **Comando IA (Séries e Espaços):** “As [Séries de Fourier - p. 618] ‘aproximam’ funções periódicas. Peça à IA para gerar a série de Fourier de uma [função onda quadrada] de ordem 1, 3 e 5 e plotá-las juntas. Observe como as ‘aproximações’ melhoram. Como a IA usa essas séries para ‘comprimir’ ou ‘analisar’ sinais de áudio/imagem?”
- **Comando IA (Generalização de Volume):** “O livro (p. 592) calcula o ‘volume de uma bola em R^n. Peça à IA para explicar a intuição por trás do fato de que o volume de uma bola unitária em R^n tende a zero quando *n* tende ao infinito. Como essa ‘aproximação’ se relaciona com a ideia de ‘espaços de dimensão infinita’ (p. 596)?”

3. Questões para Discussão: A Matemática e a IA em Perspectiva Crítica

Estas questões visam estimular a análise crítica e o debate, seja em grupo ou em reflexão individual.

1. **A IA e a “Ciência da Aproximação”:** O livro argumenta que a matemática é uma “ciência da aproximação”. Como as capacidades da IA generativa, que muitas vezes operam por “aproximação” estatística de padrões, reforçam ou desafiam essa visão?

2. **Intuição Humana vs. Precisão da IA:** Diante de um problema matemático complexo, qual o valor da “intuição” humana (mencionada na Introdução) em comparação com a capacidade de “cálculo exato” da IA? Em que momentos a IA pode complementar ou substituir a intuição?

3. **A “Beleza” da Matemática e a IA:** O autor fala da “beleza” da matemática (p. 8). Pode uma IA generativa “apreciar” a beleza de uma prova, de uma solução elegante, ou de uma conexão inesperada? Discuta os limites da IA na dimensão estética da matemática.

4. **O Papel do Professor na Era da IA:** Se a IA pode explicar conceitos e resolver problemas, qual o papel fundamental do educador matemático, especialmente à luz da “Via das Aproximações Multifárias”? Como o professor pode guiar o estudante a usar a IA de forma produtiva?

5. **Riscos dos Modelos e Ética na Era da IA:** Retomando as reflexões sobre os modelos (p. 578), como a IA, ao criar e aplicar modelos matemáticos em larga escala, amplifica os desafios éticos (vieses, falta de transparência)? Como a “democracia do conhecimento” (p. 8) pode ser protegida neste cenário?

6. **A “Memória Essencial” vs. Acesso à Informação:** O livro defende a preservação da “memória essencial” dos conceitos. Em um mundo onde a IA torna o acesso à informação instantâneo, o que constitui a “memória essencial” que o estudante deve internalizar versus o que pode ser “delegado” à IA?

7. **Generalização e Abstração na IA:** O livro explora a generalização de conceitos (e.g., espaços vetoriais, integral de Lebesgue). Como as IAs contribuem para a nossa capacidade de generalizar e abstrair matematicamente? Existem limites inerentes à IA nesse processo?

4. Projetos de Aplicação: Criatividade e Inovação com Matemática e IA

Estes projetos incentivam a aplicação prática dos conceitos do livro, utilizando a IA como uma ferramenta criativa e de apoio. Adapte-os aos recursos disponíveis e ao tempo.

1. **Modelagem e Predição (Cap. I, II, V, VI):**
2. **Proposta:** Escolha um fenômeno real (e.g., crescimento populacional de uma espécie, propagação de um boato em uma rede social, variação de preço de um ativo simples). Colete dados (reais ou simulados) e use a IA para ajudar a ajustar diferentes modelos matemáticos (exponencial, logístico, polinomial) a esses dados.
3. **Com IA:**
4. Ajuda na coleta/simulação de dados.
5. Sugere funções para modelagem.
6. Realiza o ajuste de curvas e cálculos de mínimos quadrados.
7. Compara a “bondade do ajuste” entre diferentes modelos, explicando suas “aproximações” e limitações.
8. **Produto:** Relatório com gráficos, análise comparativa dos modelos e discussão sobre a “melhor aproximação” para o fenômeno.
9. **Explorador de Fractais e Beleza Matemática (Introdução, Cap. IV, V):**
10. **Proposta:** Explore um fractal (e.g., Conjunto de Mandelbrot, Conjunto de Julia, Curva de Koch). Use os conceitos de números complexos e sequências.
11. **Com IA:**
12. Gera descrições matemáticas detalhadas do fractal.
13. Fornece código básico em Python (ou outra linguagem) para renderizar o fractal.
14. Ajuda a entender a “dimensão fractal” e como ela “aproxima” a complexidade da figura.
15. Discute a “beleza” matemática e artística do fractal.
16. **Produto:** Apresentação multimídia (vídeo, site interativo) mostrando o fractal, sua construção matemática, variações e reflexões sobre sua beleza.
17. **Otimização e Caminhos Eficientes (Cap. III, VI):**
18. **Proposta:** Escolha um problema de otimização (e.g., rota mais curta em uma cidade com múltiplos destinos, alocação de recursos para maximizar lucro, design de uma embalagem com volume máximo e área mínima).
19. **Com IA:**

20. Ajuda a formalizar o problema matematicamente (função objetivo e restrições).
21. Sugere métodos de otimização (e.g., programação linear, multiplicadores de Lagrange).
22. Realiza cálculos iterativos para encontrar a "solução ótima aproximada".
23. Compara a solução encontrada com a intuição inicial, discutindo a "aproximação" do modelo com a realidade do problema.
24. **Produto:** Estudo de caso com a formulação do problema, métodos utilizados, a solução ótima e uma discussão sobre as simplificações e "aproximações" feitas.
25. **Construção de Conhecimento com "Mini-Aulas" (Todos os Capítulos):**
26. **Proposta:** Selecione um conceito complexo (e.g., "espaços de Hilbert", "raízes primitivas da unidade", "Teorema Fundamental da Álgebra"). Use a IA para criar uma "mini-aula" interativa sobre ele.
27. **Com IA:**
28. Ajuda a estruturar a mini-aula (tópicos, exemplos).
29. Gera analogias e exemplos didáticos.
30. Cria quizzes curtos para verificar a compreensão.
31. Pode simular um "tutor" respondendo a perguntas frequentes sobre o conceito.
32. **Produto:** Uma mini-aula (pode ser em formato de slides, vídeo curto, ou documento interativo) que demonstre um entendimento profundo e a capacidade de ensinar o conceito.

5. Recursos Adicionais: Ampliando Horizontes na Interseção de Matemática e IA

Esta lista oferece pontos de partida para explorar a intersecção da matemática avançada com a IA.

Livros e Artigos (gerais):

- **"A Próxima Onda"** de Mustafa Suleyman e Michael Bhaskar (Cap. 1 - O Poder do Núcleo): Aborda a matemática por trás dos LLMs.
- **"Armas de Destruição Matemática"** de Cathy O'Neil: Discute os vieses e impactos éticos dos algoritmos (modelos), conectando-se às reflexões do livro (p. 578).
- **"Inteligência Artificial: Uma Abordagem Moderna"** de Stuart Russell e Peter Norvig: Um clássico sobre IA, com forte base matemática.
- **"O Poder do Pensamento Matemático"** de Jordan Ellenberg: Explora como a matemática está em tudo, e como o pensamento matemático é crucial.
- **"Fractals: A Very Short Introduction"** de Kenneth Falconer: Uma introdução acessível à matemática dos fractais.

Vídeos e Canais (YouTube):

- **3Blue1Brown:** Canal com animações visuais fantásticas de conceitos matemáticos complexos, incluindo Álgebra Linear, Cálculo e Fourier.
- *Sugestão de Busca:* “3Blue1Brown Fourier Series”, “3Blue1Brown Linear Algebra”

Numberphile: Explora diversos tópicos matemáticos de forma divertida e acessível.

- *Sugestão de Busca:* “Numberphile Fibonacci”, “Numberphile Complex Numbers”

PBS Infinite Series: Vídeos que aprofundam tópicos de matemática avançada de forma envolvente.

“The Essence of Linear Algebra” (Playlist do 3Blue1Brown): Excelente para aprofundar Espaços Vetoriais.

“But what is a Neural Network?” (3Blue1Brown): Ótima introdução visual às redes neurais e como a matemática (vetores, transformações) funciona nelas.

Podcasts:

- **“Mindscape”** com Sean Carroll (episódios com matemáticos ou cientistas da computação): Discussões aprofundadas sobre conceitos científicos e filosóficos.
- **“Lex Fridman Podcast”** (episódios com especialistas em IA): Entrevistas longas que frequentemente abordam as bases matemáticas da IA.

Ferramentas Online:

- **GeoGebra:** Para visualizações interativas de geometria e funções (mencionado exaustivamente no livro).
- **WolframAlpha:** Para cálculos simbólicos, gráficos complexos e verificações (também mencionado).
- **Plataformas de IA Generativa:** DeepSeek Chat, ChatGPT, Google Gemini, Anthropic Claude.

6. Dicas para Educadores: Multiplicando o Potencial da Via das Aproximações com a IA

Este guia foi elaborado para ser um recurso dinâmico e flexível. Educadores podem adaptá-lo para diferentes níveis de ensino (do ensino médio avançado à graduação) e estilos de aprendizagem, maximizando o engajamento dos estudantes na “Via das Aproximações Multifárias”.

6.1. Fomentando o Pensamento Crítico na Era da IA

- **Implemente a Regra “Tentar Primeiro”:** Deixe claro que a IA é para ser usada *após* a tentativa individual. Inicie as aulas ou sessões de estudo com um momento de “luta” com o problema.

- **Incentive o Questionamento Ativo:** Desafie os alunos a não apenas “aceitar” a resposta da IA, mas a “dissecar” sua lógica. Peça para justificarem os passos da IA como se fossem seus próprios.
- **Promova a Comparação de Métodos:** Após um problema, discuta diferentes abordagens (incluindo as sugeridas pela IA ou as exploradas por diferentes alunos). Qual é a mais elegante? A mais eficiente? A que melhor ilustra a “aproximação”?
- **Crie Cenários de “Erros da IA”:** Proponha problemas onde a IA possa falhar sutilmente (erros de “alucinação” ou interpretação). Peça aos alunos para identificarem e corrigirem essas falhas, reforçando a necessidade do olhar humano.

6.2. Integrando a IA nas Atividades de Sala de Aula

- **Sessões Práticas de IA Colaborativa:** Dedique tempo para sessões onde os alunos trabalham em grupos, com o livro e a IA, para resolver problemas mais desafiadores. Incentive-os a compartilhar seus “prompts” de sucesso e as “conversas” com a IA.
- **“IA como Explicador Pessoal”:** Encoraje os alunos a usar a IA para esclarecer dúvidas em tempo real. Peça que tragam para a aula as explicações da IA que eles acharam mais úteis (ou confusas!), para discussão em grupo.
- **Projetos Baseados em IA:** Os “Projetos de Aplicação” (Seção 5) são ideais para trabalho em grupo. Defina expectativas claras para o papel da IA no projeto (e.g., “a IA deve ser usada para visualização e cálculo, mas a análise crítica e as conclusões devem ser suas”).
- **“Mini-Aulas Invertidas”:** Peça aos alunos para usarem a IA para preparar “mini-aulas” sobre conceitos do livro. Eles podem pedir à IA para gerar analogias, exemplos, ou até mesmo um roteiro da aula. O foco é a didática e a compreensão do aluno, não a capacidade da IA de gerar texto.

6.3. Avaliação na Era da IA

A avaliação deve ir além da mera verificação de respostas, focando no processo de aprendizagem e no pensamento crítico.

Avaliação do Processo:

- Peça aos alunos para submeterem não apenas a solução final, mas também o **histórico de suas interações com a IA** para um problema específico. Isso permite avaliar como eles utilizaram a ferramenta (pediram dicas? tentaram primeiro? verificaram?).
- Avalie a **clareza da explicação** do aluno sobre a solução, mesmo que a IA tenha auxiliado no cálculo.

Questões de Ordem Superior:

- Foque em questões que exigem **análise crítica, síntese e reflexão**, que são mais difíceis para a IA responder de forma autônoma.
- Ex: “Compare a abordagem do livro para [Teorema X] com a explicação que a IA oferece. Qual delas você considera mais ‘intuitiva’ e por quê, à luz da ‘Via das Aproximações Multifárias’?”
- Ex: “Se você fosse explicar a [Desigualdade de Jensen] a uma IA, como a ensinaria a ‘apreciar’ a convexidade de uma função?”

Projetos e Apresentações: Os projetos (Seção 5) são excelentes para avaliação formativa e somativa, pois permitem avaliar a aplicação de conhecimentos, a criatividade e a capacidade de colaboração com a IA.

Debates e Discussões: Utilize as “Questões para Discussão” (Seção 4) como base para debates em sala de aula, avaliando a participação, a argumentação e a capacidade de conectar o conteúdo do livro com as implicações da IA.

GUIA DE ESTUDO NA ERA DA IA PARA O ENSINO MÉDIO:

Desvendando a Matemática com Aproximações

1. Introdução: Sua Aventura Matemática com um Co-Piloto Inteligente!

Olá, futuro(a) pensador(a) e desbravador(a) da Matemática!

Este guia foi criado para você, que está no Ensino Médio, e para seus professores. Sua obra, “MATEMÁTICA INTERMEDIÁRIA: A VIA DAS APROXIMAÇÕES MULTIFÁRIAS”, é um convite para ver a Matemática de um jeito diferente: não como algo chato e cheio de regras, mas como uma grande aventura de descobertas! Aqui, você vai aprender que a Matemática está em tudo, nos jogos, nas redes sociais, na natureza, e que ela é uma ferramenta incrível para entender o mundo.

A grande novidade agora é que você terá um copiloto superinteligente: a Inteligência Artificial (IA)! Ferramentas como a DeepSeek R1, ChatGPT, Gemini, e outras, podem te ajudar muito. Mas atenção: a IA é como um mapa e uma bússola poderosos, não o destino. É você quem pilota essa aventura!

Este Guia vai te ajudar a:

1. **Entender Melhor:** Deixar os conceitos mais claros, mostrando como as ideias se conectam.
2. **Pensar Criticamente:** Desenvolver seu próprio raciocínio e aprender a questionar, mesmo a IA.
3. **Usar a IA de Forma Inteligente:** Transformar a IA em sua aliada para aprender mais rápido e de um jeito mais divertido.

Prepare-se para uma jornada onde sua mente e a tecnologia se unem para desvendar os segredos da Matemática!

2. Visão Geral dos Capítulos: Um Mapa para sua Jornada

Seu livro é como um mapa com vários caminhos. Aqui, vamos ver o que cada parte principal (capítulo) te oferece e como ela se conecta com a ideia de “aproximações”.

Introdução: Onde a Aventura Começa

A Introdução explica a ideia principal do livro: a “Via das Aproximações Multifárias”. Isso significa que a Matemática não é só sobre “respostas exatas”, mas sobre encontrar as “melhores aproximações” para os problemas. É como um pintor que, com várias pinceladas (aproximações), cria uma obra-prima. A IA é uma ferramenta poderosa para isso!

Capítulo I: Construindo a Base – Com Bloquinhos e Desafios

Este capítulo é a fundação da sua aventura. Você vai reencontrar a Álgebra de um jeito novo, aprendendo a organizar e simplificar expressões. As desigualdades (como MA ≥ MG) serão suas ferramentas para comparar e encontrar os “melhores” ou “piores” valores possíveis. As sequências (como a famosa de Fibonacci, encontrada na natureza) vão te mostrar padrões e como as coisas se transformam passo a passo.

- **Ideia de Aproximação:** As desigualdades mostram como um valor pode ser “aproximado” por outro. Sequências mostram a “aproximação” de um resultado final por etapas.

Capítulo II: Entendendo as Transformações – Funções e Movimento

Aqui a aventura ganha mais movimento. As funções (exponenciais, logarítmicas) mostram como as coisas crescem ou diminuem. Você vai ver a derivada, que te ajuda a entender a “velocidade” e a “inclinação” de um gráfico em cada ponto – é a “melhor aproximação” de uma curva por uma reta. A integral será sua ferramenta para calcular áreas e volumes, que são “somas de pequenas aproximações”.

- **Ideia de Aproximação:** Funções são “aproximações” de fenômenos reais. Derivadas e integrais são técnicas para “aproximar” cálculos complexos. Modelos (como o da COVID-19) são “aproximações” da realidade.

Capítulo III: Formas, Espaços e Conexões – Geometria e Além

Este capítulo é um playground de formas e figuras. Você vai revisitar a Trigonometria (triângulos, ângulos) e ver como ela se conecta com as coordenadas e com a ideia de vetores. Isso te leva aos Espaços Vetoriais, onde você pode "desenhar" problemas complexos usando pontos e direções. As "aproximações por mínimos quadrados" mostram como encontrar a "melhor reta" para um conjunto de pontos, algo muito usado em ciência de dados!

- **Ideia de Aproximação:** Representar formas e movimentos por vetores e coordenadas é uma "aproximação" poderosa. O "melhor ajuste" de uma reta ou curva é uma "aproximação".

Capítulo IV: Explorando o Invisível – Números Complexos e Geometrias Diferentes

Prepare-se para expandir sua mente! Os Números Complexos te mostram que a Matemática tem soluções para problemas que parecem impossíveis. Eles são incríveis para descrever rotações e ondas. Você vai ver como eles se parecem com matrizes e como podem ser usados para "transformar" formas no espaço. Você vai até espiar outras geometrias (como o Disco de Poincaré), que te mostram que nem tudo é como a geometria que você conhece, e que há muitas "aproximações" da realidade.

- **Ideia de Aproximação:** Números complexos são uma «aproximação» que resolvem problemas onde números reais não são suficientes. Diferentes geometrias são «aproximações» de como o espaço pode ser.

Capítulo V: Poder dos Polinômios – Modelagem e Realidade

Este capítulo é sobre os polinômios, que são os "blocos de montar" de muitas funções. Você vai aprender a "aproximar" funções complicadas com polinômios mais simples (como a Série de Taylor). Vai ver como encontrar raízes de equações e como os polinômios nos ajudam a entender a famosa Curva de Gauss – a "curva do sino", que explica muita coisa na natureza e na sociedade.

- **Ideia de Aproximação:** Polinômios "aproximam" o comportamento de funções complexas. A Curva de Gauss é uma "aproximação" matemática para muitos fenômenos naturais.

Capítulo VI: A Grande Síntese – Unindo e Aplicando

O final da sua aventura! Este capítulo amarra todas as ideias. Você vai ver como encontrar máximos e mínimos em situações mais complexas (com "restrições"), usando técnicas como os Multiplicadores de Lagrange. As Séries de Fourier vão te mostrar como «montar» qualquer som ou imagem com ondas simples. Tudo isso reforça a grande ideia: a Matemática é uma ferramenta poderosa para criar «aproximações» que nos ajudam a entender, controlar e até prever o mundo ao nosso redor.

- **Ideia de Aproximação:** Técnicas avançadas de otimização e análise de sinais são «aproximações» para resolver problemas complexos do mundo real.

3. Atividades Práticas: Matemática & IA – Sua Aventura Ativa!

Aqui você vai usar a IA (como DeepSeek, ChatGPT, Gemini) para ir além!

Sempre lembre:

1. **Tente primeiro!** A IA é seu copiloto, não seu motorista. Pense antes de perguntar.
2. **Pergunte "Por que?"** Não só «qual a resposta». Entenda o raciocínio da IA.
3. **Verifique!** IAs podem errar. Compare com o livro ou outras fontes.

Atividades Gerais para Qualquer Capítulo:

- **Comando IA (Simplificar Conceitos):** "Explique o conceito de [nome do conceito, ex: 'Sequência de Cauchy' na p. 93] de forma bem simples, como se eu estivesse no 1º ano do Ensino Médio. Dê um exemplo do dia a dia."
- **Comando IA (Visualizar):** "Gere um gráfico da função [nome da função, ex: 'y = arctg(x)' na p. 335] e me diga como eu posso usar o GeoGebra para explorá-lo interativamente."
- **Comando IA (Explorar Aplicações):** "Onde [nome do conceito, ex: 'Polinômios Simétricos' na p. 498] são usados em jogos ou aplicativos que eu conheço?"
- **Comando IA (Dicas para Problemas):** "Estou travado no Problema [QF-15 - p. 33]. Qual a primeira dica que você me daria para começar a resolver, sem dar a resposta? Qual a 'aproximação' matemática mais simples que posso usar aqui?"

Exemplos Específicos por Capítulo:

Capítulo I:

- **Aprofundar Desigualdades:** "Explique a [Desigualdade MA ≥ MG - QF-15, p. 33] usando o conceito de 'média' e 'produtividade'. Como ela nos ajuda a encontrar a 'melhor aproximação' para dividir algo igualmente?"
- **Sequência de Fibonacci:** "Peça à IA para gerar os primeiros 15 termos da [Sequência de Fibonacci - p. 65]. Em seguida, peça para ela encontrar a relação entre essa sequência e algo na natureza (ex: girassóis, pinhas). Como a natureza 'aproxima' padrões matemáticos?"

Capítulo II:

- **Funções e Taxas de Variação:** "O livro (p. 155) fala sobre a 'derivada' como taxa de variação. Pense em um carro. Como a derivada 'aproxima' a velocidade instantânea do carro em um momento específico? Peça à IA para criar um pequeno problema sobre isso e me dar a resposta."

- **Modelagem de Fenômenos:** “Peça à IA para me explicar a diferença entre [crescimento exponencial e logístico] (p. 215) em um contexto que eu entenda, como a popularidade de um vídeo no TikTok. Como cada modelo ‘aproxima’ fases diferentes do crescimento?”

Capítulo III:

- **Geometria Visual:** “Peça à IA para descrever ou desenhar (se sua IA puder) como o [Teorema de Ceva - p. 228] funciona. Imagine que você tem um triângulo. Como esse teorema mostra uma ‘aproximação’ para quando três linhas se encontram em um único ponto?”
- **Vetores no Dia a Dia:** “O livro (p. 261) apresenta vetores. Como os vetores ‘aproximam’ a direção e força em um jogo de futebol (chute, passe)? Peça à IA para me dar um exemplo numérico simples de como dois vetores podem ‘somar’ forças.”

Capítulo IV:

- **Complexos e Rotação:** “Explique como os [números complexos - p. 366] podem ser usados para descrever ‘rotações’ de objetos em um gráfico 2D, como em um jogo. Peça à IA um exemplo de como multiplicar um ponto por ‘i’ gira esse ponto.”
- **Geometrias Diferentes:** “O livro (p. 404) menciona o [Disco de Poincaré]. Peça à IA para explicar como ‘linhas retas’ nesse disco se parecem com ‘curvas’ no nosso mundo. Como isso é uma ‘aproximação’ de um tipo diferente de espaço?”

Capítulo V:

- **Polinômios e Aproximação:** “Peça à IA para me dar um exemplo de como um [polinômio] (p. 480) pode ser usado para ‘aproximar’ uma curva que não é um polinômio (ex: a curva de uma montanha russa). Como a ‘aproximação’ fica melhor se o polinômio for de grau maior?”
- **A Curva da Natureza:** “Explique de forma simples o que é a [Curva de Gauss - p. 576] (a ‘curva do sino’). Como ela ‘aproxima’ a distribuição de alturas das pessoas em uma população, ou as notas em uma prova? O que o livro quer dizer com ‘modelos são opiniões embutidas na matemática’ (p. 578)?”

Capítulo VI:

- **Otimização Prática:** “Pense em um problema simples: ‘Como faço para que minha horta tenha a maior área possível com um certo comprimento de cerca?’ Peça à IA para me explicar o que os [Multiplicadores de Lagrange - p. 607] fariam para resolver esse tipo de problema. Como eles buscam a ‘melhor aproximação’ para a solução?”
- **Sons e Fourier:** “O livro (p. 613) menciona as [Séries de Fourier]. Explique como elas podem ‘aproximar’ um som complexo (ex: uma música) decompondo-o em ‘ondas simples’. Peça à IA um exemplo de como um aplicativo de música pode usar isso.”

4. Questões para Discussão: Pense, Debata, Explore!

Use essas perguntas para conversar com seus colegas, professores ou para sua própria reflexão, sempre pensando com a cabeça de um matemático da "Via das Aproximações Multifárias".

1. **Matemática Exata vs. Aproximada:** Se a IA pode dar respostas "exatas" para muitos problemas, por que o livro insiste que a Matemática é uma "ciência da aproximação"? Onde está a diferença?
2. **O Pensamento Humano e a IA:** O que você acha que você, como ser humano, consegue fazer em Matemática que a IA (mesmo a mais avançada) *nunca* vai conseguir? Pense na "intuição" e na "beleza" que o livro menciona.
3. **IA no Aprendizado:** Quais são os maiores perigos de usar a IA para estudar Matemática? E os maiores benefícios? Como podemos evitar o "erro comum" de apenas copiar respostas?
4. **Modelos na Sociedade:** O livro (p. 578) fala sobre como os modelos matemáticos (e agora os da IA) são "opiniões embutidas na matemática". O que isso significa para você no dia a dia, vendo notícias, jogando, ou usando aplicativos?
5. **Conexões Inesperadas:** Qual foi a conexão mais "surpreendente" que você encontrou entre dois temas diferentes da Matemática (ex: geometria e números complexos, álgebra e probabilidade) neste livro ou com a ajuda da IA? Por que ela te surpreendeu?
6. **A Matemática e o Futuro:** Como a "Via das Aproximações Multifárias" pode nos ajudar a entender melhor o desenvolvimento da própria IA? Pense em como a IA "aprende" e "melhora" suas respostas.

5. Projetos de Aplicação: Crie, Inove, Aplique!

Coloque a mão na massa! Escolha um projeto para desenvolver, utilizando os conhecimentos do livro e a IA.

1. **"Meu Mapa de Aproximações" (Capítulos I a VI):**
2. **Proposta:** Crie um mapa conceitual digital (usando ferramentas como MindMeister, Miro, ou até pedindo à IA para estruturar um) que conecte no mínimo 10 conceitos diferentes do livro, mostrando como um "aproxima" ou "generaliza" o outro.
3. **Com IA:** Peça à IA para sugerir conexões, dar exemplos de cada conceito e ajudar a organizar visualmente o mapa.
4. **"Otimizando Meu Dia" (Cap. I, II, III, VI):**
5. **Proposta:** Escolha um problema de otimização simples da sua vida (ex: distribuir seu tempo de estudo entre matérias para maximizar notas, planejar uma rota de entrega de panfletos para gastar menos tempo, criar uma embalagem para um produto que use menos material).
6. **Com IA:** Ajude a modelar o problema matematicamente. Use a IA para tentar encontrar a "melhor aproximação" para a sua solução.

7. **Produto:** Apresentação (slides, vídeo) mostrando o problema, sua modelagem matemática, a solução encontrada (com o auxílio da IA) e uma reflexão sobre as “aproximações” e simplificações que você teve que fazer.
8. **“Desenhando com Funções” (Cap. II, III, V):**
9. **Proposta:** Use o GeoGebra (com o auxílio da IA) para “desenhar” uma imagem (ex: um personagem, um rosto, um objeto) utilizando apenas gráficos de funções matemáticas (polinômios, trigonométricas, exponenciais, complexas).
10. **Com IA:** Peça à IA para sugerir funções que se “aproximem” das formas que você quer desenhar. Peça dicas de como combinar e transformar funções.
11. **Produto:** A imagem digital criada, com uma breve explicação matemática das funções e transformações utilizadas.
12. **“Sinais e Sons da Matemática” (Cap. III, IV, VI):**
13. **Proposta:** Explore como sons ou imagens digitais são “aproximados” por matemática. Pesquise como as Séries de Fourier (Cap. VI) ou as Transformadas de Fourier discretas (mencionado no Cap. VI) funcionam.
14. **Com IA:** Peça à IA para explicar, de forma simplificada, como um arquivo MP3 “comprime” uma música usando a matemática das ondas. Peça um exemplo de como uma “onda quadrada” (simples) pode ser “aproximada” pela soma de ondas senoidais (Série de Fourier).
15. **Produto:** Uma pequena pesquisa apresentando como a matemática “aproxima” e manipula dados digitais (áudio/imagem), com exemplos visuais ou sonoros se possível.

6. Recursos Adicionais: Expanda Sua Mente!

Para ir ainda mais longe e se aprofundar na “Via das Aproximações Multifárias”, confira estes recursos:

Canais e Séries no YouTube (para o Ensino Médio):

- **Khan Academy (Matemática):** Explicações claras para quase todos os tópicos de Matemática.
- **Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio:** Didática envolvente e exemplos práticos.
- **Manual do Mundo (Matemática):** Experiências e curiosidades que mostram a matemática em ação.
- **“O Fascinante Mundo da Matemática” (Netflix):** Uma série documental que explora conceitos matemáticos de forma visual e inspiradora.

Livros e Sites (acessíveis):

- **“O Homem que Calculava”** de Malba Tahan: Clássico da literatura matemática, com problemas que estimulam o raciocínio.
- **“Aventuras Matemáticas”** de Ian Stewart: Explora conceitos matemáticos de forma divertida e acessível.
- **Sites de Olimpíadas de Matemática:** OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática). Ótimos para problemas desafiadores.

Ferramentas Online (essenciais):

- **GeoGebra:** Para visualizar gráficos, geometria, funções. (Use o GeoGebra Classic para mais recursos).
- **WolframAlpha:** Para resolver equações, plotar gráficos, obter informações matemáticas.
- **Plataformas de IA Generativa:** DeepSeek Chat, ChatGPT, Google Gemini, Anthropic Claude. Explore e experimente!

7. Dicas para Educadores: Guiando a Jornada na Era da IA

Prezado(a) educador(a),

Este Guia foi pensado para ser um aliado. Sua experiência e sua didática são insubstituíveis, especialmente no contexto da “Via das Aproximações Multifárias”, que valoriza a intuição e a interconexão. A IA é uma ferramenta poderosa, mas exige a mediação humana para ser plenamente aproveitada.

7.1. Adote a Filosofia \"Tentar, Pensar, Questionar, Usar a IA\":

- **Reforce o Esforço Produtivo:** Enfatize que o primeiro passo é sempre a tentativa individual. A “luta” com o problema é onde o aprendizado acontece. Peça aos alunos para mostrarem suas tentativas iniciais antes de recorrerem à IA.
- **Promova o Diálogo Crítico com a IA:** Incentive os alunos a questionarem as respostas da IA. Perguntas como: “Por que a IA usou esse teorema?”, “Qual a lógica por trás desse passo?”, “Há outras maneiras de resolver que a IA não mostrou?”.
- **Use a IA para Diagnóstico:** Peça aos alunos para usarem a IA para identificar seus próprios pontos fracos. Ex: “IA, gere 3 problemas sobre [conceito X] onde eu costumo errar.” Isso os torna mais autônomos no processo de aprendizado.

7.2. Integre a IA de Forma Estratégica em Sala de Aula:

- **Sessões Práticas Guiadas:** Dedique tempo para sessões no laboratório de informática ou com dispositivos pessoais, onde os alunos usem a IA para explorar um conceito ou resolver um problema complexo. Guie-os com prompts específicos.

- **“Batalhas de Soluções”:** Proponha um problema desafiador. Deixe os alunos trabalharem (com ou sem IA, conforme a atividade). Depois, convide-os a apresentar suas soluções, explicando cada passo. Onde a IA ajudou? Onde o pensamento humano foi essencial?
- **Cenários de “Erros da IA”:** Crie intencionalmente problemas que possam levar a IAs a cometerem “alucinações” ou erros sutis. Desafie os alunos a identificar e corrigir essas falhas, desenvolvendo um senso crítico aguçado.
- **Role-playing “Professor de IA”:** Peça aos alunos para, por um dia, agirem como “professores” para a IA, ensinando-a a resolver um problema ou a entender um conceito. Isso exige que eles compreendam o assunto em profundidade.

7.3. Avaliação no Contexto da IA:

- **Avalie o Processo, Não Apenas o Resultado:** Considere o histórico de interação do aluno com a IA. Como ele usou a ferramenta? Ele pediu dicas antes da solução completa? Ele verificou os passos?
- **Foco em Habilidades do Século XXI:** Avalie a capacidade de formulação de problemas, a clareza da comunicação matemática, o pensamento crítico, a colaboração (se for trabalho em grupo) e a capacidade de aprender de forma autônoma.
- **Questões de Análise e Síntese:** Continue utilizando questões abertas que exijam reflexão, conexão de ideias e aplicação criativa, pois são mais difíceis para a IA gerar sozinha.
- **Projetos e Portfólios:** Os “Projetos de Aplicação” (Seção 5) são excelentes para avaliação, permitindo que os alunos demonstrem sua compreensão em contextos mais amplos e criativos.

Ao abraçar esta “Via das Aproximações Multifárias” com o auxílio inteligente da IA, você estará não apenas ensinando Matemática, mas preparando seus alunos para serem pensadores críticos e solucionadores de problemas em um mundo em constante evolução.

Adaptar a “Via das Aproximações Multifárias” e a integração com a IA para o Ensino Fundamental é um desafio recompensador, pois é nessa fase que se constrói a base da intuição matemática. A chave é tornar os conceitos visuais, lúdicos, concretos e conectados à realidade da criança, usando a IA como um facilitador divertido e educativo.

Para o Ensino Fundamental, vamos focar em atividades que incentivem:

- **Pensamento Computacional:** Resolução de problemas passo a passo, lógica.
- **Visualização:** Com ferramentas digitais, tornar o abstrato concreto.
- **Curiosidade e Exploração:** Usar a IA para alimentar a sede por aprender.
- **Conexão com o Cotidiano:** Mostrar a matemática presente no dia a dia.
- **A “Aproximação” como Ferramenta:** Entender que nem sempre precisamos da “resposta exata” e que estimar é importante.

Atividades Práticas para o Ensino Fundamental: Desvendando a Matemática com Aproximações e IA!

Lembretes Essenciais para o Ensino Fundamental:

- **A IA é uma ferramenta divertida:** Vamos usá-la para explorar, criar e descobrir, como um amigo inteligente.
- **Pergunte do seu jeito:** Não tenha medo de perguntar. A IA está aqui para te ajudar.
- **Sempre tente fazer primeiro:** A maior diversão é tentar resolver o desafio com a sua própria cabeça!

Nível 1: Anos Iniciais (1º ao 3º ano)

Neste nível, o foco é em contagem, reconhecimento de padrões, formas geométricas básicas e as primeiras noções de estimativa. A IA pode ser usada para gerar histórias, jogos e desafios simples.

1. **Aventuras da Contagem e Agrupamento (Cap. I - Sequências):**
2. **Conceito:** Contagem, agrupamento, padrões numéricos.
3. **Comando IA:** “Crie uma história curta onde o personagem principal precisa contar objetos [ex: 10 maçãs, 5 lápis, 3 flores]. A história deve incluir um desafio de agrupar esses objetos.”
4. **Atividade:** As crianças leem a história, contam e agrupam os objetos reais (ou desenham/colam). Depois, podem pedir à IA: “Peça para o personagem contar de 2 em 2 (ou 5 em 5) até 20.”
5. **Via das Aproximações:** A ideia de agrupar mostra como grandes quantidades podem ser “aproximadas” por grupos menores.
6. **Detetives das Formas Geométricas (Cap. III - Geometria Básica):**
7. **Conceito:** Reconhecimento de formas (quadrado, triângulo, círculo, retângulo).
8. **Comando IA:** “Sou um detetive de formas. Me dê 3 pistas sobre uma forma geométrica [ex: tem 4 lados iguais, é redonda, tem 3 pontas]. Eu vou tentar adivinhar a forma!”
9. **Atividade:** A IA dá as pistas, a criança adivinha a forma. Depois, a criança pode pedir à IA: “Crie uma charada sobre um objeto na sala [ex: uma janela, uma porta] e sua forma geométrica.”
10. **Via das Aproximações:** Observar as formas em objetos reais mostra que são “aproximações” das formas geométricas puras.
11. **Contando Passos e Estimando Distâncias (Cap. II - Noção de Grandeza):**
12. **Conceito:** Estimativa, medida (não-padronizada, ex: passos).

13. **Comando IA:** “Quero andar da minha carteira até a porta. Quantos passos você acha que eu vou dar? Me dê um número para eu tentar ‘aproximar’.”
14. **Atividade:** A criança estima, anda, conta os passos e compara com a estimativa da IA. Depois, podem estimar com a IA a distância em “pés de elefante” ou “passos de formiga”.
15. **Via das Aproximações:** Entender que estimar é encontrar um valor “próximo” e que a “exatidão” não é sempre necessária.

Nível 2: Anos Intermediários (4º ao 6º ano)

Neste nível, podemos explorar operações fundamentais, frações, porcentagens, gráficos simples e a ideia de média. A IA pode ajudar na criação de cenários-problema e na visualização de dados.

1. **O Desafio da Divisão Justa (Cap. I - Operações):**
2. **Conceito:** Divisão, frações, restos.
3. **Comando IA:** “Tenho 15 biscoitos e quero dividir igualmente entre 4 amigos. Peça à IA para me ajudar a ‘aproximar’ quanto cada um vai ganhar, e se vai sobrar algo. Como eu posso cortar os biscoitos para que todos comam a mesma quantidade (frações)?”
4. **Atividade:** Resolver com objetos concretos ou desenhos. A IA pode depois sugerir: “E se forem 17 biscoitos? Ou 20 amigos?”
5. **Via das Aproximações:** Entender que nem tudo divide “certinho” e que frações são uma forma de “aproximar” a divisão justa. A ideia de resto.
6. **Gráficos Contam Histórias (Cap. II - Gráficos Simples):**
7. **Conceito:** Gráficos de barra, dados simples.
8. **Comando IA:** “Quantos livros eu li este mês? (Dê 3 números, ex: 1ª semana: 2, 2ª semana: 3, 3ª semana: 1). Peça à IA para criar uma tabela e me dizer como eu faria um gráfico de barras para mostrar isso. Ela pode pedir à IA: ‘Como o gráfico ‘aproxima’ a história dos meus livros?’”
9. **Atividade:** Coletar dados simples (ex: frutas favoritas da turma, número de gols em um jogo) e criar gráficos.
10. **Via das Aproximações:** Gráficos “aproximam” dados complexos em uma história visual e fácil de entender.
11. **Matemática dos Jogos e Regras (Cap. III - Lógica e Padrões):**
12. **Conceito:** Lógica, sequências, probabilidade simples.
13. **Comando IA:** “Peça à IA para me ensinar um jogo de tabuleiro simples (ex: jogo da velha, um jogo de dados) e suas regras. Peça à IA para me dizer ‘quais os padrões’ que eu posso observar para tentar ganhar o jogo.”

14. **Atividade:** Jogar o jogo. Depois, pedir à IA: “Se eu jogar um dado, qual a chance de cair o número 6? Como a Matemática ‘aproxima’ a chance de algo acontecer?”
15. **Via das Aproximações:** Regras criam padrões. A probabilidade “aproxima” a chance de algo acontecer, mostrando que nem tudo é certo.

Nível 3: Anos Finais (7º ao 9º ano)

Neste nível, os alunos podem lidar com conceitos mais abstratos, como funções, equações, geometria analítica e as primeiras noções de transformação e modelagem. A IA pode ser uma ferramenta para explorar “e se…”, visualizar conceitos abstratos e gerar cenários mais complexos.

1. **Funções e Transformações no Desenho (Cap. II - Funções):**
2. **Conceito:** Funções (linear, quadrática), transformação de gráficos.
3. **Comando IA:** “Peça à IA para me ajudar a desenhar um ‘rosto’ no GeoGebra usando apenas funções. Comece com [$y = x^2$] para os olhos. Como eu posso mover e mudar essa curva para fazer um ‘sorriso’ ou ‘sobrancelhas’?”
4. **Atividade:** Criar desenhos complexos usando transformações de funções no GeoGebra.
5. **Via das Aproximações:** Desenhar com funções mostra como formas complexas podem ser “aproximadas” por combinações de funções matemáticas.
6. **Descobrindo Padrões com Fibonacci na Natureza (Cap. I - Sequências, Capítulo IV - Razão Áurea):**
7. **Conceito:** Sequência de Fibonacci, Razão Áurea.
8. **Comando IA:** “Explique o que é a [Sequência de Fibonacci] (p. 65) e a [Razão Áurea] (p. 66). Peça à IA para me dar exemplos de onde eu posso encontrar essas ‘aproximações’ na natureza ou na arte.”
9. **Atividade:** Procurar exemplos reais (folhas, flores, espirais de caracóis) e comparar com os padrões da sequência. Medir e calcular a razão em objetos (ex: proporções do próprio corpo, folhas).
10. **Via das Aproximações:** A natureza não é “exata”, mas “aproxima” padrões matemáticos como a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea.
11. **Otimizando Minha Mesada ou Compras (Cap. VI - Otimização Básica):**
12. **Conceito:** Otimização, encontrar o máximo/mínimo.
13. **Comando IA:** “Tenho R$ 50,00 para gastar em lanches. Quero comprar refrigerantes (R$ 5,00 cada) e salgados (R$ 8,00 cada). Peça à IA para me ajudar a ‘aproximar’ qual a melhor combinação para eu ter o maior número de lanches, sem passar dos R$ 50,00.”

14. **Atividade:** Resolver o problema com a IA, depois mudar os valores e as condições.
15. **Via das Aproximações:** Encontrar a "melhor combinação" é uma forma de otimização, buscando a "melhor aproximação" para um objetivo.
16. **Criptografia: Mensagens Secretas (Cap. IV - Noção de Criptografia - via IA):**
17. **Conceito:** Noção de algoritmos, segurança digital. (Não se aprofundar em números complexos, mas na ideia de como a matemática cria segredos).
18. **Comando IA:** "Crie um código secreto simples (algoritmo) para eu mandar mensagens para um amigo. Como a Matemática é usada para 'proteger' mensagens na internet?"
19. **Atividade:** Criar e decifrar mensagens com o código gerado. Discutir por que códigos simples não são seguros.
20. **Via das Aproximações:** Entender que a criptografia é a "aproximação" de uma mensagem ilegível por uma compreensível, baseada em regras matemáticas.

4. Questões para Discutir e Refletir (Ensino Fundamental):

1. **Matemática Perto de Você:** Onde você vê a Matemática no seu dia a dia, fora da escola? Dê 3 exemplos e explique como ela aparece.
2. **O Amigo Robô:** O que você acha que a IA é melhor para fazer em Matemática? E o que você é melhor para fazer?
3. **Acerte Perto:** Quando é importante ter uma resposta "exata" em Matemática? E quando "acertar perto" (estimar) já é suficiente? Dê exemplos.
4. **A Beleza da Matemática:** Você acha a Matemática bonita? Onde você encontra a "beleza" nela? (Pode ser em um gráfico, um padrão, uma solução de problema).
5. **A IA e o Futuro:** Como você acha que a IA vai mudar a forma como as pessoas aprendem Matemática no futuro?

5. Projetos Criativos (Ensino Fundamental):

1. **"Meu Livro de Problemas Resolvidos com a IA":**
2. **Proposta:** Selecione 5 a 10 problemas do livro ou que você criou com a IA. Resolva-os e, para cada um, escreva como a IA te ajudou (ex: "A IA me deu uma dica para o primeiro passo", "Usei a IA para verificar minha resposta").
3. **Produto:** Um pequeno e-book ou caderno digital/físico com seus problemas e as interações com a IA.
4. **"A Arte das Formas Geométricas e a IA":**

5. **Proposta:** Use o GeoGebra (com o auxílio da IA) para criar uma obra de arte abstrata ou um desenho utilizando apenas formas geométricas (círculos, quadrados, triângulos, retas) e suas transformações (girar, mover, aumentar/diminuir).
6. **Com IA:** Peça à IA para sugerir combinações de formas, cores e padrões.
7. **Produto:** Sua obra de arte digital e uma breve explicação de como você usou a Matemática para criá-la.
8. **"Simulador de Crescimento" (Cap. II):**
9. **Proposta:** Use uma planilha (Excel, Google Sheets) e a IA para simular o crescimento de algo (ex: o número de seguidores de um canal, o crescimento de uma planta). Use uma função simples (linear ou exponencial).
10. **Com IA:** Peça à IA para te ajudar a criar a fórmula na planilha. Peça para ela prever o crescimento para o futuro.
11. **Produto:** Uma planilha com a simulação e um pequeno texto sobre o que você aprendeu sobre "modelar" o crescimento.

6. Recursos Adicionais para o Ensino Fundamental:

- **Khan Academy Kids:** Aplicativo e plataforma online com jogos e atividades de matemática para os anos iniciais.
- **Math Playground:** Jogos de matemática para todas as idades do EF.
- **"Show da Luna!" (Série de TV):** Ajuda a desenvolver o pensamento científico e a curiosidade.
- **Livros Infantis sobre Matemática:** Existem muitos livros que contam histórias e ensinam conceitos matemáticos de forma lúdica.
- **Aplicativos de IA que podem conversar:** As próprias plataformas mencionadas (DeepSeek Chat, ChatGPT, Gemini) podem ser usadas para conversar sobre matemática, fazer charadas e contar histórias.

7. Dicas para Educadores (Ensino Fundamental):

Prezado(a) Educador(a),

Sua mediação é crucial para que a "Via das Aproximações Multifárias" e o uso da IA sejam bem-sucedidos no Ensino Fundamental.

7.1. Ambiente de Aprendizagem Lúdico e Exploratório:

- **Crie Contextos Reais:** Conecte os conceitos matemáticos a situações do cotidiano dos alunos (jogos, brinquedos, contação de histórias, projetos simples).

- **Incentive a Curiosidade:** Em vez de focar apenas na resposta, valorize o processo de descoberta, a pergunta “e se…?” e a exploração.
- **Atividades Mão na Massa:** Use materiais concretos, manipulação e construção antes de ir para o digital.

7.2. Integrando a IA de Forma Segura e Guiada:

- **Apresente a IA como Auxiliar:** Introduza a IA como uma ferramenta que ajuda a aprender, a explorar, a criar. Evite apresentá-la como um “corretor de provas”.
- **Prompts Colaborativos:** Ensine os alunos a formularem perguntas que convidem a IA a ser um “parceiro de exploração”. Ex: “IA, o que aconteceria se…” “IA, me ajude a criar…”
- **Foco na “Aproximação”:** Use a IA para explorar a ideia de estimativa, arredondamento e como os modelos matemáticos “aproximam” a realidade. Mostre que nem sempre a resposta “exata” é a única importante.
- **Supervisão Ativa:** Monitore as interações dos alunos com a IA, garantindo o uso adequado e a segurança.
- **Destaque o Pensamento Humano:** Sempre retome a importância da inteligência e da criatividade do aluno. A IA faz o cálculo, o aluno faz a pergunta inteligente e a interpretação.

7.3. Avaliação no Ensino Fundamental com IA:

- **Avalie o Processo de Resolução:** Observe como o aluno tenta resolver o problema antes da IA. Ele desenha? Ele manipula objetos? Ele tenta diferentes estratégias?
- **Compreensão da Explicação da IA:** Peça ao aluno para explicar com suas próprias palavras o que a IA respondeu. Isso revela se houve compreensão ou apenas cópia.
- **Habilidades de Comunicação:** Avalie a capacidade do aluno de fazer perguntas claras à IA e de expressar o que aprendeu.
- **Criatividade nos Projetos:** Valorize a originalidade e o engajamento nos projetos que utilizam a IA.

Ao abraçar esta abordagem, você não apenas ensina Matemática, mas empodera seus alunos a se tornarem pensadores curiosos, críticos e criativos, prontos para desvendar os desafios do futuro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aaboe, Asger (1984). **Episódios da História Antiga da Matemática**. SBM.
- Ahlfors, Lars V. (1979). **Complex Analysis**. Third Edition. MacGraw-Hill.
- Amen, Dr. Daniel G. (2016). **Mude seu Cérebro, Mude seu Corpo**. Editora Best Seller Ltda.
- Andreescu, Titu and Andrica, Dorin (2006). **Complex Numbers from A to ...Z**. Birkhauser.
- Andreescu, Titu and Enescu, Bogdan (2011). **Mathematical Olympiad Treasures**. Birkhäuser. Second Edition.
- Andreescu, Titu and Feng, Zuming (2005). **103 Trigometry Problems**. Birkhauser.
- Andreescu, Titu; Mushkarov, Oleg and Stoyanov, Luchezar (2006). **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Birkhäuser.
- Anton, Howard e Rorres, Chris (2012). **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª Edição, Bookman.
- Apostol, Tom M. (1969). **Calculus**, Vol. II. John Wiley & Sons, INC.
- Aquino Júnior, Francisco de (2010). **A Teologia como Intelecção do Reinado de Deus**. Edições Loyola.
- Araújo, Paulo Ventura (1998). **Geometria Diferencial**. IMPA.
- Aristóteles (2011). **Política**. Martin Claret.
- Ash, Robert B. and Novinger, W. P.(2004). **Complex Variables**. Second Edition. Dover Publications , INC.
- Assis, J. Carlos de (2011). **O Universo Neoliberal em Desencanto**. Ed. Civilização Brasileira.
- Assmann, Hugo (1998, 2012). **Reencantar a Educação:** Rumo à sociedade aprendente. Ed. Vozes. 12ª Edição.
- Bachman, G. and Narici, L. (2000). **Functional Analysis**. Dover.
- Baggio, Antonio Maria (2008). **O Princípio Esquecido/1**. Editora Cidade Nova.
- Bartle, Robert G. (1996). **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. John Wiley & Sons, INC.
- Baxandall, P. and Liebeck, H.(1981). **Differential vector calculus**. Longman.

- Bazaraa, Mokhtar S., Sherali, H. D and Shetty, C. M. (1993). **Nonlinear Programming**: Theory and Algorithms. John Wiley. Second Edition.
- Bohm, David (1980). **A Totalidade e a Ordem Implicada**. Ed. Cultrix.
- Boldrini, J. L. e outros (1980). **Álgebra Linear**. HARBRA. 3ª Edição.
- Bortolossi, H. J. (2011). **Cálculo Diferencial a Várias Variáveis**. Edições Loyola.
- Boyce, William E. e Diprima, Richard C. (1998). **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC. 6ª Edição.
- Boyer, Carl B. (1974). **História da Matemática**. Editora Edgard Blucher Ltda.
- Boyvalenkov, Peter e outros (2007). **Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006**. Gil e VestSeller.
- Bruner, Jerome (1997). **La Educación Puerta de la Cultura**. MachadoLibros.
- Cabrera, Rubén Alva (2014). **Trigonometría, teoria e prática**. Editorial San Marcos. 2ª Edição.
- Capra, Fritjof e Luisi, Pier Luigi (2014). **A Visão Sistêmica da Vida**. Editora Cultrix.
- Capra, Fritjof (1996). **La Trama de la Vida**. Editorial Anagrama.
- Capra, Fritjof (1982). **O Ponto da Mutação**. Editora Cultrix.
- Carlen, Eric A. e Carvalho, Maria C. (2009). **Álgebra Linear:** desde o início. LTC.
- Carmo, Manfredo P. (2010). **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM. 4ª Edição.
- Carmo, Manfredo P. (2008). **Geometria Riemanniana**. IMPA. 4ª Edição.
- Carnielli, Walter e Epstein, R. L. (2009). **Computabilidade, Funções computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática**. Editora UNESP.
- Castellano, Guadalupe (2014). **Matemáticas:** El Alfabeto del Universo. Gualdamazán.
- Castro, Jerónimo Jesus (2010). **Geometria em Olimpíadas de Matemáticas**. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Castro Jr., A. Armando de (2008). **Curso de Teoria da Medida**. IMPA, 2ª Edição.
- Courant, Richard (1965). **Cálculo Diferencial e Integral**, Vol. I e Vol. II. Editora Globo.
- Courant, Richard e Robbins, Herbet (2000). **O que é a Matemática?**. Ed. Ciência Moderna.
- Courant, Richard and Hilbert, David (1953). **Methods of Mathematical Physics, Vol. I**. Interscience Publishers.
- Coutinho, S. C. (1997). **Números Inteiros e Criptografia RSA**. IMPA/SBM.

- Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. (1967). **Geometry Revisited**. The Mathematical Association of America.
- Dean, A. Richard (1974). **Elementos de Álgebra Abstrata**. Livros Técnicos e Científicos.
- Deaux, Roland (2008). **Introduction to the Geometry of Complex Numbers**. Dover Publications, Inc.
- Djukic, D., Jankovic, V., Matic, I. and Petrovic, N.(2011). **The IMO Compendium**. Springer. Second Edition.
- Doering, Claus Ivo e Lopes, Artur O. (2007). **Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA.
- Doidge, Norman (2022). **O Cérebro que se transforma.** Record.
- Dorofeev, G. e outros (1973). **Elementary Mathematics**. Mir e VestSeller.
- Dostoiévski, Fiódor (2009). **Os Irmãos Karamázov**. Editora 34.
- Dostoiévski, Fiódor (2019). **As Grandes Obras**. E-book. Mimética.
- Dostoiévski, Fiódor (2008). **Obra Completa,** 4 vols. Editora Nova Fronteira.
- Dourado, Thiago Augusto S.(2021). **Corpos Finitos e a Hipótese de Riemann:** a demonstração de André Weil. Ed. Livraria da Física.
- Edwards & Penney (1997). **Cálculo com Geometria Analítica,** Vols 2 e 3. Editora Prentice-Hall do Brasil.
- Ellenberg, Jordan (2015). **O Poder do Pensamento Matemático:** A Ciência de como não estar errado. Editora ZAHAR.
- Engel, Arthur (1998). **Problem-Solving Strategies**. Spring-Verlag.
- Evens, Howard (1995). **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp.
- Falconer, Kenneth (2013). **Fractals:** A Very Short Introduction. Oxford University Press. First Edition.
- Falconer, Kenneth (2014). **Fractal Geometry:** Mathematical Foundations and Applications. Wiley. Third Edition.
- Feller, William (1968). **An Introduction to Probability Theory and its Aplications,** Vol 1. John Wiley. Third Edition.
- Fernandes, Angela Maria Vidigal e outros (2009). **Fundamentos de Álgebra**. Editora UFMG. 1ª Edição atualizada.
- Figueiredo, Djairo G. de (1980). **Números Irracionais e Transcendentes**. SBM

- Filho, Daniel C. de Morais (2014). **Manual de Redação Matemática**. Coleção do Professor de Matemática. SBM.
- Fisher, Max (2023). **A Máquina do Caos**. Todavia.
- Fletcher, T. J. (1972). **Ensino Moderno da Matemática.** Volumes: I, II, III e IV. Ao Livro Técnico S. A.
- Fomin, D. e outros (2012). **Círculos Matemáticos**. IMPA.
- Fomin, S. (1995). **Sistemas de Numeração**. Atual Editora.
- Fonteles, José N. C.(2024). **Aproximações Multifárias:** uma introdução. Ed. Vortex.
- Fonteles, José Nazareno Cardeal (2016). **Matemática para o ENEM:** estratégias ativas de aprendizagem. Editora Nova Aliança.
- Fonteles, José N. C. e Fonteles, R. T. (2019). **O Método CEV ATIVO:** Um novo modelo de ensinar/aprender. CEV Sistema de Ensino Ativo e Editora.
- Fossa, John A. (2014). **Teoria Intuicionista da Educação Matemática**. Editora Livraria da Física.
- Francisco, Papa (2015). **Laudato Si**. Paulinas.
- Frankl, Vitor E. (2017). **A Presença ignorada de Deus**. Editora Vozes. 18ª Edição(revista).
- Freire, Paulo (2013). **Pedagogia do Oprimido**. ePUB – Paz e Terra.
- Freire-Maia, Newton (2008). **Verdades da Ciência e outras Verdades**. Editora UNESP.
- Frenkel, Edward (2016). **Amor y matemáticas**. Editorial Ariel.
- Gardiner, A. (1997). **The Mathematical Olympiad Handbook**. Oxford University Press.
- Garding, Lars (1981). **Encontro com a Matemática**. Editora Universidade de Brasília.
- Gel'fand, I. M. (1989). **Lectures on Linear Algebra**. Dover.
- Gomes, Jonas e Velho, Luiz (1998). **Computação Gráfica,** Vol. 1. IMPA.
- González, Alejandra Adela (2011). **Simone Weil y Étienne de La Boétie: Ensaios sobre el deseo de libertad y la voluntad de servidumbre.** Ediciones del Signo.
- Graham, Ronald L. e outros (1995). **Matemática Concreta:** Fundamentos para a Ciência da Computação. LTC. 2ª Edição.
- Gramsci, Antonio (2017). **Cadernos do Cárcere (6 vols.)**. Civilização Brasileira.
- Griffiths, David J.(2011). **Mecanica Quântica.** 2ª Edição.

- Guimarães, Caio dos Santos (2008). **Números Complexos e Polinômios**. Editora Vestseller. 1ª Edição.
- Hahn, Liang-shin (1994). **Complex Numbers and Geometry**. The Mathematical Association of America.
- Halmos, Paul R. (1978). **Espaços Vetoriais de Dimensão Finita**. Editora Campos.
- Halmos, Paul R. (1970). **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Editora Polígono.
- Halmos, Paul R. (2017). **Introduction to Hilbert Space and the theory of Spectral Multiplicity**. Dover. Second Edition.
- Han, Byung-Chul (2018). **No Enxame:** perspectivas do digital. Editora Vozes.
- Han, Byung-Chul (2021). **Infocracia**. Editora Vozes.
- Han, Byung-Chul (2022). **Não-coisas**. Editora Vozes.
- Hari, Johann (2023). **Foco Roubado.** Vestígio.
- Hathaway, M. e Boff, L. (2012). **O Tao da Libertação**. Ed. Vozes.
- Hawking, Stephen. (1996). **Uma Breve História do Tempo**. Edição digital: 2015, Ed. Intrínseca Ltda.
- Hefez, Abramo (2002). **Curso de Álgebra,** Vol. 1. IMPA. 3ª Edição.
- Herstein, I. N. (1975). **Topics in Algebra**. John Wiley & Sons. Second Edition.
- Hilbert, David (2003). **Fundamentos de Geometria**. Gradiva.
- Hinkelammert, Franz J. (1988). **Crítica à Razão Utópica**. Edições Paulinas.
- Honig, Samuel Chaim (1981). **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. Editora Guanabara Dois S. A.
- Honig, Samuel Chaim (1976). **Aplicações da Topologia à Análise**. IMPA.
- Iezzi, Gelson(2013). **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 6. Atual Editora. 8ª Edição.
- Izmailov, Alexey e Solodov, M. (2005). **Otimização – Vol. 1**. IMPA.
- Izmailov, Alexey e Solodov, M. (2007). **Otimização – Vol. 2**. IMPA.
- Instituto de Ciencias y Humanidades (2012). **Trigonometría, plana y esférica e introducción al cálculo**. Asociación Fondo de Investigadores y Editores. 2ª Edição.
- Iório, Valéria (2005). **EDP, Um Curso de Graduação**. IMPA. 2ª Ed.
- James, Barry R. (1981). **Probabilidade:** um curso intermediário. IMPA.
- Johnson, Roger A. (1960). **Advanced Euclidean Geometry**. Dover Publications, Inc.

- Jonas, Hans (2017). **Ensaios Filosóficos**. Paulus.
- Kaplan, Wilfred (1972). **Cálculo Avançado.** Vols. I e II. EDGARD BUCHER Ltda.
- Kissinger, Henry A. e outros (2023). **A Era da IA.** Alta Books.
- Kung, Hans (2009). **O Princípio de Todas as Coisas**. Editora Vozes. 2ª Edição.
- Kurzweil, Ray (2005). **The Singularity is Near:** when humans transcend biology. Penguin Books.
- Kurzweil, Ray (2014). **Como Criar uma Mente:** os segredos do pensamento humano. Editora ALEPH.
- Lagrange, J. Louis (2013). **Lições sobre matemáticas elementares**. Editora Livraria da Física.
- Lakoff, George and Johnson, Mark (2003). **Metaphors We Live By**. University of Chicago Press.
- Lang, Serge (1972). **Estruturas Algébricas**. Ao Livro Técnico S.A.- MEC.
- Lee, Kai-Fu (2019). **Inteligência Artificial.** Globo Livros.
- Lang, Serge (1970). **Cálculo,** Vol. 1 e Vol. 2. Ao Livro Técnico S.A.
- Leithold, Louis (1982). **O Cálculo com Geometria Analítica,** Vol. 1. HARBRA. 2ª Edição.
- Levitin, Daniel J. (2014). **A Mente Organizada:** como pensar com clareza na época da sobrecarga da informação. Editora Objetiva.
- Lewin, J. and Lewin, Myrtle (1993). **An Introduction to Mathematical Analysis**. McGraw-Hill International. Second Edition.
- Lidski, V. y otros (1978). **Problemas de Matematicas Elementales**. Editorial Mir.
- Lima, Elon Lages (1989). **Curso de Análise,** Vol. 2. IMPA. 3ª Edição.
- Lima, Elon Lages (2004). **Curso de Análise,** Vol 1. IMPA. 13ª Edição.
- Lima, Elon Lages (2004). **Análise Real,** Vols 1 e 2. IMPA.
- Lima, Elon Lages (2011). **Análise Real,** Vol. 3. IMPA. 3ª Edição.
- Lima, Elon Lages (2005). **Espaços Métricos**. IMPA. 4ª Edição.
- Lima, Elon Lages e outros (2007). **A Matemática do Ensino Médio,** Vols. 1, 2, 3 e 4. Coleção do Professor de Matemática. SBM.
- Lins Neto, Alcides (1993). **Funções de uma Variável Complexa**. IMPA.
- Lovelock, James (2009). **Gaia:** Alerta final. Editora Intrínsica. 1ª Edição. Edição digital: 2020.
- Loveluck, Benjamin (2018). **Redes, Liberdades e Controle**. Editora Vozes.
- Lozansky, Edward and Rosseau, Cecil (1996). **Winning Solutions**. Springer-Verlag.

- Mancini, Roberto (2000). **Existência e Gratuidade**. Paulinas.
- Manfrino, R. B.; Ortega, J. A. G. and Delgado, R. V. (2009). **Inequalitities:** A Mathematical Olympiad Approach. Birkhäuser.
- Matematica.obmep.org.br – Portal da Matemática Obmep.
- Maturana, Humberto R. e Varela, Francisco J. (2011). **A Árvore do Conhecimento:** as bases biológicas da compreensão humana. Editora Palos Athena. 9ª Edição.
- Maturana, Humberto R. (2008). **El Sentido de Lo Humano**. J. C. SÁEZ.
- Medeiros, L. M. e Mello, E. A. (2003). **A Integral de Lebesgue**. UFRJ/IM.
- Medviédev, G. N. (2010). **Problemas de Matemática:** Olimpíadas y Exames de Admissión. URSS. Tradución y edición em español: KRASAND.
- Meyer, Paul L. (1975). **Probabilidade:** Aplicações à Estatística. LTC.
- Mlodinow, Leonard (2004). **A Janela de Euclides.** Geração Editorial.
- Moise, Edwin E. e Downs Jr.,Floyd L. (1971). **Geometria Moderna,** Partes I e II. Editora Edgard Blücher Ltda.
- Moise, Edwin E. (1990). **Elementary Geometry from na Advanced Standpoint**. Addison--Wesley Publishing Company. Third Edition.
- Monteiro, L. H. Jacy. (1971). **Elementos de Álgebra**. Ao Livro Técnico S.A.
- Morin, Edgar (1995). **Introdução ao Pensamento Complexo**. Instituto Piaget.
- Morin, Edgar (2002). **A Cabeça Bem-Feita:** Repensar a reforma, reformar o pensamento. Bertrand Brasil, 7ª Edição.
- Morin, Edgar (2003). **O Método V. A Humanidade da Humanidade – A Identidade Humana**. Publicações Europa-América.
- Morin, Edgar (2013). **A Via para o Futuro da Humanidade**. Bertrand Brasil.
- Nagel, Ernest e Newman, James R. (2009). **A Prova de Godel**. Editora Perspectiva S.A.
- Neto, Sérgio Lima (2013). **A Matemática no Vestibular do ITA**. Editora VestSeller.
- Neto, Sérgio Lima (2011). **A Matemática no Vestibular do IME**. Editora VestSeller.
- Niven, Ivan Morton (1984). **Números:** Racionais e Irracionais. SBM.
- Nove, Alec (1989). **A Economia do socialismo possível**. Editora Ática.
- Nussenzveig, H. Moysés (2014). **Curso de Física Básica 2**. 5ª Edição. Blucher.

- O'Neil, Cathy (2020). **Armas de Destrucción Matemática:** como el Big Data alimenta la Desigualdad y amenaza la Democracia. Capitán Swing Libros. Edición en ebook.
- Pagola, José Antonio (2010). **Jesus:** Aproximação Histórica. Editora Vozes.
- Pascal, Blaise (2002). **Pensamentos**. eBooksBrasil.org. Fonte digital: www.ngarcia.org.
- Portais do IME e do ITA. Consultas feitas em 2017, 2018 e 2019.
- Paulos, John Allen (2016). **La Vida es Matemática**. Tusquets Editores.
- Penrose, Roger (1993). **A Mente nova do Rei:** computadores, mentes e as leis da física. Editora Campus.
- Penrose, Roger (2016). **El Camino a la Realidad**. Penguin Random House.
- Permutter, David (2013). **A Dieta da Mente**. Editora Paralela.
- Pierson, Lillian (2019). **Data Science para Leigos**. Alta Books, 2ª Edição.
- Piketty, Thomas (2020). **Capital e Ideologia**. Editora Intrínseca Ltda.
- Rasvan, G. and Andreescu, T. (2007). **Putnam and Beyond**. Springer.
- Ratey, John J. and Hagerman, Eric (2012). **Corpo Ativo, Mente Desperta**. Objetiva.
- Ricoeur, Paul (2011). **Hermenêuticas e Ideologias**. Editora Vozes.
- Ricoeur, Paul (2006). **A Hermenêutica Bíblica**. Edições Loyola.
- Ricoeur, Paul (2020). **Autobiografia Filosófica**. Editorial Docência.
- Rocha, João C. Castro Rocha(2021). **Guerra Cultural e Retórica do Ódio**. Caminhos.
- Roque, Tatiana (2012). **História da Matemática**. ZAHAR.
- Rudin, Walter (1971). **Princípios de Análise Matemática**. Ao Livro Técnico S.A.
- Rudin, Walter (1987). **Real and Complex Analysis**. MacGraw-Hill, Third Edition.
- Rudin, Walter (1991). **Functional Analysis**. MacGraw-Hill, Second Edition.
- Russel, Bertrand (1977). **Misticismo e Lógica e outros ensaios**. Zahar Editores.
- Russell, Bertrand (2005). **Caminhos para a Liberdade.** Martins Fontes.
- Russel, Stuart J. e Norvig, Peter (2022***).*** **Inteligência Artificial:** uma abordagem Moderna. 4ª Edição. LTC.
- Said, Edward W. (2011). **Cultura e Imperialismo**. Companhia das Letras.
- Sahtouris, Elisabet (1991). **Gaia:** do Caos ao Cosmos. Editora Interação.

- Salsburg, David (2009). **Uma Senhora Toma Chá...:** como a estatística revolucionou a ciência no século XX. ZAHAR.
- Saraiva, Paulo e Murteira, José (2013). **Equações de Diferenças:** Introdução teórica e aplicações. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Sauttchuk, Inez (2012). **Perca o Medo de Escrever:** da frase ao texto. Editora Saraiva.
- Scheinerman, Edward R. (2017). **Matemática Discreta:** Uma Introdução. CENGAGE Learning. 3ª edição.
- Seife, Charles (2012). **Os Números (não) mentem:** como a matemática pode ser usada para enganar você. ZAHAR.
- Senge, Peter M.(2009). **A Quinta Disciplina** . BestSeller.
- Sheldrake, Rupert (2013). **Uma nova Ciência da Vida**. Cultrix.
- Sheldrake, Rupert (2014). **Ciência sem Dogmas:** A nova Revolução Científica e o Fim do Paradigma Materialista. Cultrix.
- Soares, Marcio G. (1999). **Cálculo em uma variável complexa**. IMPA.
- Soifer, Alexander (2009). **Mathematics as Problem Solving**. Spring. Second Edition.
- Spinoza (2016). **Tratado Teológico-político**. Editora Perspectiva.
- Spivak, Michael (1994). **Calculus**. Publish or Perish, Inc. Third Edition.
- Stein, Elias M. & Shakarchi, Rami (2005). **Real Analysis**. Princeton University Press.
- Stewart, Ian (2006). **Cartas a Uma Jovem Matemática**. Relógio D´Água Editores.
- Stewart, Ian (2007). **Why Beauty is Truth**. Basic Book.
- Stewart, Ian (2014). **Em Busca do Infinito**. ZAHAR.
- Stewart, Ian (2014). **Os Maiores Problemas Matemáticos de Todos os Tempos**. ZAHAR.
- Stewart, Ian (2019). **Desbravadores da Matemática**. ZAHAR.
- Suleyman, Mustafa e Bhaskar, M.(2023). **A Próxima Onda**. Editora Record.
- Sumpter, David (2019). **Dominados pelos Números**. Bertrand Brasil.
- Suprún, V. P. (2011). **Matemática para Estudiantes Preuniversitarios:** Métodos no estándares para la resolución de ecuaciones e desigualdades. URSS. Tradución y edición em español: KRASAND.
- Suprún, V. P. (2011). **Matemática para Estudiantes Preuniversitarios:** Problemas de alta dificuldade. URSS. Tradución y edición em español: KRASAND.

- Swokowski, Earl W. (1983). **Cálculo com Geometria Analítica**, Vol. 1. MacGraw-Hill.
- Tcherneva, Pavlina R.(2020). **The Case for a Job Guarantee**. Polity.
- Tiel, Jan van (1984). **Convex Analysis**. John Wiley.
- Vicente, Paulo Nunes (2023). **Os Algoritmos e Nós.** Fundação Francisco Manuel dos Santos.
- Vigotski, L. S. (2007). **A Formação Social da Mente**. Martins Fontes. 7ª Edição, 8ª Reimpressão.
- Vigotski, L. S. (2008). **Pensamento e Linguagem**. Martins Fontes. 4ª Edição, 4ª Reimpressão.
- Vorobiov, N. N. (1974). **Numeros de Fibonacci**. Editorial Mir(español).
- Waldrom, Jeremy (2003). **A Dignidade da Legislação**. Martins Fontes.
- Weil, Simone (1993). **A Gravidade e a Graça**. Martins Fontes.
- Weil, Simone (2016). **Carta a um Religioso.** Editora Vozes.
- Weil, Simone (2019). **Espera de Deus.** Editora Vozes.
- White, A. J. (1973). **Análise Real:** uma introdução. Editora EDGARD BLUCHER Ltda.
- Wiener, Norbert (1970). **Cibernética**. Editora Polígono.
- Williams, James (2021). **Liberdade e Resistência na Economia da Atenção.** Arquipélago.
- Williamson, Richard E. e outros (1976). **Cálculo de Funções Vetoriais,** Vol.1. LTC.
- Williamson, Richard E. e outros (1975). **Cálculo de Funções Vetoriais,** Vol.2. LTC.
- Yee, Lee Peng and Bin, Xiong (2007). **Mathematical Olympiad in China:** Problems and Solutions. World Scientific.
- Zeitz, Paul (2007). **The Art and Craft of Problem Solving**. John Wiley & Sons.
- Zhan, Maurício (2011). **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Editora Ciência Moderna.
- Zornig, Peter (2011). **Introdução à Programação não Linear**. Editora UNB.
- Zubiri, Xavier (2010). **Natureza, História, Deus**. É Realizações Editora.
- Zubiri, Xavier (2011). **Inteligência e Realidade**. É Realizações Editora.
- Zubiri, Xavier (2011). **Inteligência e Logos**. É Realizações Editora.
- Zubiri, Xavier (2011). **Inteligência e Razão**. É Realizações Editora.
- Zubiri, Xavier (2012). **Cinco Lições de Filosofia**. É Realizações Editora.
- Zuboff, Shoshana (2020). **A Era do Capitalismo de Vigilância.** Intrínseca.



SOBRE O AUTOR

José Nazareno Cardeal Fonteles graduou-se em Matemática e Medicina pela UFPI, em 1977/78. Realizou pós-graduação em Bioengenharia na USP em 1982. Também fez Residência Médica em Ribeirão Preto - SP e obteve o título de especialista pela SBOT em Ortopedia e Traumatologia, em 1984. Concluiu o mestrado em Matemática pela UFC em 1998. É professor aposentado de Matemática da UFPI. Foi professor de curso pré-vestibular e do Ensino Básico no período de 1972 a 2002, tendo lecionado todo o conteúdo programático de Física e Matemática para os Vestibulares da década de 1970. Nesse mesmo período exerceu, também, a função de coordenador pedagógico. Atuou como Ortopedista, por vários anos, no Pronto-Socorro do HGV, no antigo Hospital Casamater e nas clínicas COT e COPIL de Teresina, das quais foi sócio fundador. Exerceu mandatos de deputado estadual e deputado federal pelo Piauí. Foi Secretário de Saúde do Estado do Piauí. Fundador e presidente da Frente Parlamentar da Segurança Alimentar e Nutricional do Congresso Nacional, de 2007 a 2014. Um livro que reflete várias iniciativas relacionadas com esse período é EM DEFESA DO DIREITO À ALIMENTAÇÃO ADEQUADA, publicado pela Câmara Federal em 2012. Ajudou a fundar, com apoio da FAO, a Frente Parlamentar contra a Fome da América Latina e Caribe. Foi membro do Conselho Consultivo dessa Frente até 2017. Participa da direção do grupo CEV do Piauí desde 2014. E desde abril de 2025 é coordenador-geral do Movimento Fraternidade Cristã. Publicou, em coautoria com outros: *A Soberania Popular e o Equilíbrio dos Poderes*; *Estudio Sobre El Concepto de Soberanía Alimentaria*; *Resgatar a Dignidade da Política*. Também publicou, em coautoria com Rafael Fonteles, o livro **O Método CEV ATIVO: Um novo modelo de ensinar/aprender**. Publicou ainda, em 2024, a obra **Aproximações Multifárias: uma introdução.** É natural de Acaraú-CE, mas veio morar em Teresina em 1969. É casado com Nereida, pai de Danielle, Deborah e Rafael e avô de Teresa, Benjamim, Thomaz, Elisa, Mateus, Daniel e Pedro.

NOTA SOBRE A CAPA

O rosto mostrado na capa é inspirado na genial Hipácia de Alexandria, matemática, filósofa e cientista do século V. Ela foi morta barbaramente, por monges. Por isso, é chamada também de mártir da ciência. Há um capítulo no livro **A Janela de Euclides** sobre Hipácia que vale a pena ser lido. Ele tem o interessante título: *Uma Bela Mulher, uma Biblioteca e o Fim da Civilização*. Ela é também considerada a primeira matemática com registros na historia. Para isso consulte o **Código QR(I)**. Para acessar uma breve história dessa extraordinária mulher consulte o **Código QR(II)**, que foi publicado em 2019. O título dele é *Hipácia de Alexandria, A Mártir da Ciência.*

QR (II) QR (I)

ÍNDICE REMISSIVO

A

- **Ahlfors, Lars V.:** 701
- **Álgebra:** 6, 8, 408, 417, 483, 615, 701, 703, 704
  - **Abstrata:** 8, 703
  - **De Boole:** 8, 9
  - **Linear:** 9, 271, 315, 380, 381, 612, 631, 679, 701, 702
- **Algébrico (Número):** 358, 445, 494
- **Algoritmo(s):** 6, 7, 8, 12, 181, 187, 212, 218, 269, 362, 386, 387, 453, 604, 608, 664, 681
  - **De Euclides (divisão):** 61, 123, 453
  - **De Newton (aproximação de raízes):** 574, 575, 602
  - **De Rabin (criptografia):** 416
- **Almagesto:** 224
- **Amplitude (Onda Poligonal):** 644, 645, 648
- **Análise:** 6, 8, 419, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 606, 626, 701, 702, 705, 706
  - **Complexa:** 419, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 701
  - **Real:** 705, 706
- **Analítica (Função):** 469, 529, 530, 531, 533, 534, 535, 571, 622, 679
- **Anel:** 482, 483, 490
  - **Comutativo:** 490
  - **De Integridade:** 482, 483, 493
- **Ângulo(s):** 224, 229, 230, 231, 234, 235, 236, 240, 241, 243, 244, 248, 251, 254, 255, 257, 259, 261, 262, 283, 284, 285, 290, 292, 296, 298, 301, 302, 305, 308, 309, 311, 313, 318, 323, 325, 326, 331, 332, 339, 340, 341, 343, 345, 346, 351, 352, 359, 388, 389, 400, 403, 404, 405, 407, 408, 409, 429, 431, 515, 549, 563, 681, 685, 686
  - **Conformes:** 529, 530
  - **Inscrito:** 298, 311, 396
  - **Notáveis:** 325, 352
  - **Trissecção de um:** 9, 359

- **Anton, Howard:** 271, 317, 387, 701
- **Apresentação do Livro:** 6
- **Aproximação:** 8, 12, 137, 218, 386, 579, 584, 591, 596, 602, 617, 627, 630, 631, 665, 675, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691
    - **Linear:** 602, 604, 677
    - **Poligonal:** 473, 474, 477, 478, 479, 637, 638, 639
    - **Polinomial:** 466, 467, 473, 571
    - **Sucessiva(s):** 6, 11, 12, 123, 124, 182, 218, 305, 350, 416, 485, 574, 575, 602, 604, 679
    - **Teoria da(s):** 7, 12, 472
- **Aproximações Multifárias (Via das):** 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 24, 25, 36, 45, 69, 94, 124, 129, 137, 146, 183, 218, 359, 386, 391, 405, 408, 417, 429, 470, 473, 520, 531, 534, 569, 578, 596, 628, 629, 665, 666, 675, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693
- **Arco Cosseno (arccos):** 335, 336, 337, 339, 353
- **Arco Seno (arcsen):** 335, 336, 337, 339, 341, 353
- **Arco Tangente (arctg):** 335, 336, 337, 339, 340, 341, 353, 473, 580
- **Arco (Comprimento):** 279, 280
- **Área:** 233, 234, 235, 236, 253, 254, 255, 256, 257, 266, 267, 280, 282, 283, 284, 287, 288, 289, 297, 308, 309, 318, 320, 331, 341, 436, 437, 474, 475, 477, 478, 480, 577, 581, 582, 583, 587, 588, 589, 590, 591, 608, 630, 637, 682
- **Aristóteles:** 701
- **Aritmética:**
    - **Média:** 33, 36, 38, 41, 44, 54, 59, 127, 212, 288, 305, 546, 549, 569, 570, 621, 630, 678
    - **Progressão:** 59, 144, 180, 244, 305, 495, 499, 513
    - **Teorema Fundamental da:** 172, 302, 412, 425
- **Artes (Matemática como):** 10, 398, 531
- **Assmann, Hugo:** 701
- **Autovalores:** 381, 382, 384, 449, 463, 464, 612, 613
- **Autovetores:** 381, 382, 449, 464
- **Axioma da Completude:** 125

B

- **Bachman, G.:** 701
- **Baire, Teorema de:** 615
- **Banach, Espaço de:** 615
- **Baricentro:** 259, 285, 331, 681
- **Bases:**
  - **Canônicas:** 268, 271, 374
  - **De um espaço vetorial:** 268, 269, 270, 271, 275, 314, 317, 318, 618, 624, 656, 659
  - **Em sistemas de numeração:** 60, 61, 127, 219, 220, 221, 222
- **Bartle, Robert G.:** 123, 626, 701
- **Bazaraa, Mokhtar S.:** 600, 702
- **Beleza (da Matemática):** 6, 11, 12, 45, 137, 299, 305, 386, 387, 398, 416, 429, 531, 571, 579, 591, 596, 631, 675, 679, 680, 681, 690
- **Benchman, G.:** 624
- **Bernoulli, Desigualdade de:** 347, 552, 560
- **Binet, Fórmula de:** 67, 69, 471
- **Binômio de Newton:** 109, 166, 323, 345, 373, 446, 472, 494, 506, 508, 561, 570
- **Bissetriz (Teorema da):** 226, 350
- **Bohm, David:** 8, 579, 679, 690
- **Bolzano, Teorema de:** 492
- **Bolzano-Weierstrass, Teorema de:** 83, 92, 134, 273
- **Bortolossi, H. J.:** 600, 702
- **Boyer, Carl B.:** 224, 391, 702
- **Brahmagupta, Teorema de:** 46, 256, 446
- **Bruner, Jerome:** 11, 702

C

- **Cálculo:** 6, 160, 161, 162, 212, 213, 215, 224, 466, 473, 474, 533, 566, 584, 679
  - **Diferencial:** 6, 224, 615, 679
  - **Integral:** 212, 474, 584, 679
- **Cantor, Georg:** 6, 135, 137, 616

- **Capacidade (Sistema de Numeração):** 12, 219, 220, 221, 222
- **Capra, Fritjof:** 702
- **Catenária:** 10, 184, 185
- **Cauchy:** 8
  - **Condições de Cauchy-Riemann:** 529
  - **Fórmula Integral de Cauchy:** 534, 535
  - **Sequências de:** 93, 123, 124, 189, 273, 378, 615, 622, 680
  - **Teste de (séries):** 90
  - **Teorema de (funções complexas):** 589
- **Ceva, Teorema de:** 226, 228, 229, 231, 232, 246
- **ChatGPT:** 10, 386, 675, 692
- **Chió, Regra de:** 443
- **Ciência:** 8, 10, 578, 675, 679, 680, 681, 690
  - **Computacional:** 6, 7
  - **De Dados:** 7, 8, 9
  - **Da Aproximação:** 8, 218, 578, 579, 596, 679, 680, 693
  - **Física:** 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707
- **Coeficientes de Fourier:** 619, 624
- **Complexidade:** 12, 578, 688
- **Computabilidade:** 702
- **Computação:** 6, 7, 8, 9, 12, 211, 219, 269, 315, 386, 584, 608, 631, 679
  - **Gráfica:** 703
- **Conceito(s):** 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 44, 45, 67, 82, 83, 85, 92, 93, 98, 120, 121, 125, 127, 133, 137, 146, 161, 198, 269, 270, 271, 273, 274, 279, 318, 367, 380, 386, 391, 408, 470, 473, 479, 481, 485, 520, 529, 534, 545, 563, 569, 598, 599, 601, 608, 614, 615, 617, 618, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 631, 638, 645, 659, 665, 675, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691
- **Concordância (Geometria):** 228
- **Condições de Cauchy-Riemann:** 529
- **Congruência:** 255, 370, 412
- **Conjunto(s):** 6, 8, 9, 11, 44, 45, 82, 83, 84, 85, 92, 93, 98, 120, 122, 127, 133, 134, 135, 136, 137, 145, 270, 271, 272, 273, 276, 367, 368, 415, 416,

426, 448, 450, 480, 481, 482, 483, 485, 509, 531, 534, 545, 560, 563, 599, 600, 604, 606, 608, 615, 616, 618, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 631

- **Compacto:** 134, 135, 273, 276, 378, 485, 600, 608, 615, 630
- **De Cantor:** 135, 136, 137, 616
- **De medida nula:** 122, 135, 136, 199, 204, 278, 626
- **Denso:** 85, 92, 123, 273, 494, 614, 615
- **Discreto:** 85, 92, 127, 272
- **Enumerável:** 85, 92, 122, 127, 136, 273, 319, 426, 494, 614, 618, 624, 645
- **Equipotente:** 92, 137, 426
- **Finito:** 85, 92, 136, 270, 271, 314, 315, 378, 415, 438, 483, 486, 555, 596, 615
- **Fechado:** 85, 134, 135, 276, 358, 485, 534, 545, 599, 615, 627, 630, 632, 637
- **Limitado:** 85, 134, 135, 203, 204, 273, 378, 485, 535, 545, 599, 615, 625, 626, 630
- **Mensurável:** 625, 626, 627, 630
- **Não enumerável:** 92, 122, 135, 137, 426, 614
- **Vazio:** 85, 136, 615, 616

- **Continuidade:** 132, 133, 134, 159, 160, 161, 163, 164, 196, 197, 198, 204, 205, 206, 207, 276, 311, 473, 477, 478, 479, 485, 545, 582, 614, 615, 623, 625, 626, 627, 631, 638, 645
  - **Uniforme:** 135, 197, 198, 205, 478, 479, 614, 622, 625
- **Convolução:** 621, 630, 631
  - **Discreta:** 631
  - **Núcleo da:** 621, 631
- **Coordenadas:**
  - **Baricêntricas:** 317, 318, 319, 320
  - **Cartesianas:** 268, 317, 400, 406, 473, 474, 576, 592, 640
  - **Polares:** 183, 584
- **Corpo:** 125, 368, 412, 413, 481, 482, 483, 490, 494
  - **Ordenado:** 125, 358
- **Corolário(s):** 29, 83, 134, 198, 205, 395, 414, 587

- **Coseno (cos):** 236, 311, 335, 467, 469, 470, 531, 549, 618
- **Cotangente (cotg):** 236, 335
- **Cramer, Regra de:** 436
- **Critério(s):** 89, 90, 127
  - **De Eisenstein:** 492, 508
  - **De Irredutibilidade:** 492
  - **De Weierstrass:** 621, 622
- **Criptografia:** 10, 416, 687
- **Curva(s):** 10, 61, 184, 185, 207, 218, 279, 288, 358, 417, 473, 474, 475, 485, 530, 533, 534, 576, 577, 605, 606, 617, 680, 681, 682, 685, 687
  - **Elíptica:** 417
  - **Fechada:** 288, 585, 587, 589, 591
  - **De Gauss:** 44, 576, 577, 578, 579, 584, 682, 687
  - **De Kohr:** 61
  - **Logarítmica:** 183, 280
  - **Parametrizada:** 279, 280, 288, 533
  - **Suave:** 533, 585, 587

D

- **Decaimento Radioativo:** 160
- **DeepSeek R1:** 386, 675, 692
- **Definição(ões):** 29, 82, 83, 85, 87, 88, 92, 93, 120, 121, 127, 133, 134, 156, 158, 199, 200, 202, 203, 204, 206, 233, 236, 264, 270, 273, 276, 279, 317, 336, 346, 367, 368, 372, 377, 392, 394, 408, 415, 480, 481, 483, 485, 492, 499, 533, 534, 554, 565, 599, 615, 625, 626, 627, 630, 638, 640, 645, 653, 655, 656, 677
- **Democracia:** 10, 579, 680
- **Demonstração(ões):** 6, 8, 11, 81, 83, 84, 87, 161, 162, 163, 206, 208, 209, 258, 288, 316, 359, 389, 414, 478, 479, 485, 486, 487, 488, 489, 493, 590, 615, 622, 675
- **Derivada:** 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 165, 167, 168, 196, 197, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 219, 220, 221, 276, 277, 278, 279, 280, 312, 313, 332, 333, 351, 386, 463, 464, 469, 470, 492, 493, 501, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 533, 547, 548, 552, 557, 575, 599, 600, 601, 602, 605, 615, 616, 645, 646, 647, 648, 650, 651, 652, 664, 665, 681

    - **Parcial:** 276, 277, 278, 582, 584, 585, 599, 600, 601, 602, 605
- **Desvio Padrão:** 44, 576, 577
- **Diagonalização Ortogonal:** 384
- **Diferencial:** 157, 171, 213
- **Dilatação (Homotetia):** 381
- **Dimensão:**
    - **Da Rede:** 362
    - **Do Espaço:** 270, 271, 272, 314, 595, 596, 614, 615, 618, 624, 656, 659, 682
- **Disco de Poincaré:** 9, 360, 404, 405, 682, 687
- **Distância:** 272, 279, 315, 318, 362, 367, 394, 404, 405, 419, 425, 474, 609, 616, 659
- **Divergência (Séries):** 88, 89, 90, 501
- **Domínio de Integridade:** 482, 483
- **Dostoiévski, Fiódor:** 703

E

- **Ecossistema Cultural:** 666
- **Edwards & Penney:** 91, 703
- **Einstein, Albert:** 10, 520
- **Eisenstein, Critério de:** 492, 508
- **Elipse:** 184, 267, 401, 472, 588
- **Ellenberg, Jordan:** 703
- **Engel, Princípio Mínimo de:** 55, 56, 59, 127, 294
- **Equação(ões):**
    - **Algébricas:** 496, 517, 567
    - **Características:** 68, 381
    - **Diofantinas:** 46, 51, 416, 453, 678
    - **Diferenciais:** 213, 464, 624
    - **Lineares:** 374, 602
    - **Paramétricas:** 279
    - **Polinomiais:** 417, 484, 490, 494, 495, 498, 509, 511, 513, 526, 536, 538, 541, 549, 551, 552, 553, 554, 555, 560, 561, 565, 567, 570, 571
    - **Recíprocas:** 498, 499, 509, 558

    - **Trigonométricas:** 239, 340, 341, 342, 345, 347, 551
- **Erdős-Mordell, Desigualdade de:** 36, 45, 258, 259, 296, 681
- **Erro (Função):** 581
- **Esfera de Riemann:** 402
- **Escher (Artista):** 407
- **Estatística:** 8, 9, 42, 44, 119, 577
- **Estereográfica (Projeção):** 402
- **Euler:** 6, 224, 369
    - **Fórmula de:** 6, 369, 370, 371, 408, 531, 571
    - **Função Totiente de:** 414
    - **Teorema de (Teoria dos Números):** 413, 415
- **Eudoxus:** 212

F

- **Fatoração:** 11, 25, 26, 32, 46, 48, 416, 489, 490
    - **De Matrizes:** 381
    - **De Polinômios:** 490
    - **QR:** 315
- **Fejér, Teorema de:** 479, 621, 622
- **Feller, William:** 703
- **Fermat:** 162
    - **Pequeno Teorema de:** 413
    - **Último Teorema de:** 9, 417
- **Feynman, Richard:** 10, 224
- **Fibonacci, Leonardo:** 69
- **Física:** 7, 8, 9, 259, 331, 386, 532, 572, 681
- **Fomin, D.:** 703
- **Fonteles, José N. C.:** 1, 5, 711
- **Fonteles, Rafael:** 6, 711
- **Fórmulas de Moivre:** 369, 372, 377, 379, 408, 410, 423, 449, 500, 506, 570
- **Fourier, Jean Baptiste Joseph:** 629
    - **Séries de:** 91, 198, 515, 532, 613, 618, 621, 622, 624, 629, 682

    - **Transformada de:** 629
- **Frações:**
    - **Contínuas:** 126, 142, 143, 193
    - **Irredutíveis:** 100
- **Função(ões):** 10, 11, 44, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 91, 97, 98, 112, 120, 121, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 219, 220, 221, 236, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 311, 312, 333, 334, 336, 337, 338, 339, 341, 342, 343, 345, 349, 350, 351, 352, 353, 356, 357, 374, 375, 378, 380, 381, 386, 402, 403, 406, 407, 414, 417, 432, 433, 434, 435, 438, 440, 441, 446, 447, 448, 449, 453, 454, 456, 457, 458, 463, 464, 466, 467, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 483, 485, 486, 487, 488, 492, 494, 501, 505, 513, 517, 520, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 553, 557, 562, 563, 574, 575, 576, 577, 578, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 588, 595, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 609, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 631, 632, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 677, 679, 680, 681, 682, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691
    - **Afim:** 157, 271, 380, 546, 632
    - **Analítica:** 469, 529, 530, 531, 533, 534, 535, 571, 622, 679
    - **Característica:** 434, 625, 627
    - **Composta:** 133, 160, 221, 380, 448, 470, 528, 530, 557
    - **Convexa:** 545, 546, 547, 548, 549, 550, 557, 574, 599, 600, 603, 604, 613
    - **Côncava:** 546, 547, 549, 550
    - **De Ativação:** 185, 187, 188, 216
    - **De Euler:** 236, 369, 370, 371, 408, 571
    - **De Fibonacci:** 182, 554
    - **De Frobenius:** 494
    - **Densidade de Probabilidade:** 580
    - **Derivável:** 157, 163, 206, 207, 492, 528, 615, 639
    - **Descontínua:** 197, 204, 623

- **Diferenciável:** 157, 163, 277, 278, 599, 615, 639
- **Dois-em-um:** 647
- **Escada:** 198, 199, 200, 201, 202, 207, 626, 646
- **Exponencial:** 131, 159, 183, 196, 463, 464, 469, 531
- **Geradora:** 417, 471
- **Holomorfa:** 529, 530, 531, 534, 535, 589
- **Homográfica:** 402, 403, 448, 453, 530, 535
- **Hiperbólica:** 183, 184, 188, 216, 681
- **Identidade:** 276
- **Implícita (Teorema da):** 609
- **Injetiva:** 134, 165, 279, 426, 563
- **Inteira:** 528
- **Logarítmica:** 131, 160
- **Modular:** 434, 638, 639
- **Monótona:** 82, 83, 87, 130, 173, 189, 205, 501, 557
- **Não Derivável:** 615
- **Não Negativa:** 89, 200, 202, 625, 626
- **Nula:** 480, 491, 496
- **Par:** 165, 435, 450, 457, 640, 641, 643
- **Periódica:** 433, 434, 618, 621, 622, 629, 632, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 663, 664, 665, 682
- **Poligonal:** 476, 477, 478, 479, 614, 632, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 659, 663, 664, 665
- **Polinomial:** 133, 417, 436, 466, 467, 469, 470, 479, 480, 481, 483, 484, 486, 487, 490, 491, 492, 494, 495, 496, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 520, 524, 526, 527, 528, 535, 536, 537, 538, 541, 544, 547, 551, 552, 553, 555, 560, 561, 562, 563, 565, 567, 570, 574, 576, 577, 595, 600, 612, 615, 618, 622, 656, 659, 663, 664, 665, 686, 687
- **Quase-Contínua:** 204
- **Quase-Escada:** 200, 201, 202, 627
- **Real:** 81, 82, 83, 86, 87, 97, 98, 112, 130, 132, 133, 134, 135, 145, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 167, 170, 171, 196, 202, 204, 205, 209, 210, 219, 221, 236, 239, 240, 270, 271, 276, 311,

313, 333, 334, 336, 337, 339, 341, 342, 343, 345, 349, 350, 351, 352, 353, 356, 357, 358, 374, 375, 378, 380, 381, 384, 386, 401, 414, 418, 423, 424, 432, 433, 434, 435, 440, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 454, 456, 457, 458, 463, 464, 466, 467, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 485, 486, 487, 490, 492, 494, 495, 496, 499, 500, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 511, 513, 514, 515, 516, 517, 519, 520, 524, 526, 527, 531, 533, 536, 537, 538, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 570, 571, 574, 575, 576, 579, 580, 581, 582, 595, 599, 600, 601, 602, 605, 607, 609, 611, 612, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 631, 632, 637, 638, 640, 643, 644, 645, 646, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 663, 664, 665, 680, 681, 685, 686, 687, 689, 690, 691

- **Simples:** 625, 626
- **Sobretudo:** 227
- **Sobrejetiva:** 531
- **Totiente de Euler:** 414
- **Trigonométrica:** 236, 237, 238, 239, 240, 311, 333, 335, 336, 341, 342, 343, 345, 352, 353, 371, 372, 373, 377, 379, 400, 470, 472, 479, 506, 515, 549, 555, 570, 596, 618, 619, 620, 622, 624, 629, 645, 655, 656, 659, 663

- **Fundação Francisco Manuel dos Santos:** 706

G

- **Gandhi:** 5
- **Gauss, Carl Friedrich:** 484
  - **Curva de:** 44, 576, 577, 578, 579, 584, 682, 687
  - **Inteiros Gaussianos:** 452, 453
- **Gel’fand, I. M.:** 271, 704
- **Geometria:** 6, 8, 9, 10, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 240, 241, 242, 246, 248, 251, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 266, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 292, 296, 297, 302, 304, 305, 308, 309, 310, 311, 313, 318, 319, 320, 323, 326, 331, 341, 346, 349, 350, 351, 353, 359, 360, 362, 370, 374, 381, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 401, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 417, 420, 421, 423, 425, 429, 430, 431, 436, 437, 470, 473, 500, 505, 514, 515, 545, 572, 573, 584, 585, 591, 598, 608, 609, 617, 638,

639, 681, 682, 685, 686, 687, 688, 691, 692
    - **Analítica:** 349, 370, 437, 573, 686
    - **Diferencial:** 8, 9, 405, 701, 702
    - **Fractal:** 8, 9, 137, 359, 662
    - **Inversiva:** 398
    - **Não Euclidiana:** 9, 404, 407
- **Geogebra:** 9, 12, 132, 211, 217, 393, 398, 474, 575, 639, 646, 648, 650, 651, 657, 658, 659, 681, 685, 686, 688, 692
- **Girard, Relações de:** 48, 490, 499, 500, 504, 505, 508, 511, 513, 519, 520, 525, 563
- **Gradiente:** 599, 600, 601, 609, 639
- **Gram-Schmidt, Processo de:** 314
- **Gramsci, Antonio:** 8, 703
- **Green, Teorema de:** 585, 586, 587, 588, 589
- **Grupo de Galois:** 363
- **Grupo(s):** 8, 9, 415, 416, 426, 438, 453

H

- **Hadamard, Desigualdade de:** 316, 317
- **Halmos, Paul R.:** 271, 624, 704
- **Harmônico (Movimento):** 572
- **Hefez, Abramo:** 454, 704
- **Hermenêutica:** 705
- **Herstein, I. N.:** 359, 704
- **Hessiana (Matriz):** 604, 612, 613
- **Hierão, Fórmula de:** 234, 248, 297, 305, 343, 514, 573
- **Hilbert, David:** 275
    - **Espaço de:** 59, 275, 613, 615, 624, 625, 682
- **História da Matemática:** 212, 224, 484, 702, 703, 705
- **Holomorfa (Função):** 529, 530, 531, 534, 535, 589
- **Homografias (Transformações de Möbius):** 402, 403, 448, 453, 530, 535
- **Homomorfismos:** 380, 386
- **Homotetia:** 349, 381, 530, 563
- **Hôpital, Regra de L':** 566

- **Hiperbólica (Função):** 183, 184, 188, 216, 681

I

- **IA (Inteligência Artificial):** 6, 7, 8, 12, 186, 219, 220, 386, 578, 579, 584, 604, 628, 631, 654, 664, 665, 666, 675, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693
- **Identidade(s):** 26, 27, 46, 67, 70, 78, 116, 160, 236, 237, 238, 249, 251, 301, 302, 322, 323, 324, 328, 330, 335, 343, 344, 348, 369, 370, 371, 372, 373, 410, 436, 442, 459, 480, 483, 490, 561, 564, 571, 572
- **IME (Instituto Militar de Engenharia):** 6, 7, 36, 51, 58, 59, 70, 98, 116, 117, 138, 140, 141, 142, 146, 155, 163, 164, 171, 178, 180, 230, 241, 243, 244, 251, 283, 291, 305, 307, 308, 309, 331, 341, 349, 350, 446, 447, 448, 450, 451, 494, 496, 497, 501, 508, 509, 512, 513, 516, 517, 536, 537, 538, 551, 552, 553, 554, 565, 566, 568, 569, 705
- **IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada):** 7, 701, 702, 703, 704, 705, 706
- **Inequação(ões):** 140, 145, 171, 172, 178, 191, 330, 331, 342, 343, 345, 538, 552, 560, 568
- **Infinitesimal (Cálculo):** 6, 224, 615
- **Integral:** 11, 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 279, 280, 312, 472, 473, 475, 477, 480, 532, 533, 534, 535, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 587, 588, 592, 593, 594, 595, 605, 606, 621, 625, 626, 627, 630, 631, 638, 646, 665, 679, 681, 685, 687
  - **Definida:** 206, 207, 582, 606, 630
  - **Dupla:** 582, 584
  - **Elíptica:** 472
  - **Imprópria:** 212, 213, 215
  - **Indefinida:** 206, 210, 357, 665
  - **De Lebesgue:** 625, 626, 627, 687
  - **Parcial:** 582, 584
- **Inteligência:** 6, 11, 12, 186, 216, 219, 386, 578, 579, 584, 604, 628, 631, 654, 665, 666, 675, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691
  - **Aumentada:** 654, 665
  - **Senciente:** 11, 45, 146, 376, 579, 679, 690
- **Interpolação de Lagrange, Fórmula de:** 491, 496, 505

- **Inversão de Steiner:** 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 404, 682, 687
- **Iório, Valéria:** 624, 629, 704
- **Irredutível (Polinômio):** 480, 481, 490, 492, 493, 495, 496, 508, 565
- **Isometria:** 315, 405
- **Isomorfismo(s):** 380, 381, 382, 624
- **Isoperimétrica (Desigualdade):** 287, 288, 585, 589, 590, 591

J

- **Jacobiana (Matriz):** 278, 602, 605, 606
- **Jacobi, Teorema de:** 316, 443, 613
- **Jensen, Desigualdade de:** 300, 546, 549, 572, 688
- **Jonas, Hans:** 704
- **Jung, Teorema de:** 346

K

- **Kaplan, Wilfred:** 91, 198, 704
- **Kohr, Curva de:** 61
- **Krasand:** 705
- **Kung, Hans:** 704

L

- **Lagrange, Joseph-Louis:** 161, 212, 613
  - **Identidade de:** 264
  - **Multiplicadores de:** 607, 608, 609, 610, 611, 682, 687
  - **Polinômio de Interpolação de:** 491, 496, 505
  - **Teorema do Valor Médio de:** 160, 161, 162, 299, 478, 677
- **Lagrangeana (Função):** 610
- **Lakoff, George:** 704
- **Lang, Serge:** 61, 704
- **Laplace, Teorema de:** 443
- **Lebesgue:**
  - **Integral de:** 625, 626, 627, 687
  - **Medida de:** 122, 136, 199, 625
  - **Teorema da Convergência Dominada de:** 626, 627

- **Leibniz:** 6, 212
  - **Regra de (Séries):** 90, 501
- **Lema:** 95, 159, 227
- **Lima, Elon Lages:** 91, 106, 137, 198, 275, 575, 600, 606, 624, 705
- **Limite(s):** 11, 82, 83, 86, 87, 93, 133, 134, 159, 160, 163, 170, 196, 197, 198, 203, 205, 208, 213, 215, 221, 222, 273, 276, 311, 378, 473, 480, 485, 504, 557, 561, 566, 577, 584, 608, 621, 626, 638, 677
  - **Central**, **Teorema do:** 577
  - **Lateral:** 159
- **Linguagem:** 6, 7, 8, 10, 11, 12, 120, 137, 186, 360, 402, 481, 485, 607, 677
- **Lins Neto, Alcides:** 403, 454, 705
- **Liouville, Teorema de:** 535
- **Logaritmo:** 130, 131, 160
  - **Derivação:** 562
  - **Neperiano:** 200, 472, 497, 513
- **Logística (Função):** 215, 216, 217, 218, 681, 685
- **Lomonosov, Universidade de Moscou:** 141, 142, 171

M

- **Macedo, André:** 7
- **Mandelbrot, Benoît B.:** 10, 137
- **Matemática:** 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 45, 65, 69, 91, 92, 94, 127, 137, 146, 161, 183, 212, 218, 219, 224, 233, 246, 258, 269, 271, 305, 316, 359, 360, 362, 376, 379, 380, 386, 387, 398, 403, 408, 415, 416, 417, 420, 423, 429, 430, 431, 436, 437, 438, 440, 442, 443, 445, 446, 452, 453, 454, 458, 459, 464, 470, 472, 473, 474, 475, 480, 483, 484, 485, 490, 494, 495, 499, 500, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 513, 514, 515, 516, 517, 520, 524, 526, 531, 534, 544, 545, 547, 549, 553, 554, 561, 562, 563, 564, 565, 567, 570, 571, 572, 573, 578, 579, 584, 591, 592, 596, 598, 604, 608, 609, 612, 615, 617, 618, 621, 622, 624, 627, 628, 629, 631, 632, 645, 652, 653, 654, 655, 656, 659, 663, 664, 665, 666, 675, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693
  - **Concreta:** 703
  - **Discreta:** 92, 213, 471, 629, 686
  - **Intermediária:** 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 24, 25, 36, 45, 69, 94, 124,

129, 137, 146, 183, 218, 359, 386, 391, 405, 408, 417, 429, 470, 473, 520, 531, 534, 569, 578, 584, 596, 628, 629, 665, 666, 675, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693
    - **Olimpíadas de:** 6, 7, 46, 56, 59, 71, 109, 110, 114, 117, 119, 120, 121, 127, 164, 194, 230, 241, 243, 251, 292, 296, 305, 307, 308, 323, 331, 418, 419, 427, 431, 446, 451, 495, 516, 538, 567, 574, 578, 678, 690
- **Matriz(es):** 267, 315, 374, 375, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 449, 450, 463, 464, 602, 605, 606, 612, 613, 631
    - **Adjunta:** 374
    - **Colunas:** 266, 268, 315, 385
    - **Diagonal:** 267, 381, 382, 384, 463, 464
    - **Jacobiana:** 278, 602, 605, 606
    - **Ortogonal:** 315, 384, 612
    - **Potência de:** 382
    - **Quadrada:** 266, 315, 380, 382, 384, 449, 450, 463
    - **Raiz quadrada de:** 382
    - **Simétrica:** 374, 384, 612
    - **Transposta:** 374, 384
    - **De Transição:** 269
- **Máximos e Mínimos:** 37, 38, 48, 51, 59, 98, 112, 115, 127, 134, 162, 163, 168, 175, 204, 234, 235, 257, 258, 283, 284, 287, 288, 289, 291, 294, 315, 316, 320, 328, 341, 349, 388, 391, 417, 440, 442, 447, 450, 475, 480, 507, 517, 526, 535, 547, 574, 575, 576, 598, 599, 600, 601, 603, 604, 607, 608, 609, 611, 612, 613, 682, 685, 688
    - **Condicionados:** 598, 607, 608, 609
    - **Locais:** 492, 599, 601, 612, 613
- **Maturana, Humberto R.:** 666, 705
- **Medeiros, L. M.:** 626, 705
- **Mediana:** 44, 285, 297, 302, 330
- **Média(s):** 33, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 48, 54, 59, 127, 212, 288, 305, 546, 549, 569, 570, 621, 630, 631
    - **Aritmética:** 33, 36, 38, 41, 44, 54, 59, 127, 212, 288, 305, 546, 549, 569, 570, 621, 630

    - **Aritmético-Geométrica:** 98
    - **Geométrica:** 33, 36, 38, 43, 54, 59, 127, 234, 262, 294, 343, 548, 609
    - **Harmônica:** 38, 54, 127
    - **Ponderada:** 41, 42, 630, 631
    - **Quadrática:** 34, 38, 43, 54, 59, 127, 257, 549
- **Medviédev, G. N.:** 705
- **Menelau, Teorema de:** 226
- **Mertens, Teorema de:** 91, 119
- **Método de Exaustão:** 212
- **Método de Newton:** 574, 575, 602
- **Métricas:** 272
- **Minkowski, Desigualdade de:** 549
- **Mlodinow, Leonard:** 705
- **Moise, Edwin E.:** 233, 359, 705
- **Morin, Edgar:** 10, 705
- **Movimento Harmônico Simples (MHS):** 572

N

- **Nagel, Ernest:** 705
- **Napoleão, Teorema de:** 286, 435, 681, 686
- **Neto, Sérgio Lima:** 705
- **Neural (Rede):** 185, 186, 187, 216, 386, 631
- **Newton:** 6, 212
    - **Binômio de:** 109, 166, 323, 345, 373, 446, 472, 494, 506, 508, 561, 570
    - **Fórmulas de (Polinômios):** 511, 512, 513, 520, 563
    - **Método de (Raízes):** 574, 575, 602
- **Niven, Ivan Morton:** 705
- **Norma:** 272, 367, 452, 614, 615, 616, 623, 624, 659
- **Números:**
    - **Algébricos:** 358, 494
    - **Complexos:** 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 378, 379, 380, 381, 382, 387, 388, 391, 399, 401, 402, 403, 406, 408, 410, 413,

414, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 427, 428, 429, 430, 431, 435, 436, 440, 442, 445, 446, 447, 448, 449, 451, 453, 455, 458, 459, 461, 481, 483, 485, 488, 490, 494, 495, 504, 509, 528, 531, 533, 534, 535, 536, 537, 541, 560, 561, 566, 570, 571, 682, 687
    - **Companheiros (Pell):** 95
    - **De Fibonacci:** 9, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 93, 94, 98, 554, 555, 685
    - **Inteiros:** 85, 92, 411, 412, 413, 415, 416, 452, 453, 494, 495, 552
    - **Irracionais:** 123, 124, 445, 494, 508
    - **Naturais:** 81, 92, 121, 164, 289, 330, 413, 552
    - **Primos:** 10, 46, 51, 172, 413, 416, 453, 508
    - **Racionais:** 11, 93, 123, 124, 125, 273, 494
    - **Reais:** 11, 93, 123, 124, 125, 134, 196, 273, 274, 494
    - **Transcendentes:** 137, 358, 494

O

- **OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática):** 230
- **O'Neil, Cathy:** 578, 679, 690
- **Otimização:** 8, 599, 604, 608, 613, 639, 682, 685, 688
    - **De Algoritmos:** 6
    - **De Imagens:** 403
    - **Não Diferenciável:** 639
- **Ordem (Relação de):** 10, 78, 123, 125, 222, 429, 480, 490, 499, 618, 656
- **Ortogonalidade:** 264, 265, 314, 384, 404, 407, 449, 617, 618, 620, 624

P

- **Pappus, Teorema de:** 580, 584
- **Pascal, Blaise:** 8, 706
    - **Princípio Holístico de Pascal:** 8, 386, 531
    - **Triângulo de:** 67, 555
- **Pell, Sequência de:** 94
- **Penrose, Roger:** 10, 706
- **Período (Função):** 239, 433, 434, 440, 531, 641, 642, 644, 645, 652, 653, 654, 658, 659, 663, 665
    - **Fundamental:** 618, 640
    - **Mínimo Múltiplo Comum (mmc):** 433, 653

    - **Teorema dos Períodos Comensuráveis:** 652, 653, 654
- **Pierson, Lillian:** 706
- **Piketty, Thomas:** 706
- **Plano de Argand-Gauss:** 367, 406, 448
- **Poincaré, Henri:** 404, 405
    - **Conjectura de:** 9
    - **Disco de:** 9, 360, 404, 405, 682, 687
- **Polígono(s):** 256, 257, 287, 288
    - **Convexo:** 253, 289, 319, 419, 567, 591
    - **Inscrito de Área Máxima:** 257, 258, 284
    - **Regular:** 257, 258, 283, 289, 305, 308, 331, 410, 427, 438, 451, 611
- **Polinômio(s):** 7, 466, 467, 469, 470, 471, 472, 479, 480, 481, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 519, 520, 524, 526, 527, 528, 535, 536, 537, 538, 541, 544, 547, 551, 552, 553, 554, 555, 561, 562, 563, 565, 567, 568, 569, 570, 571, 574, 576, 577, 595, 600, 612, 615, 618, 622, 656, 659, 663, 664, 665, 686, 687
    - **Ciclotômico:** 565
    - **Contínuo:** 554, 555
    - **De Grau Ímpar:** 490
    - **De Interpolação de Lagrange:** 491, 496, 505
    - **De Taylor:** 466, 469, 526, 531, 571, 618
    - **Irredutível:** 480, 481, 490, 492, 493, 495, 496, 508, 565
    - **Mônico:** 480, 490, 495
    - **Nulo:** 480, 491, 496
    - **Polinomial:** 133, 417, 436, 466, 467, 469, 470, 479, 480, 481, 483, 484, 486, 487, 490, 491, 492, 494, 495, 496, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 520, 524, 526, 527, 528, 535, 536, 537, 538, 541, 544, 547, 551, 552, 553, 555, 560, 561, 562, 563, 565, 567, 570, 574, 576, 577, 595, 600, 612, 615, 618, 622, 656, 659, 663, 664, 665, 686, 687
    - **Recíproco:** 498, 499, 509, 558
    - **Simétrico:** 499, 507, 510, 511, 512, 514, 515, 520, 559
    - **Trigonométrico:** 479, 618, 619, 622, 623, 656, 659, 663, 664, 665

- **Potência (De uma Matriz):** 382
- **Pêndulo:** 472, 572
- **Ponto:**
  - **Crítico:** 277, 492, 575, 576, 599, 601, 603, 609, 612, 613
  - **De Acumulação:** 84, 85, 92, 133, 136, 146, 431
  - **De Fermat:** 241
  - **De Inflexão:** 547, 577
  - **De Máximo Local:** 492, 599, 601, 612, 613
  - **De Mínimo Local:** 492, 599, 601, 612, 613
  - **Fixo:** 167, 438
  - **Isolado:** 84, 85, 92, 133, 136, 616
- **Probabilidade:** 8, 9, 42, 44, 119, 577
  - **Geométrica:** 11, 93, 119, 120, 121, 573
- **Produto:**
  - **Interno:** 261, 274, 275, 314, 323, 367, 422, 590, 616, 617, 620, 623, 659
  - **Misto:** 264
  - **Notável:** 26, 27, 33, 46, 499
  - **Vetorial:** 263, 264, 265, 266
- **Progressão:**
  - **Aritmética (PA):** 59, 144, 180, 244, 305, 495, 499, 513
  - **Aritmético-Geométrica:** 69
  - **Geométrica (PG):** 29, 69, 87, 89, 139, 144, 180, 182, 188, 221, 289, 305, 416, 471, 472, 495, 517, 567
- **Projeção Ortogonal:** 259, 262, 314, 315, 331, 345, 349, 402, 617, 681
- **Ptolomeu**, **Teorema de:** 224, 281, 388, 389, 390, 399, 430

Q

- **Quadrilátero(s):** 253, 254, 255, 256, 281, 282, 388, 389, 399, 429, 568
  - **Convexo:** 253, 289, 319, 419, 567, 591
  - **Inscritível:** 254, 255, 281, 388, 399
- **Quociente de Newton:** 156, 528
- **Quociente (Funções):** 133, 160, 276, 528

R

- **Rabin**, **Método de (Criptografia):** 416
- **Raio de Convergência:** 468, 469
- **Raiz(es):** 6, 9, 33, 46, 51, 58, 66, 68, 69, 70, 95, 98, 116, 123, 124, 125, 139, 140, 141, 142, 147, 148, 150, 151, 155, 166, 173, 180, 182, 183, 188, 189, 192, 193, 219, 221, 222, 234, 242, 243, 252, 283, 284, 297, 301, 305, 308, 324, 326, 331, 341, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 358, 359, 369, 373, 379, 381, 382, 384, 408, 409, 410, 411, 413, 414, 415, 418, 419, 424, 427, 431, 436, 440, 442, 443, 445, 446, 447, 448, 449, 451, 452, 453, 455, 456, 458, 459, 461, 462, 463, 464, 480, 481, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 516, 517, 519, 520, 525, 526, 535, 536, 537, 538, 541, 551, 552, 553, 554, 555, 558, 560, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 570, 573, 574, 575, 576, 595, 612, 613, 616, 629, 654, 678, 679, 680, 681, 682, 685, 686, 687, 688, 690, 691, 693
  - **Cúbicas da Unidade:** 419, 449
  - **Múltiplas:** 492, 493, 495, 509
  - **Primitivas (da Unidade):** 411, 413, 414, 415, 424, 682, 687
  - **Racionais:** 490, 494, 495, 508
  - **Reais:** 141, 142, 147, 148, 164, 170, 171, 180, 189, 192, 193, 219, 221, 222, 239, 240, 243, 244, 270, 271, 276, 277, 278, 279, 311, 313, 336, 337, 339, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 351, 352, 353, 356, 358, 374, 377, 378, 384, 401, 414, 418, 423, 424, 432, 433, 434, 435, 440, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 454, 456, 457, 458, 463, 464, 466, 467, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 485, 490, 492, 494, 495, 496, 499, 500, 501, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 511, 513, 514, 515, 516, 517, 519, 520, 524, 526, 527, 531, 533, 536, 537, 538, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 570, 571, 574, 575, 576, 579, 580, 581, 582, 595, 599, 600, 601, 602, 605, 607, 609, 611, 612, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 631, 632, 637, 638, 640, 643, 644, 645, 646, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 663, 664, 665, 680, 681, 685, 686, 687, 689, 690, 691
  - **Simples:** 492, 496, 509
  - **Da Unidade:** 408, 409, 410, 413, 415, 424, 427, 495, 512, 561, 682, 687

- **Razão Áurea:** 65, 66, 69, 183, 289, 325, 500, 680, 686
- **Razão Cruzada:** 395, 403, 430
- **Razão Prateada:** 94
- **Redes:** 8, 9, 10, 185, 186, 187, 216, 360, 361, 362, 386, 617, 628, 631, 665, 679, 681, 682, 685, 686, 687
  - **Conexas:** 360, 361, 363
  - **Convolucionais:** 187, 631
  - **Eulerianas:** 363
  - **Neurais:** 185, 186, 187, 216, 386, 631
  - **Mundo Pequeno:** 360, 361, 362
- **Regra de L'Hôpital:** 566
- **Regra da Cadeia:** 158, 160, 312, 469, 533
- **Regra de Fermat (Generalizada):** 601
- **Regressão:** 7, 218, 474, 617, 685
- **Relação de Stewart:** 241, 350
- **Relatividade (Teoria da):** 9, 10
- **Riemann:** 212
  - **Esfera de:** 402
  - **Integral de:** 203, 627
- **Rolle, Teorema de:** 162, 163, 168
- **Romênia:** 56, 71, 141, 192, 287, 331, 451, 538, 567
- **Rotação:** 183, 349, 381, 530
- **Rudin, Walter:** 91, 92, 137, 198, 205, 479, 606, 622, 624, 626, 706
- **Russell, Bertrand:** 5, 11, 706

S

- **Salsburg, David:** 578, 707
- **Schoch, Karl:** 494
- **Secante (Função):** 236, 335
- **Semelhança (Triângulos):** 227, 284, 305, 389, 394, 396, 400
- **Semipolinômios Periódicos:** 659
- **Senoides:** 467
- **Seno (sen):** 236, 311, 335, 467, 469, 470, 531, 549, 618

- **Sequência(s):** 10, 11, 43, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 81, 82, 83, 86, 87, 93, 94, 95, 98, 134, 155, 196, 197, 198, 205, 222, 273, 275, 312, 347, 378, 387, 426, 471, 473, 501, 508, 533, 552, 553, 554, 555, 556, 561, 564, 569, 570, 574, 596, 614, 615, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 638, 645, 680, 685, 686
  - **Aritméticas:** 59, 144, 180, 244, 305, 495, 499, 513
  - **De Fibonacci:** 65, 66, 67, 68, 69, 70, 93, 94, 98, 554, 555, 685
  - **De Funções:** 196, 197, 198, 205, 621, 622, 623, 625, 626
  - **De Pell:** 94
  - **De Racionais:** 123, 124
  - **De Cauchy:** 93, 123, 124, 189, 273, 378, 615, 622, 680
- **Série(s):** 88, 89, 90, 91, 98, 198, 467, 468, 469, 471, 472, 513, 561, 613, 618, 621, 622, 623, 624, 629
  - **Binômia:** 472, 473, 501
  - **Convergente:** 83, 87, 88, 89, 90, 91, 98, 198, 203, 273, 315, 378, 467, 468, 469, 471, 472, 473, 497, 501, 513, 517, 524, 531, 552, 561, 566, 569, 615, 619, 621, 622, 623, 626
  - **De Potências:** 91, 198, 467, 468, 469, 471, 472, 513, 524, 531, 561, 566
  - **De Taylor:** 466, 469, 524, 531, 571, 618
  - **De Fourier:** 91, 198, 515, 532, 613, 618, 621, 622, 624, 629, 682
  - **Geométrica:** 88, 89, 471, 472
  - **Harmônica:** 88, 275
- **Shimura-Taniyama-Weil**, **Conjectura:** 417
- **Simone Weil:** 5, 703
- **Sistema(s):** 6, 7, 8, 9, 10, 12, 60, 61, 127, 132, 142, 145, 146, 170, 171, 173, 175, 180, 219, 220, 221, 222, 263, 268, 269, 278, 306, 319, 374, 375, 382, 387, 411, 423, 440, 442, 447, 458, 464, 496, 499, 504, 505, 506, 507, 508, 512, 536, 537, 553, 554, 558, 563, 568, 572, 602, 603, 607, 609, 610, 686
  - **De Equações Diferenciais:** 464
  - **De Numeração Posicional:** 60, 61, 127, 219
- **Soares, Marcio G.:** 403, 454, 707
- **Soifer, Alexander:** 707

- **Spivak, Michael:** 486, 707
- **Steiner, Jakob:** 391
  - **Inversão de:** 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 404, 682
  - **Teorema de:** 226, 231, 232
- **Stein, Elias M.:** 624, 626, 627, 707
- **Stewart, Ian:** 11, 629, 707
- **Stokes, Teorema de:** 589
- **Subespaço(s):** 271, 278, 314, 323, 380, 416, 617, 618, 620, 623, 656, 659
- **Suleyman, Mustafa:** 10, 707
- **Surgimento de Novas Ideias:** 6

T

- **Tales, Teorema de:** 226, 227, 233, 297
- **Tangente (Função):** 236, 335
- **TFC (Teorema Fundamental do Cálculo):** 205, 206, 208, 209, 213, 533
- **Tchebyschev, Desigualdade de:** 41, 43, 127
- **TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação):** 9, 12, 219, 584, 654, 665
- **Teoria:**
  - **Das Aproximações:** 7, 12, 472
  - **Dos Grafos:** 362
  - **De Grupos:** 8, 9, 415
  - **Do Caos:** 9
  - **Da Medida:** 8, 9, 120, 121, 122, 135, 596
  - **Dos Números:** 6, 8, 408, 413, 679
  - **Da Relatividade:** 9, 10
  - **Das Séries de Potências:** 468, 469
- **Teorema(s):** 6, 8, 11, 29, 45, 81, 83, 84, 87, 91, 92, 109, 119, 120, 127, 133, 134, 135, 146, 161, 162, 163, 167, 168, 172, 197, 198, 205, 206, 208, 209, 213, 225, 226, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 241, 246, 251, 254, 258, 259, 270, 273, 276, 281, 282, 283, 284, 287, 288, 292, 296, 297, 299, 300, 305, 308, 309, 310, 316, 318, 320, 323, 331, 338, 339, 340, 341, 346, 350, 351, 352, 353, 358, 359, 362, 370, 372, 377, 379, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 394, 395, 396, 399, 408, 412, 413, 415, 416, 417, 424, 425, 429, 430, 431, 436, 440, 443, 446, 450, 453, 454, 455, 470, 471, 473, 478, 479, 480,

481, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 505, 506, 508, 509, 511, 512, 513, 514, 517, 520, 524, 526, 535, 536, 537, 538, 541, 551, 552, 553, 554, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 573, 574, 577, 580, 581, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 591, 592, 594, 595, 596, 599, 601, 608, 609, 610, 611, 615, 621, 622, 623, 625, 626, 627, 630, 631, 637, 638, 645, 652, 653, 654, 655, 659, 663, 664, 665, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 693

- **De Aproximação Poligonal:** 478, 638
- **De Aproximação de Weierstrass:** 478, 479, 571, 615, 622
- **De Baire:** 615
- **De Binet (Fibonacci):** 67, 68, 69, 471
- **De Bolzano (Raízes):** 492
- **De Bolzano-Weierstrass:** 83, 92, 134, 273
- **Da Boa Ordenação:** 81
- **De Brahmagupta:** 46, 256, 446
- **De Cassini:** 67, 93
- **De Cauchy (Funções Complexas):** 589
- **De Ceva:** 226, 228, 229, 231, 232, 246
- **Do Limite Central:** 577
- **Do Lado Comum (TLC):** 225, 226, 227, 231, 246, 297, 318, 320
- **Do Valor Médio de Lagrange:** 160, 161, 162, 299, 478, 677
- **Do Resto:** 490, 563
- **Da Raiz:** 490, 563
- **Dos Períodos Comensuráveis:** 652, 653, 654
- **De Euler (Teoria dos Números):** 413, 415
- **De Fejér:** 479, 621, 622
- **De Fermat:** 162, 163, 413, 417, 601
- **Fundamental da Álgebra (TFA):** 484, 485, 486, 487, 488, 489, 535, 679
- **Fundamental da Aritmética:** 172, 302, 412, 425
- **Fundamental do Cálculo (TFC):** 205, 206, 208, 209, 213, 533
- **Fundamental da Semelhança:** 227, 233
- **De Fubini:** 583

    - **De Green:** 585, 586, 587, 588, 589
    - **Da Função Implícita:** 609
    - **De Jung:** 346
    - **De Lagrange (multiplicadores):** 609
    - **De Liouville:** 535
    - **De Mertens:** 91, 119
    - **De Napoleão:** 286, 435, 681, 686
    - **De Ptolomeu:** 224, 281, 388, 389, 390, 399, 430
    - **De Rolle:** 162, 163, 168
    - **De Steiner:** 226, 231, 232
    - **De Tales:** 227, 233, 297
    - **De Weierstrass (Extremos):** 134, 162, 276, 485, 577, 609, 615, 622
- **Termos Técnicos:** 675
- **TLC (Teorema do Lado Comum):** 225, 226, 227, 231, 246, 297, 318, 320
- **Topologia:** 8, 704
- **Traço (Curva):** 279, 533
- **Transcendente (Número):** 358, 445, 494
- **Transformação:**
    - **Linear:** 271, 278, 374, 380, 381, 605
    - **De Möbius (Homografias):** 402, 403, 448, 453, 530, 535, 677, 682, 687
    - **Soma-Produto:** 238, 243, 250, 251, 295, 299, 301, 302, 322, 345, 377
- **Transição:** 6, 7, 8, 11, 12, 224, 386, 531, 584, 596, 654
- **Triângulo(s):** 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 240, 241, 242, 246, 248, 251, 257, 258, 261, 262, 267, 272, 283, 284, 285, 286, 287, 289, 290, 292, 296, 297, 299, 300, 302, 304, 305, 308, 309, 310, 311, 313, 318, 320, 323, 326, 331, 343, 345, 346, 349, 350, 351, 353, 369, 370, 374, 388, 389, 393, 394, 396, 400, 405, 419, 431, 435, 436, 437, 440, 451, 514, 515, 545, 568, 570, 573, 608, 681, 685, 686
    - **Áureo:** 331
    - **De Fermat:** 241
    - **Do Lado Comum (TLC):** 225, 226, 227, 231, 246, 297, 318, 320

    - **Mediano:** 285, 297, 330
    - **De Napoleão:** 286, 435, 681, 686
    - **De Pascal:** 67, 555
    - **De Pitágoras:** 137, 294
    - **Potência:** 329
- **Trigonometria:** 6, 224, 236, 240, 243, 250, 251, 299, 301, 302, 305, 311, 312, 322, 323, 324, 325, 326, 328, 333, 334, 335, 336, 341, 342, 343, 345, 346, 347, 349, 351, 352, 353, 356, 371, 372, 373, 377, 379, 400, 408, 470, 472, 479, 506, 515, 549, 570, 595, 618, 619, 620, 622, 624, 629, 645, 655, 656, 659, 663

U

- **UFPI:** 7, 711
- **UFRJ:** 7
- **UFRN:** 7
- **Unidade Imaginária (i):** 366
- **Unidade, Raízes da:** 408, 409, 410, 413, 415, 424, 427, 495, 512, 561, 682, 687
- **Universo:** 6, 10, 579, 596, 679, 680, 681

V

- **Valor Médio (Função):** 212, 475, 630, 631
- **Valor Singular (Matrizes):** 384, 385, 386
- **Varela, Francisco J.:** 666, 705
- **Vetor(es):** 261, 263, 264, 265, 266, 268, 269, 270, 271, 272, 274, 277, 278, 280, 314, 315, 317, 318, 319, 323, 367, 370, 374, 380, 381, 422, 437, 442, 449, 592, 593, 595, 601, 602, 603, 614, 618, 620, 624, 631, 656, 659, 681, 686, 693
    - **Autovetor:** 381, 382, 449
    - **Campo Gradiente:** 601
    - **Coluna:** 268, 315, 374, 385, 602
- **Viéte:** 224
- **Vigotski, L. S.:** 707
- **Volume:** 36, 59, 118, 265, 266, 267, 278, 331, 349, 359, 360, 580, 581, 582, 584, 588, 592, 593, 594, 595, 596, 605, 606, 607, 608, 630, 682, 685, 692

    - **De uma Bola (Esfera):** 592, 593, 594, 595, 596
- **Vortex Editora:** 5
- **Vorobiov, N. N.:** 707

W

- **Weierstrass, Karl:** 11, 83, 92, 134, 162, 276, 478, 479, 571, 577, 590, 600, 609, 615, 621, 622, 681, 687
    - **Teorema de Aproximação de:** 478, 479, 571, 615, 622
    - **Teste de (Séries):** 622
- **Weil, Simone:** 5, 703
- **Williamson, Richard E.:** 602, 606, 609, 707
- **WolframAlpha:** 9, 575, 613, 665, 686, 692

Y

- **Young, Desigualdade de:** 549, 556

Z

- **Zhan, Maurício:** 707
- **Zornig, Peter:** 600, 604, 639, 707
- **Zubiri, Xavier:** 579, 707, 708